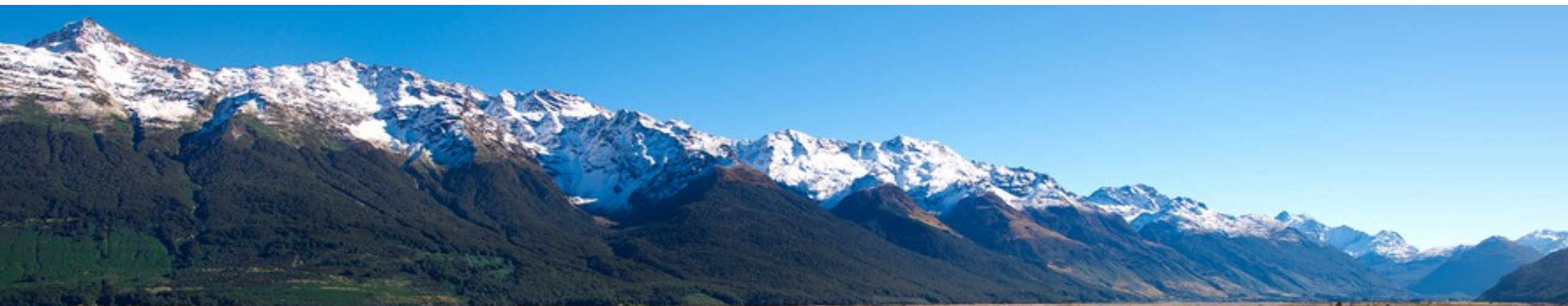
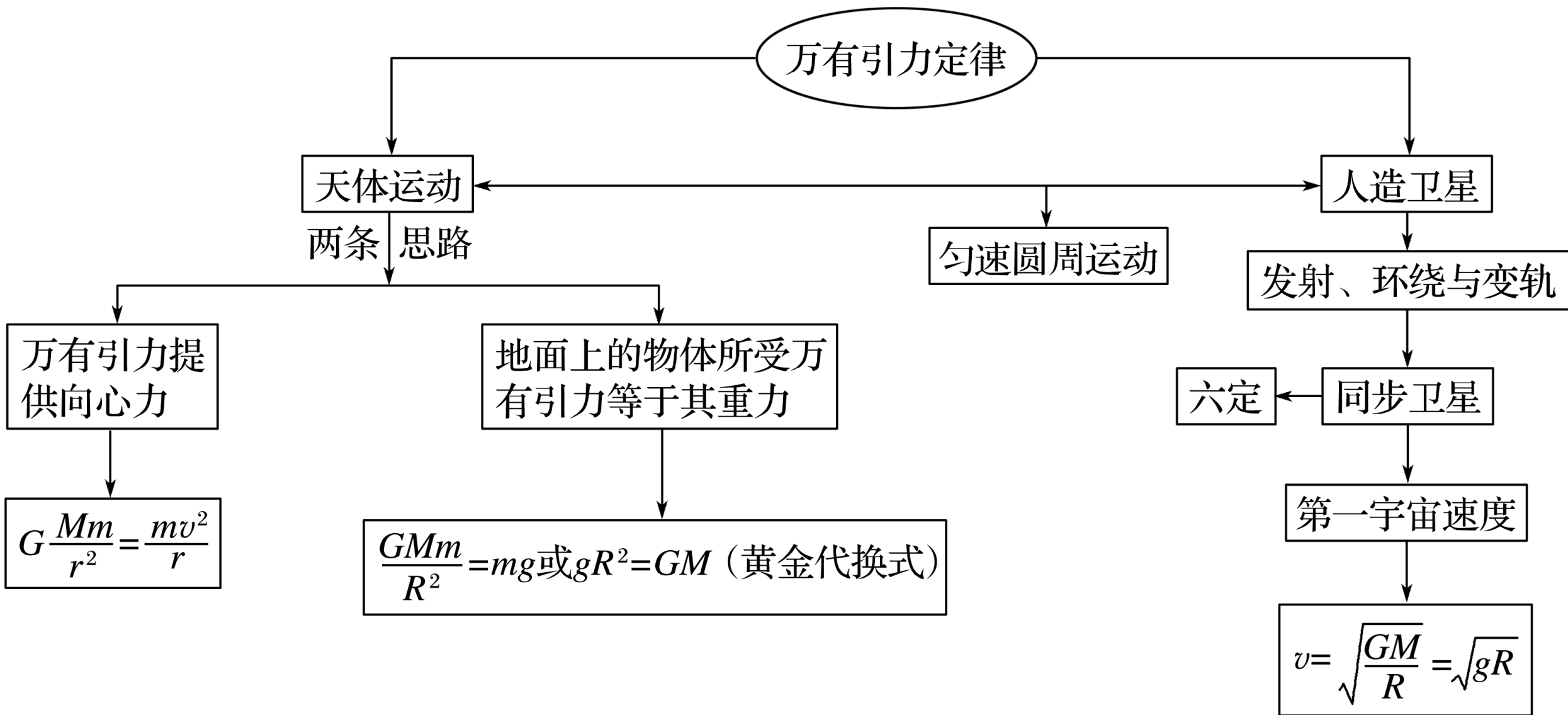


知识专题

# 专题4 万有引力与航天





万有引力定律

天体运动

两条思路

万有引力提供向心力

$$G \frac{Mm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

地面上的物体所受万有引力等于其重力

$$\frac{GMm}{R^2} = mg \text{ 或 } gR^2 = GM \text{ (黄金代换式)}$$

人造卫星

发射、环绕与变轨

六定

同步卫星

第一宇宙速度

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{gR}$$

匀速圆周运动

考题一 天体质量(密度)的估算

---

考题二 人造卫星问题

---

考题三 双星与多星问题

---

## 方法指导

### 求解中心天体质量密度的方法

1. 利用天体表面的重力加速度  $g$  和天体半径  $R$  求解

由于  $G\frac{Mm}{R^2} = mg$ ，故天体质量  $M = \frac{gR^2}{G}$ 。

2. 利用卫星绕天体做匀速圆周运动求解

(1) 已知卫星的轨道半径  $r$  和该轨道上的重力加速度  $g$ ，根据  $\frac{GMm}{r^2} = mg$ ，得

$M = \frac{gr^2}{G}$ ；(2) 已知卫星线速度  $v$  和轨道半径  $r$ ，根据  $\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$  得  $M = \frac{rv^2}{G}$ ；

(3) 已知卫星运转周期  $T$  和轨道半径  $r$ ，由  $\frac{GMm}{r^2} = m\frac{4\pi^2}{T^2}r$  得  $M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$ ；

(4) 已知卫星线速度  $v$  和运转周期  $T$ ，根据  $\frac{GMm}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$  和  $r = \frac{vT}{2\pi}$  得  $M = \frac{v^3 T}{2\pi G}$ 。

3. 天体密度的估算一般在质量估算的基础上，利用  $M = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$  进行。

## 典例剖析

**例 1** 宇宙中有两颗相距无限远的恒星  $S_1$ 、 $S_2$ ，半径均为  $R_0$ 。图 1 分别是两颗恒星周围行星的公转周期  $T^2$  与半径  $r^3$  的图象 **?** 则 ( )

- A. 恒星  $S_1$  的质量大于恒星  $S_2$  的质量
- B. 恒星  $S_1$  的密度小于恒星  $S_2$  的密度
- C. 恒星  $S_1$  的第一宇宙速度大于恒星  $S_2$  的第一宇宙速度
- D. 距两恒星表面高度相同的行星， $S_1$  的行星向心加速度较大

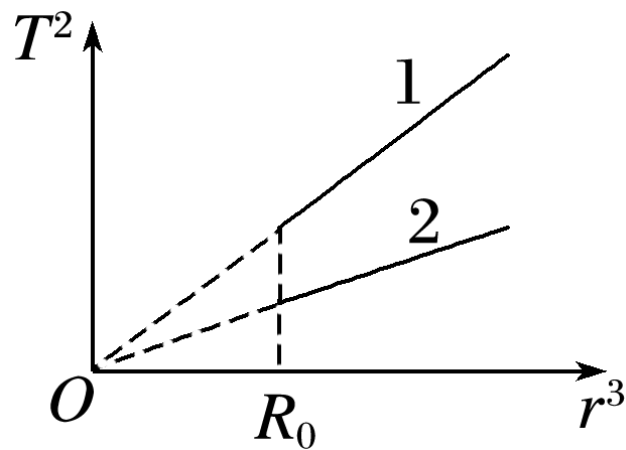


图 1

## [ 变式训练 ]

1. 地质勘探发现某地区表面的重力加速度发生了较大的变化，怀疑地下有空腔区域。进一步探测发现在地面  $P$  点的正下方有一球形空腔区域储藏有天然气，如图 2 所示。假设该地区岩石均匀分布且密度为  $\rho$ ，天然气的密度远小于  $\rho$ ，可忽略不计。如果没有该空腔，地球表面正常的重力加速度大小为  $g$ ；由于空腔的存在，现测得  $P$  点处的重力加速度

已知引力常量为  $G$ ，球形空腔的球心深度为  $d$ ，则此球形空腔的体积是 ( ? )

A.  $\frac{kgd}{G\rho}$

B.  $\frac{kgd}{G\rho}$

C.  $\frac{(1-k)gd}{G\rho}$

D.  $\frac{(1-k)gd^2}{G\rho}$

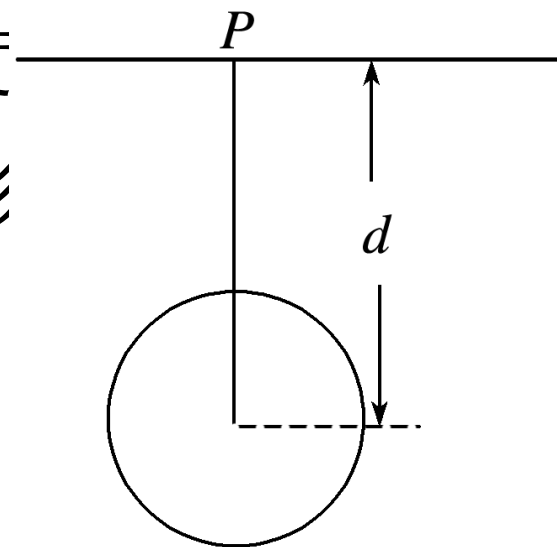


图 2

2. 某行星外围有一圈厚度为  $d$  的发光带（发光的物质），简化为如图 3 甲所示模型， $R$  为该行星除发光带以外的半径。现不知发光带是该行星的组成部分还是环绕该行星的卫星群，某科学家做了精确地观测，发现发光带绕行星中心的运行速度与到行星中心的距离  $r$  的关系如图乙所示（图中所标量为已知），则 **?** 列说法正确的是（ ）

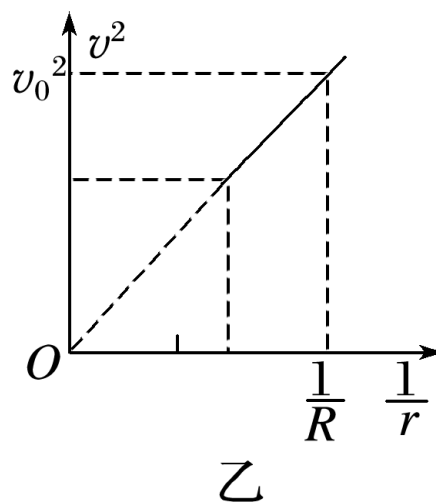
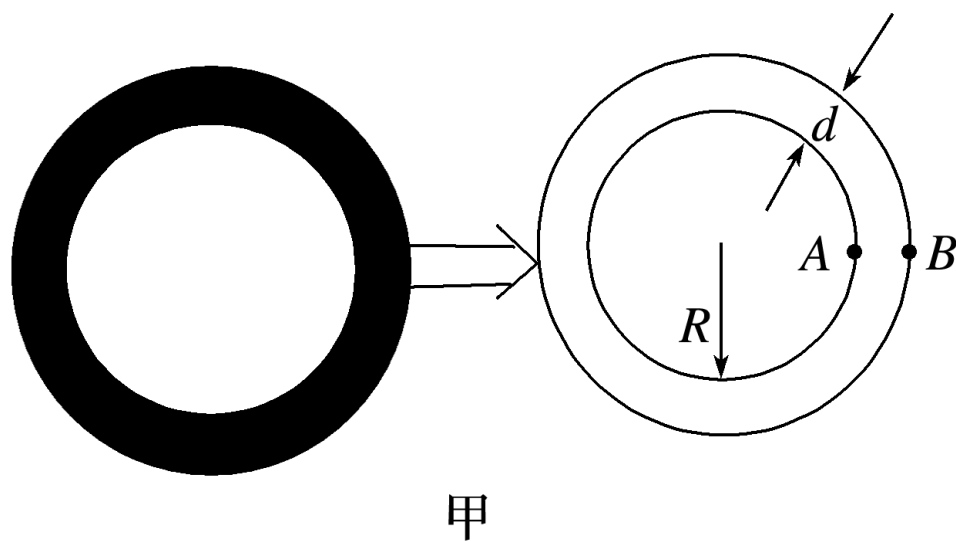


图 3

A. 发光带是该行星的组成部分

✓ B. 该行星的质量  $M = \frac{v_0^2 R}{G}$

✓ C. 行星表面的重力加速度  $g = \frac{v_0^2}{R}$

D. 该行星的平均密度为  $\rho = \frac{3v_0^2 R}{4\pi G(R + d)^3}$

3.“嫦娥二号”绕月卫星于2010年10月1日18时59分57秒在西昌卫星发射中心发射升空，并获得了圆满成功。“嫦娥二号”新开辟了地月之间的“直航航线”，即直接发射至地月转移轨道，再进入距月面约  $h = 1 \times 10^5 \text{ m}$  的圆形工作轨道，开始进行科学探测活动。设月球半径为  $R$ ，月球表面的重力加速度为  $g_{\text{月}}$ ，万有引力常量为  $G$  **?** 下列说法正确的是（ ）

- A. 由题目条件可知月球的平均密度为  $\frac{3g_{\text{月}}}{4\pi GR}$
- B. “嫦娥二号”在工作轨道上绕月球运行的周期为  $2\pi \sqrt{\frac{R}{G_{\text{月}}}}$
- C. “嫦娥二号”在工作轨道上的绕行速度为  $\sqrt{g_{\text{月}}(R+h)}$
- D. “嫦娥二号”在工作轨道上运行时的向心加速度为  $(\frac{R}{R+h})^2 g_{\text{月}}$

## 方法指导

### 解答卫星问题的三个关键点

1. 根据  $G\frac{Mm}{r^2} = F_{\text{向}} = m\frac{v^2}{r} = mr\omega^2 = mr\frac{4\pi^2}{T^2} = ma$ ，推导、记忆  $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$ 、

$\omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}$ 、 $T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM}}$ 、 $a = \frac{GM}{r^2}$  等公式。

2. 理解掌握第一宇宙速度的意义、求法及数值、单位。

3. 灵活应用同步卫星的特点，注意同步卫星与地球赤道上物体的运动规律的区别与联系。

**例 2** 为“照亮”嫦娥四号“驾临”月球背面之路，一颗承载地月中转通信任务的中继卫星将在嫦娥四号发射前半年进入到地月拉格朗日  $L_2$  点。如图 4 所示，在该点，地球、月球和中继卫星位于同一直线上，且中继卫星绕地球做圆周运动的轨道周期与月球绕地球做圆周运动轨道周期相同，则 ( ? )

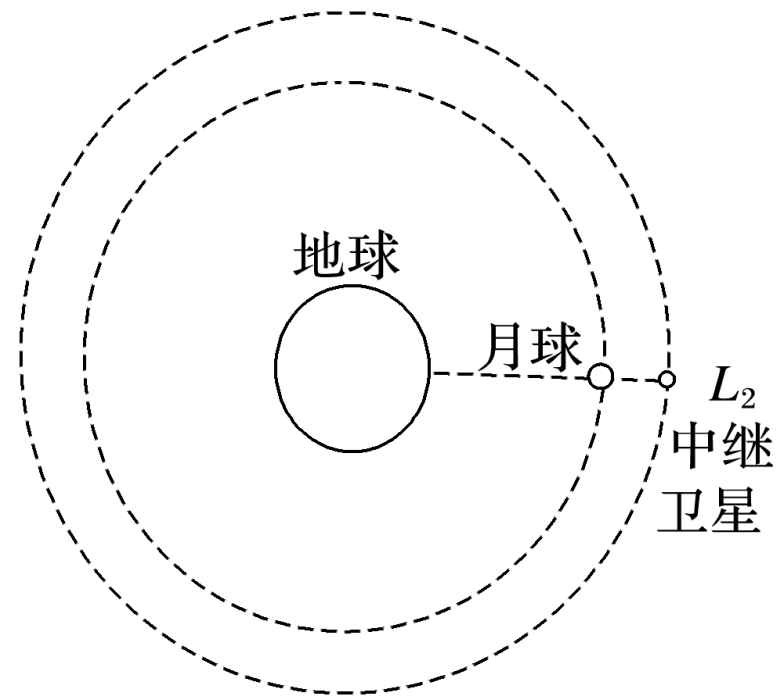


图 4

- ✓ A. 中继卫星做圆周运动的向心力由地球和月球的引力共同提供
- B. 中继卫星的线速度大小小于月球的线速度大小
- ✓ C. 中继卫星的加速度大小大于月球的加速度大小
- D. 在地面发射中继卫星的速度应大于第二宇宙速度

## [ 变式训练 ]

4.(2016·全国丙卷·14) 关于行星运动的规律，下列说法符合史实的是？

)

- ✓ A. 开普勒在牛顿定律的基础上，导出了行星运动的规律
- B. 开普勒在天文观测数据的基础上，总结出了行星运动的规律
- C. 开普勒总结出了行星运动的规律，找出了行星按照这些规律运动的原因
- D. 开普勒总结出了行星运动的规律，发现了万有引力定律

**解析** 开普勒在天文观测数据的基础上总结出了开普勒天体运动三定律，

5. 水星或金星运行到地球和太阳之间，且三者几乎排成一条直线的现象，天文学称为“行星凌日”。已知地球的公转周期为 365 天，若将水星、金星和地球的公转轨道视为同一平面内的圆轨道，理论计算得到水星相邻两次凌日的时间间隔为 116 天，金星相邻两次凌日的时间间隔为 584 天，则下列判断合理的是( ? )

A. 地球的公转周期大约是水星的 2 倍

✓ B. 地球的公转周期大约是金星的 1.6 倍

C. 金星的轨道半径大约是水星的 3 倍

✓ D. 实际上水星、金星和地球的公转轨道平面存在一定的夹角，所以水星或金星相邻两次凌日的实际时间间隔均大于题干所给数据

## 方法指导

## 1. 双星问题的模型构建

对于做匀速圆周运动的双星问题，双星的角速度(周期)以及向心力大小相

等,基本方程式为  $G\frac{M_1M_2}{L^2} = M_1r_1\omega^2 = M_2r_2\omega^2$ , 式中  $L$  表示双星间的距离,  $r_1$ ,

$r_2$  分别表示两颗星的轨道半径,  $L = r_1 + r_2$ .

## 2. 做匀速圆周运动的双星问题中需要注意的几个关键点

- (1) 双星绕它们连线上的某点做匀速圆周运动，两星轨道半径之和与两星距离相等；
- (2) 双星做匀速圆周运动的角速度必相等，因此周期也必然相等；
- (3) 双星做匀速圆周运动的向心力由双星间相互作用的万有引力提供，大小相等；
- (4) 列式时须注意，万有引力定律表达式中的  $r$  表示双星间的距离，而不是轨道半径（双星系统中两颗星的轨道半径一般不同）。抓住以上四个“相等”，即向心力、角速度、周期相等，轨道半径之和与两星距离相等，即可顺利求解此类问题。

## 典例剖析

**例 3** 天体  $A$  和  $B$  组成双星系统，围绕两球心连线上的某点做匀速圆周运动的周期均为  $T$ . 天体  $A$ 、 $B$  的半径之比为  $2:1$ ，两天体球心之间的距离为  $R$ ，且  $R$  远大于两天体的半径. 忽略天体的自转，天体  $A$ 、 $B$  表面重力加速度之比为  $4:1$ ，引力常量为  $G$ ，求  $A$  天体的质量.

# [ 思维规范流程 ]

<p>对 <math>A</math>、<math>B</math> 分别列牛顿第二定律表达式</p>	$\text{对 } A : \frac{M_1 M_2}{GR^2} = \frac{M_1 \frac{4\pi^2}{T^2} R_1}{\quad} \quad \textcircled{1}$ $\text{对 } B : \frac{M_1 M_2}{GR^2} = \frac{M_2 \frac{4\pi^2}{T^2} R_2}{\quad} \quad \textcircled{2}$
<p>轨道半径与两天体之间关系</p>	$\frac{R_1 + R_2}{\quad} = R \quad \textcircled{3}$
<p>在 <math>A</math>、<math>B</math> 表面：<math>F_B = G</math></p>	$\text{对 } A : 4mg = \frac{GM_1 m}{(2r)^2} \quad \textcircled{4}$ $\text{对 } B : mg = \frac{GM_2 m}{r^2}$ $\textcircled{5} \quad \frac{64\pi^2 R^3}{17GT^2}$
<p>每式各 2 结论</p>	<p>答案</p>

## [ 变式训练 ]

6. 美国在 2016 年 2 月 11 日宣布“探测到引力波的存在”。天文学家通过观测双星轨道参数的变化来间接验证引力波的存在，证实了 GW150914 是一个 36 倍太阳质量的黑洞和一个 29 倍太阳质量的黑洞合并事件。假设这两个黑洞绕它们连线上的某点做圆周运动，且这两个黑洞的间距缓慢减小。若该黑洞系统在运动过程中各自质量不变且不受其他星系的影响，则关于这两个黑洞的运动，下列说法正<sup>?</sup>的是（ ）

A. 这两个黑洞运行的线速度大小始终相等

B. 这两个黑洞做圆周运动的向心加速度大小始终相等

C. 36 倍太阳质量的黑洞轨道半径比 29 倍太阳质量的黑洞轨道半径大

D. 随两个黑洞的间距缓慢减小，这两个黑洞运行的周期也在减小

7. 由三颗星体构成的系统，叫做三星系统。有这样一种简单的三星系统：质量刚好都相同的三个星体  $a$ 、 $b$ 、 $c$  在三者相互之间的万有引力作用下，分别位于等边三角形的三个顶点上，绕某一共同的圆心  $O$  在三角形所在的平面内做相同周期的圆周运动，若三个星体的质量均为  $m$ ，三角形的边长为  $a$ ，万有引力常量为  $G$ ，则下列说法正确？是（ ）

A. 三个星体做圆周运动的轨道半径为  $a$

✓ B. 三个星体做圆周运动的周期均为  $2\pi a \sqrt{\frac{a}{3Gm}}$

C. 三个星体做圆周运动的线速度大小均为  $\sqrt{\frac{3Gm}{a}}$

D. 三个星体做圆周运动的向心加速度大小均为  $\frac{3Gm}{a^2}$