暑假专题——相似三角形

重点、难点：

1. 通过探索两个三角形相似的识别方法，加强合情推理能力的培养，感受发现的乐趣，逐步掌握说理的基本方法。

2. 通过相似三角形性质复习，丰富与角、面积等相关的知识方法，开阔研究角、面积等问题的视野。

【知识纵横】

1. 相似三角形

对应角相等，对应边成比例的三角形叫做相似三角形（similar triangles）。

议一议：

（1）两个全等三角形一定相似吗？为什么？

（2）两个直角三角形一定相似吗？两个等腰直角三角形呢？为什么？

（3）两个等腰三角形一定相似吗？两个等边三角形呢？为什么？

2. 相似比

相似三角形对应边的比叫做相似比。

说明：相似比要注意顺序：如△ABC∽△A'B'C'的相似比 $k_1=\dfrac{AB}{A'B'}$，而△A'B'C'∽△ABC的相似比 $k_2=\dfrac{A'B'}{AB}$，这时 $k_1=\dfrac{1}{k_2}$。

3. 相似三角形的识别

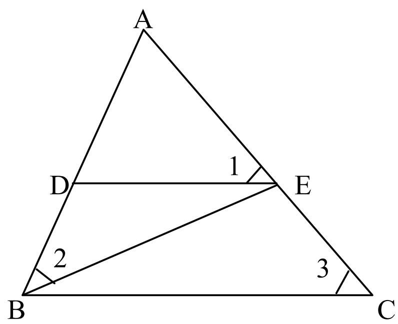
（1）如果一个三角形的两角分别与另一个三角形的两角对应相等，那么这两个三角形相似。

（2）如果一个三角形的两条边与另一个三角形的两条边对应成比例，并且夹角相等，那么这两个三角形相似。

（3）如果一个三角形的三条边和另一个三角形的三条边对应成比例，那么这两个三角形相似。

【典型例题】

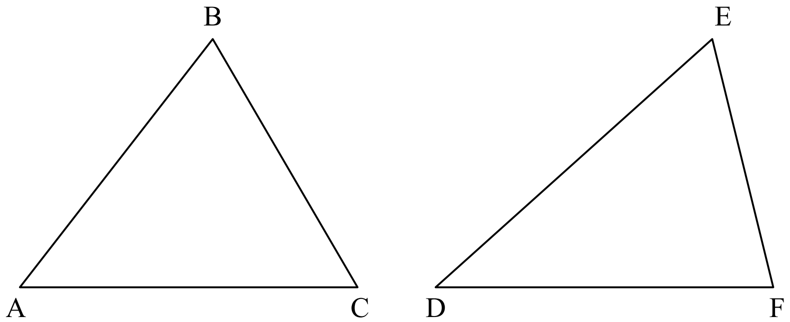
例 1. 如图，∠1 = ∠2 = ∠3，图中相似三角形有（　）对。



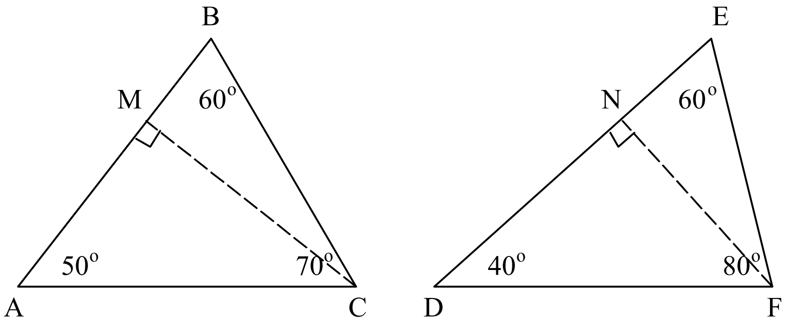
答：4 对

例 2. 如图，已知：△ABC、△DEF，其中∠A = 50°，∠B = 60°，∠C = 70°，∠D = 40°，∠E = 60°，∠F = 80°，能否分别将两个三角形分割成两个小三角形，使△ABC 所分成的每个三角形与△DEF 所分成的每个三角形分别对应相似？

如果可能，请设计一种分割方案；若不能，说明理由。



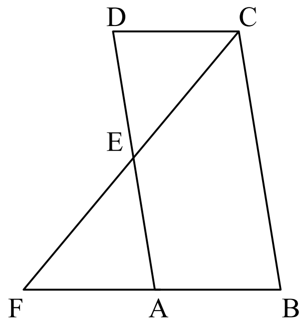
解：



例 3.（2008·广东省）如图所示，四边形 ABCD 是平行四边形，点 F 在 BA 的延长线上，连结 CF 交 AD 于点 E。

（1）求证：△CDE∽△FAE；

（2）当 E 是 AD 的中点，且 BC＝2CD 时，求证：∠F＝∠BCF。



命题意图：相似三角形的识别、特征在解题中的应用。

解析：由 AB∥DC 得：∠F＝∠DCE，∠EAF＝∠D

∴△CDE∽△FAE

∴ $\frac{CD}{FA}=\frac{DE}{AE}$ ，又 E 为 AD 中点

∴DE＝AE，从而 CD＝FA，结合已知条件，易证

BF＝BC，∠F＝∠BCF

解：（1）∵四边形 ABCD 是平行四边形

∴AB∥CD

∴∠F＝∠DCE，∠EAF＝∠D

∴△CDE∽△FAE

（2）∵E 是 AD 中点，∴DE＝AE

由（1）得：$\dfrac{CD}{AF}=\dfrac{DE}{AE}$

∴CD＝AF

∵四边形 ABCD 是平行四边形

∴AB＝CD

∴AB＝CD＝AF

∴BF＝2CD，又 BC＝2CD

∴BC＝BF

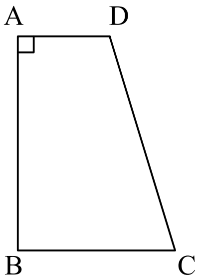
∴∠F＝∠BCF

思路探究：平行往往是证两个三角形相似的重要条件，利用比例线段也可证明两线段相等。

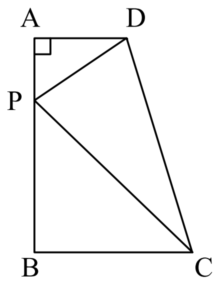
例 4. 在梯形 ABCD 中，∠A＝90°，AD∥BC，点 P 在线段 AB 上从 A 向 B 运动，

（1）是否存在一个时刻使△ADP∽△BCP；

（2）若 AD＝4，BC＝6，AB＝10，使△ADP∽△BCP，则 AP 的长度为多少？



解：（1）存在



（2）若△ADP∽△BCP，则$\dfrac{AD}{BC}=\dfrac{AP}{BP}$

设 $AP=x$

$\therefore \dfrac{4}{6}=\dfrac{x}{10-x}$，$\therefore x=4$，$\therefore AP=4$

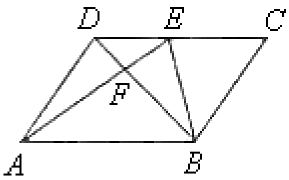
或$\dfrac{AD}{BP}=\dfrac{AP}{BC}$

$\therefore \dfrac{4}{10-x}=\dfrac{x}{6}$，$\therefore x=4$ 或 $x=6$

$\therefore AP=4$ 或 $AP=6$

∴AP 长度为 4 或 6

例 5. 如图，在平行四边形 ABCD 中，E 为 CD 上一点，DE：CE＝2：3，连结 AE、BE、BD，且 AE、BD 交于点 F，则 $S_{\Delta DEF}:S_{\Delta EBF}:S_{\Delta ABF}=$（ ）



A. 4：10：25　　　　　B. 4：9：25

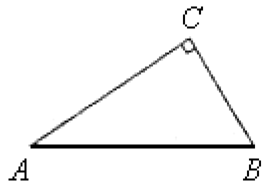
C. 2：3：5　　　　　　D. 2：5：25

（2001 年黑龙江省中考题）

思路点拨：运用与面积相关知识，把面积比转化为线段比。

∴选 A

例 6. 如图，有一批形状大小相同的不锈钢片，呈直角三角形，已知∠C＝90°，AB＝5cm，BC＝3cm，试设计一种方案，用这批不锈钢片裁出面积达最大的正方形不锈钢片，并求出这种正方形不锈钢片的边长。



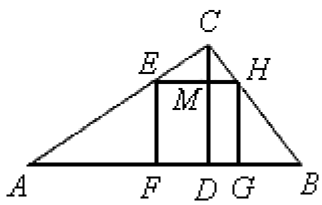
思路点拨：要在三角形内裁出面积最大的正方形，那么这正方形所有顶点应落在△ABC 的边上，先画出不同方案，把每种方案中的正方形边长求出。

解：如图甲，设正方形 EFGH 边长为 x，则 AC＝4

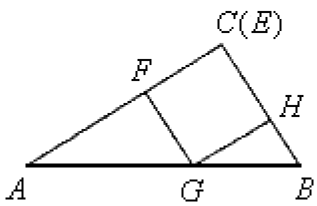
而 CD×AB＝AC×BC＝$2S_{\Delta ABC}$，得 $CD=\frac{12}{5}$

又△CEH∽△CAB，得 $\frac{CM}{CD}=\frac{EH}{AB}$

于是 $\frac{\frac{12}{5}-x}{\frac{12}{5}}=\frac{x}{5}$，解得：$x=\frac{60}{37}$



图甲



图乙

如图乙，设正方形 CFGH 的边长为 y cm

由 GH∥AC，得：$\frac{GH}{AC}=\frac{BH}{BC}$

即 $\frac{y}{4}=\frac{3-y}{3}$，解得：$y=\frac{12}{7}$

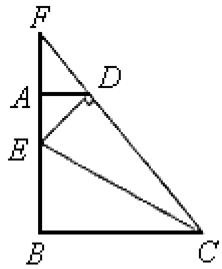
$\because x=\frac{60}{37}$，$y=\frac{12}{7}=\frac{60}{35}$，$\therefore y>x$

即应如图乙那样裁剪，这时正方形面积达最大，它的边长为$\frac{12}{7}cm$

例 7. 如图，已知直角梯形 ABCD 中，∠A＝∠B＝90°，设 $AB = a$，$AD = b$，$BC = 2b\ (a > b)$，作 DE⊥DC，DE 交 AB 于点 E，连结 EC。

（1）试判断△DCE 与△ADE、△DCE 与△BCE 是否分别一定相似？若相似，请加以证明。

（2）如果不一定相似，请指出 a、b 满足什么关系时，它们就能相似？



解：（1）△DCE 与△ADE 一定相似，△DCE 与△BCE 不一定相似，分别延长 BA、CD 交于 F 点

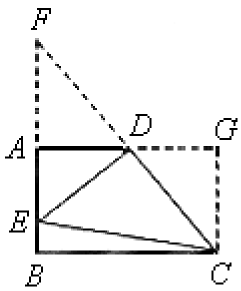
由△FAD∽△FBC，得：$\frac{FD}{FC} = \frac{AD}{BC} = \frac{b}{2b} = \frac{1}{2}$

于是 FD＝DC，从而可证△FED≌△CED

得∠AED＝∠DEC

所以△DEC∽△AED

（2）作 CG⊥AD 交 AD 延长线于 G，$CD = \sqrt{a^2 + b^2}$



由△AED∽△GDC，有$\frac{AE}{GD} = \frac{AD}{GC}$，得

$$AE = \frac{b^2}{a}$$

$$DE = \sqrt{AE^2 + AD^2} = \sqrt{b^2 + \left(\frac{b^2}{a}\right)^2} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$BE = AB - AE = a - \frac{b^2}{a} = \frac{a^2 - b^2}{a}$$

$$\frac{BE}{DE} = \frac{\frac{a^2 - b^2}{a}}{\frac{b}{a}\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a^2 - b^2}{b\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\frac{BC}{DC} = \frac{2b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

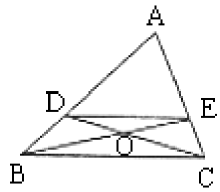
要使△DCE与△BCE相似，那么$\frac{BE}{DE}=\frac{BC}{DC}$一定成立

即$\frac{a^2-b^2}{b}=2b$，得$a^2=3b^2$

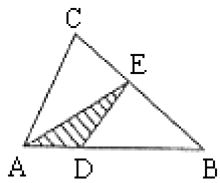
也就是当$a=\sqrt{3}b$时，△DCE与△BCE一定相似。

【模拟试题】（答题时间：40分钟）

1. 如图，已知DE∥BC，CD和BE相交于O，若$S_{\Delta DOE}:S_{\Delta COB}=9:16$，则AD：DB＝____________。



2. 如图，△ABC中，CE：EB＝1：2，DE∥AC，若△ABC的面积为S，则△ADE的面积为____________。



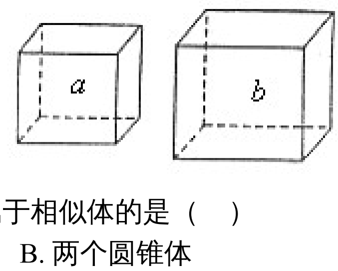
3. 若正方形的4个顶点分别在直角三角形的3条边上，直角三角形的两直角边的长分别为3cm和4cm，则此正方形的边长为____________。

（2000年武汉市中考题）

4. 阅读下面的短文，并解答下列问题：

我们把相似形的概念推广到空间：如果两个几何体大小不一定相等，但形状完全相同，就把它们叫做相似体。

如图，甲、乙是两个不同的正方体，正方体都是相似体，它们的一切对应线段之比都等于相似比：$a:b$，设$S_{甲}:S_{乙}$分别表示这两个正方体的表面积，则$\frac{S_{甲}}{S_{乙}}=\frac{6a^2}{6b^2}=\left(\frac{a}{b}\right)^2$，又设$V_{甲}$、$V_{乙}$分别表示这两个正方体的体积，则$\frac{V_{甲}}{V_{乙}}=\frac{a^3}{b^3}=\left(\frac{a}{b}\right)^3$。



（1）下列几何体中，一定属于相似体的是（　）

A. 两个球体　　B. 两个圆锥体

C. 两个圆柱体　　D. 两个长方体

（2）请归纳出相似体的3条主要性质：

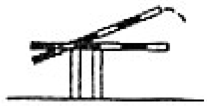
① 相似体的一切对应线段（或弧）长的比等于____________；

② 相似体表面积的比等于____________；

③ 相似体体积的比等于____________。

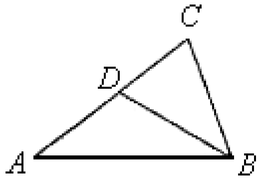
（2001 年江苏省泰州市中考题）

5. 如图，铁道口的栏杆短臂长 1 m，长臂长 16 m，当短臂端点下降 0.5 m 时，长臂端点升高（　）



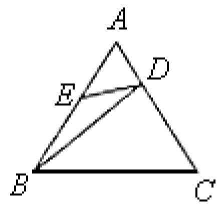
A. 11.25 m　　B. 6.6 m　　C. 8 m　　D. 10.5 m

6. 如图，D 为△ABC 的边 AC 上的一点，∠DBC = ∠A，已知 $BC=\sqrt{2}$，△BCD 与△ABC 的面积的比是 2∶3，则 CD 的长是（　）



A. $\frac{4}{3}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\frac{2}{3}\sqrt{3}$　　D. $\frac{4}{3}\sqrt{3}$

7. 如图，在正三角形 ABC 中，D、E 分别在 AC、AB 上，且 $\frac{AD}{AC}=\frac{1}{3}$，AE = BE，则有（　）

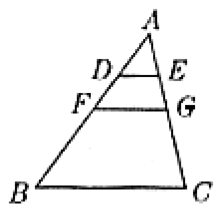


A. △AED∽△BED　　B. △AED∽△CBD

C. △AED∽△ABD　　D. △BAD∽△BCD

（2001 年杭州市中考题）

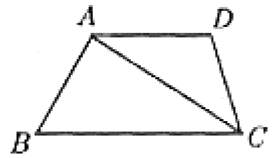
8. 如图，已知△ABC 中，DE∥FG∥BC，且 AD∶FD∶FB = 1∶2∶3，则 $S_{\triangle ADE}$ ∶ $S_{四边形DFGE}$ ∶ $S_{四边形FBCG}$ 等于（　）



A. 1∶9∶36　　B. 1∶4∶9

C. 1∶8∶27　　D. 1∶8∶36

9. 如图，已知梯形 ABCD 中，AD∥BC，∠ACD = ∠B，求证：$\frac{AB^2}{CD^2}=\frac{BC}{AD}$

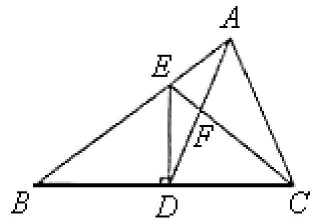


10. 如图，△ABC 中，D 是 BC 边上的中点，且 AD＝AC，DE⊥BC，DE 与 AB 相交于点 E，EC 与 AD 相交于点 F。

（1）求证：△ABC∽△FCD；

（2）若 $S_{\Delta FCD}=5$，$BC=10$，求 DE 的长。

（2000 年河北省中考题）



11. 阅读并解答问题。

在给定的锐角△ABC 中，求作一个正方形 DEFG，使 D、E 落在 BC 上，F、G 分别落在 AC、AB 边上，作法如下：

第一步：画一个有 3 个顶点落在△ABC 两边上的正方形 D'E'F'G'。

第二步：连结 BF'，并延长交 AC 于点 F；

第三步：过 F 点作 FE⊥BC 于 E；

第四步：过 F 点作 FG∥BC 交 AB 于点 G；

第五步：过 G 点作 GD⊥BC 于点 D。

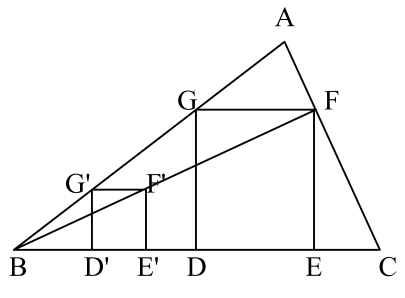
四边形 DEFG 即为所求作的四边形 DEFG，为正方形。

问题：

（1）证明上述所求作的四边形 DEFG 为正方形；

（2）在△ABC 中，如果 $BC=6+\sqrt{3}$，$\angle ABC=45^\circ$，∠BAC＝75°，求上述正方形 DEFG 的边长。

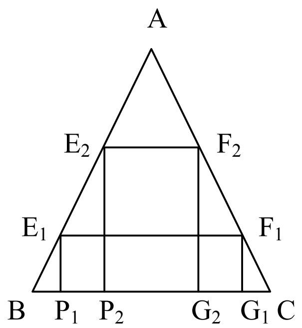
（江苏省扬州市中考题）



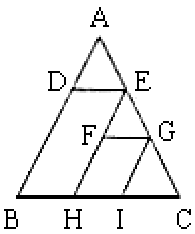
12. 如图，在△ABC 中，$AB=AC=\sqrt{5}$，$BC=2$，在 BC 上有 100 个不同的点 P_1、P_2、$P_3 \ldots P_{100}$，过这 100 个点分别作△ABC 的内接矩形 $P_1E_1F_1G_1$，$P_2E_2F_2G_2 \cdots P_{100}E_{100}F_{100}G_{100}$，设每个内接矩形的周长分别为 L_1、$L_2 \ldots L_{100}$，则 $L_1+L_2+\ldots+L_{100}=$

____________。

（安徽省竞赛题）

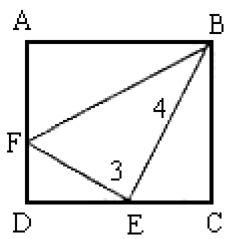


13. 如图，在△ABC 中，DE∥FG∥BC，GI∥EF∥AB，若△ADE、△EFG、△GIC 的面积分别为 $20cm^2$ 、 $45cm^2$ 、 $80cm^2$ ，则△ABC 的面积为___________。

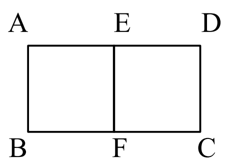


14. 如图，一个边长为 3、4、5 厘米的直角三角形的一个顶点与正方形的顶点 B 重合，另两个顶点分别在正方形的两条边 AD、DC 上，那么这个正方形的面积是___________厘米^2。

（第 11 届"希望杯"邀请赛试题）

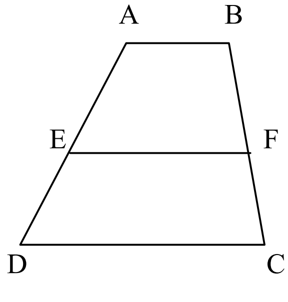


15. 如图，将一个矩形纸片 ABCD 沿 AD 和 BC 的中点连线对折，要使矩形 AEFB 与原矩形相似，则原矩形的长与宽的比为（　）



A. 2：1　　B. $\sqrt{3}$：1　　C. $\sqrt{2}$：1　　D. 1：1

16. 如图，梯形 ABCD 中，AB∥CD，且 CD＝3AB，EF∥CD，EF 将梯形 ABCD 分成面积相等的两部分，则 AE：ED 等于（　）



A. 2　　　　　B. $\frac{3}{2}$　　　　C. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$　　　　D. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

【试题答案】

1. 3：1

2. $\frac{2}{9}S$

3. $\frac{12}{7}$ 或 $\frac{60}{37}$

4. （1）A；（2）相似比；相似比的平方；相似比的立方

5. C　　　6. C　　　7. B　　　8. C

9. 由△ABC∽△DCA，得 $\frac{AB^2}{CD^2}=\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ADC}}=\frac{BC}{AD}$

10. （1）略

（2）过 A 作 AM⊥BC 于 M

由△ABC∽△FCD，得：

$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta FCD}}=\left(\frac{BC}{CD}\right)^2=\left(\frac{2CD}{CD}\right)^2=4$

$S_{\Delta ABC}=4S_{\Delta FCD}=20$

又 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AM$，$BC=10$，得 $MA=4$

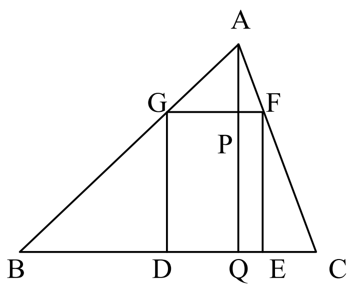
∵DE∥AM，

$\therefore\frac{DE}{AM}=\frac{BD}{BM}$，$DM=\frac{1}{2}DC=\frac{5}{2}$，$BM=BD+DM$，$BD=\frac{1}{2}BC=5$

$\therefore\frac{DE}{4}=\frac{5}{5+\frac{5}{2}}$，得 $DE=\frac{8}{3}$

11. （1）易证明四边形 EFGD 为矩形，由 $\frac{E'F'}{EF}=\frac{BF'}{BF}=\frac{F'G'}{FG}$，而 $E'F'=G'F'$，得 EF＝GF，故四边形 EFGD 为正方形。

（2）过 A 作 AQ⊥BC 于 Q 交 GF 于 P，且 AQ＝BQ，∠BCA＝60°，∠QAC＝30°，$QC=\frac{\sqrt{3}}{3}QA$，又 $BC=6+\sqrt{3}$



即 $AQ+\frac{\sqrt{3}}{3}AQ=6+\sqrt{3}$，解得 $AQ=\frac{15-3\sqrt{3}}{2}$

由 $\frac{GF}{BC}=\frac{AP}{AQ}$，得 $GF=\frac{BC\cdot AQ}{BC+AQ}=\frac{81-3\sqrt{3}}{27-\sqrt{3}}=3$

12. 400

提示：从内接一个矩形入手，探求内接△ABC中任一矩形的长与宽的关系。

13. $405cm^2$

提示：$\frac{DE}{BC}+\frac{FG}{BC}+\frac{IC}{BC}=1$

14. $\frac{16^2}{17}$

解：设$BC=a$，则$CE=\sqrt{16-a^2}$

由△BCE∽△EDF，得$DE=\frac{3}{4}a$

又$DE+EC=DC$，即$\frac{3}{4}a+\sqrt{16-a^2}=a$

15. C

16. C

提示：延长 DA、CB 相交于 G，$\frac{S_{\Delta GAB}}{S_{\Delta GDC}}=\left(\frac{AB}{CD}\right)^2=\frac{1}{9}$

设$S_{\Delta GAB}=S$，则

$S_{\Delta GDC}=9S$

$S_{梯形ABCD}=8S$

$GA^2:GE^2:GD^2=S_{\Delta GAB}:S_{\Delta GEF}:S_{\Delta GDC}=1:5:9$

即$GA:GE:GD=1:\sqrt{5}:3$，$\frac{AE}{ED}=\frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$