第一章　勾股定理

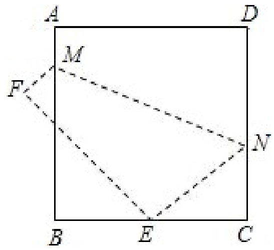
1.1 探索勾股定理

专题一 有关勾股定理的折叠问题

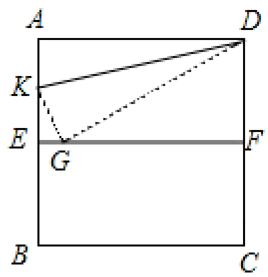
1. 如图，将边长为 8cm 的正方形 ABCD 折叠，使点 D 落在 BC 边的中点 E 处，点 A 落在 F 处，折痕为 MN，则线段 CN 长是（　　）

A．3cm　　　　B．4cm

C．5cm　　　　D．6cm



2. 如图，EF 是正方形两对边中点的连线段，将∠A 沿 DK 折叠，使它的顶点 A 落在 EF 上的 G 点，求∠DKG 的度数．

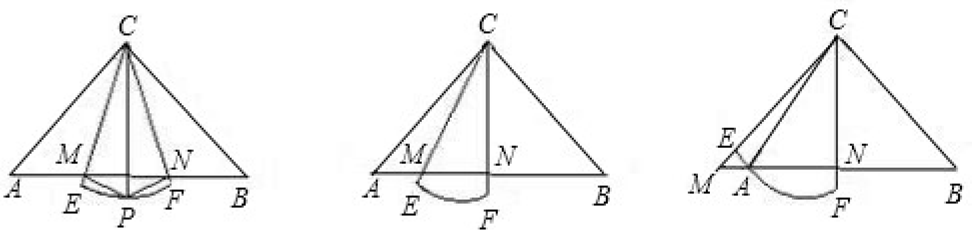


3．已知 Rt△ABC 中，∠ACB=90°，CA=CB，有一个圆心角为 45°，半径长等于 CA 的扇形 CEF 绕点 C 旋转，直线 CE、CF 分别与直线 AB 交于点 M、N．

（1）如图①，当 AM=BN 时，将△ACM 沿 CM 折叠，点 A 落在弧 EF 的中点 P 处，再将△BCN 沿 CN 折叠，点 B 也恰好落在点 P 处，此时，PM=AM，PN=BN，△PMN 的形状是________________．线段 AM、BN、MN 之间的数量关系是________________________________；

（2）如图②，当扇形 CEF 绕点 C 在∠ACB 内部旋转时，线段 MN、AM、BN 之间的数量关系是________________．试证明你的猜想；

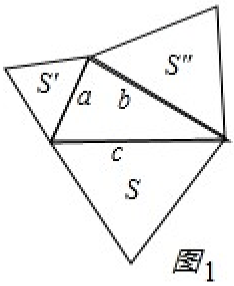
（3）当扇形 CEF 绕点 C 旋转至图③的位置时，线段 MN、AM、BN 之间的数量关系是________________．（不要求证明）

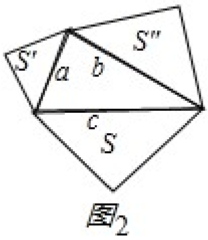


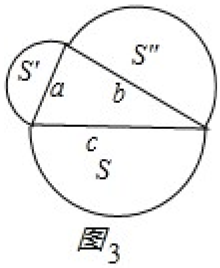
①　　　　　　②　　　　　　③

专题二 勾股定理的证明

4．在教材中，我们通过数格子的方法发现了直角三角形的三边关系，利用四个完全相同的直角三角形拼图的方式验证了勾股定理的正确性．







问题1：以直角三角形的三边为边向外作等边三角形，探究S′+ S″与S的关系（如图1）．

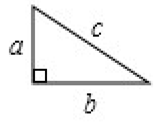
问题2：以直角三角形的三边为斜边向外作等腰直角三角形，探究S′+S″与S的关系（如图2）．

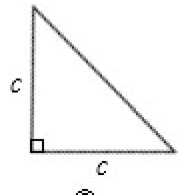
问题3：以直角三角形的三边为直径向外作半圆，探究S′+ S″与S的关系（如图3）．

5. 如图，是用硬纸板做成的两种直角三角形各有若干个，图① 中两直角边长分别为a和b，斜边长为c；图②中两直角边长为c．请你动脑，将它们拼成能够证明勾股定理的图形．

（1）请你画出一种图形，并验证勾股定理．

（2）你非常聪明，能再拼出另外一种能证明勾股定理的图形吗？请画出拼后的图形（无需证明）．





答案：

1．A 【解析】设 $CN=x$ cm，则 $DN=$（$8-x$）cm. 由折叠的性质知 $EN=DN=$（$8-x$）cm，而 $EC=\frac{1}{2}BC=4$ cm，在 Rt△ECN 中，由勾股定理可知 $EN^2=EC^2+CN^2$，即（$8-x$）$^2=16+x^2$，

整理得 $16x=48$，所以 $x=3$．故选 A．

2．**解**：∵ $DF=\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2}DG$，∴∠$DGF$=30°．∵∠$EKG$+∠$KGE$=90°，∠$KGE$+∠$DGF$=90°，∴∠$EKG$=∠$DGF$=30°．∵2∠$DKG$+∠$GKE$=180°，∴∠$DKG$=75°．

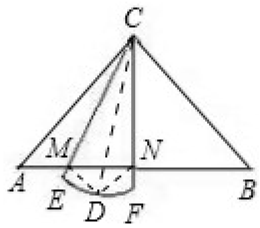
3．**解**：（1）根据折叠的性质知：

△CAM≌△CPM，△CNB≌△CNP．∴$AM=PM$，∠A=∠CPM，$PN=NB$，∠B=∠CPN.

∴∠MPN=∠A+∠B=90°，$PM=PN=AM=BN$.

故△PMN 是等腰直角三角形，$AM^2+BN^2=MN^2$（或 $AM=BN=\frac{\sqrt{2}}{2}MN$）．

（2）$AM^2+BN^2=MN^2$.



证明:如图,将△ACM 沿 CM 折叠，得△DCM，连 DN，则

△ACM≌△DCM，∴$CD=CA$，$DM=AM$，∠DCM=∠ACM.

同理可知∠DCN=∠BCN，△DCN≌△BCN，$DN=BN$，

而∠MDC=∠A=45°，∠CDN=∠B=45°，∴∠MDN=90°，

∴$DM^2+DN^2=MN^2$，故 $AM^2+BN^2=MN^2$．

（3）$AM^2+BN^2=MN^2$；解法同（2）．

4．**解**：探究 1：由等边三角形的性质知：$S'=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$，$S''=\frac{\sqrt{3}}{4}b^2$，$S=\frac{\sqrt{3}}{4}c^2$，

则 $S'+S''=\frac{\sqrt{3}}{4}$（$a^2+b^2$）.因为 $a^2+b^2=c^2$，所以 $S'+S''=S$．

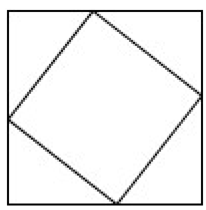
探究 2：由等腰直角三角形的性质知：$S'=\frac{1}{4}a^2$，$S''=\frac{1}{4}b^2$，$S=\frac{1}{4}c^2$．

则 $S'+S''=\frac{1}{4}$（a^2+b^2）.因为 $a^2+b^2=c^2$，所以 $S'+S''=S$．

探究 3：由圆的面积计算公式知：$S'=\frac{1}{8}\pi a^2$，$S''=\frac{1}{8}\pi b^2$，$S=\frac{1}{8}\pi c^2$．

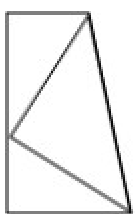
则 $S'+S''=\frac{1}{8}\pi$（a^2+b^2），因为 $a^2+b^2=c^2$，所以 $S'+S''=S$．

5．**解**：（1）如图所示，



根据正方形的面积可得（a+b）$^2=4\times\frac{1}{2}ab+c^2$，

即 $a^2+b^2=c^2$．



（2）如图所示．

1.2 一定是直角三角形吗

专题 判断三角形形状

1. 已知 a，b，c 为△ABC 的三边，且满足 $a^2c^2-b^2c^2=a^4-b^4$，则它的形状为（　　）

A．直角三角形

B．等腰三角形

C．等腰直角三角形

D．等腰三角形或直角三角形

2. 在△ABC 中，$a=m^2+n^2$，$b=m^2-n^2$，$c=2mn$，且 $m>n>0$，

（1）你能判断△ABC 的最长边吗？请说明理由；

（2）△ABC 是什么三角形，请通过计算的方法说明．

3. 张老师在一次“探究性学习”课中，设计了如下数表：

n	2	3	4	5	…
a	2^2-1	3^2-1	4^2-1	5^2-1	…
b	4	6	8	10	…
c	2^2+1	3^2+1	4^2+1	5^2+1	…

（1） 请你分别观察 a、b、c 与 n 之间的关系，并用含自然数 n （n＞1）的代数式表示 a，b，c．

（2）猜想：以 a、b、c 为边的三角形是否为直角三角形？请证明你的猜想．

答案：

1．D 【解析】∵$a^2c^2-b^2c^2=a^4-b^4$，

∴（$a^2c^2-b^2c^2$）-（a^4-b^4）=0，

∴c^2（a+b）（a-b）-（a+b）（a-b）（a^2+b^2）=0，

∴（a+b）（a-b）（$c^2-a^2-b^2$）=0，

∵$a+b\neq0$，

∴a-b=0 或 $c^2-a^2-b^2=0$，所以 a=b 或 $c^2=a^2+b^2$，

即它是等腰三角形或直角三角形．

故选 D．

2．**解：**（1）a 是最长边，其理由是：

∵a-b=（m^2+n^2）-（m^2-n^2）=$2n^2>0$，

a-c=（m^2+n^2）-2mn=$(m-n)^2>0$，

∴a＞b，a＞c，

∴a 是最长边.

（2）△ABC 是直角三角形，其理由是：

∵$b^2+c^2=(m^2-n^2)^2+(2mn)^2=(m^2+n^2)^2=a^2$，

∴△ABC 是直角三角形．

3．**解：**（1）由图表可以得出：

∵n=2 时，$a=2^2-1$，b=2×2，$c=2^2+1$；

n=3 时，$a=3^2-1$，b=2×3，$c=3^2+1$；

n=4 时，$a=4^2-1$，b=2×4，$c=4^2+1$.

∴$a=n^2-1$，b=2n，$c=n^2+1$．

（2）以 a、b、c 为边的三角形是直角三角形.

∵$a^2+b^2=(n^2-1)^2+4n^2=n^4+2n^2+1$，

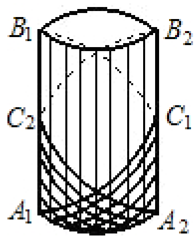
$c^2=(n^2+1)^2=n^4+2n^2+1$，

∴$a^2+b^2=c^2$，

∴以 a、b、c 为边的三角形是直角三角形．

1.3 勾股定理的应用

专题 最短路径的探究



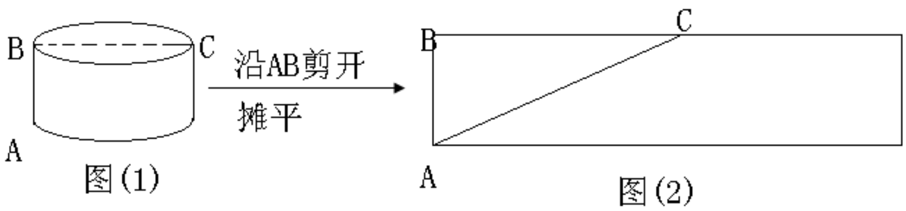
1. 编制一个底面周长为 a、高为 b 的圆柱形花柱架，需用沿圆柱表面绕织一周的竹条若干根，如图中的 $A_1C_1B_1$，$A_2C_2B_2$，…，则每一根这样的竹条的长度最少是______________.

2. 请阅读下列材料：

问题：如图（1），一圆柱的底面半径和高均为 5dm，BC 是底面直径，求一只蚂蚁从 A 点出发沿圆柱表面爬行到点 C 的最短路线.

小明设计了两条路线：

路线 1：侧面展开图中的线段 AC.如下图（2）所示：



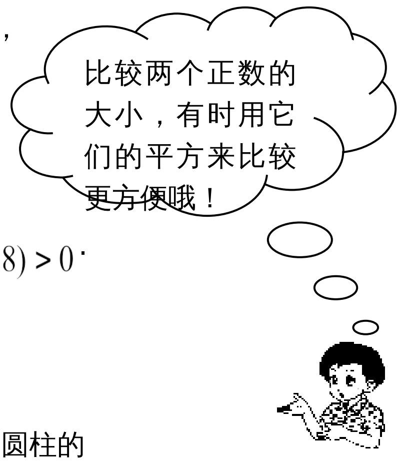
图(1)　　　　图(2)

设路线 1 的长度为 l_1，则 $l_1^2=AC^2=AB^2+BC^2=5^2+(5\pi)^2=25+25\pi^2$；

路线 2：高线 AB ＋ 底面直径 BC，如上图（1）所示，

设路线 2 的长度为 l_2，

则 $l_2^2=(AB+BC)^2=(5+10)^2=225$.



∵ $l_1^2-l_2^2=25+25\pi^2-225=25\pi^2-200=25(\pi^2-8)>0$.

$\therefore l_1^2>l_2^2$　$\therefore l_1>l_2$

所以要选择路线 2 较短。

（1）小明对上述结论有些疑惑，于是他把条件改成："圆柱的底面半径为 1dm，高 AB 为 5dm"继续按前面的方式进行计算.

请你帮小明完成下面的计算：

路线 1：$l_1^2=AC^2=$____________________；

路线 2：$l_2^{\ 2}=(AB+BC)^2=$__________，

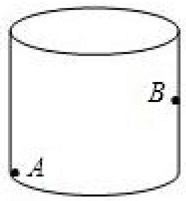
∵$l_1^{\ 2}$ ______ $l_2^{\ 2}$，∴ l_1 ______ l_2 (填>或<).

所以应选择路线____________(填 1 或 2)较短.

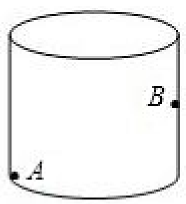
(2)请你帮小明继续研究:在一般情况下,当圆柱的底面半径为 r,高为 h 时，应如何选择上面的两条路线才能使蚂蚁从点 A 出发沿圆柱表面爬行到 C 点的路线最短.

3. 探究活动:有一圆柱形食品盒，它的高等于 8cm，底面直径为$\frac{18}{\pi}$cm，蚂蚁爬行的速度为 2cm/s.

（1）如果在盒内下底面的 A 处有一只蚂蚁，它想吃到盒内对面中部点 B 处的食物，那么它至少需要多少时间？（盒的厚度和蚂蚁的大小忽略不计，结果可含根号）



（2）如果在盒外下底面的 A 处有一只蚂蚁，它想吃到盒内对面中部点 B 处的食物，那么它至少需要多少时间？（盒的厚度和蚂蚁的大小忽略不计）



答案：

1. $\sqrt{a^2+b^2}$ 【解析】 底面周长为 a、高为 b 的圆柱的侧面展开图为矩形,它的边长分别为 a,b，所以对角线长为 $\sqrt{a^2+b^2}$ ，所以每一根这样的竹条的长度最少是 $\sqrt{a^2+b^2}$.

2.**解：**（1）25+π^2 49 ＜ ＜ 1

（2）$l_1^2=AC^2=AB^2+BC^2=h^2+(\pi r)^2$，

$l_2^2=(AB+BC)^2=(h+2r)^2$，

$l_1^2-l_2^2=h^2+(\pi r)^2-(h+2r)^2=r(\pi^2 r-4r-4h)=r[(\pi^2-4)r-4h]$.

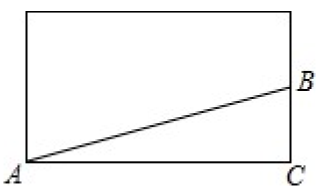
r 恒大于 0，只需看后面的式子即可．

当 $r=\dfrac{4h}{\pi^2-4}$ 时，$l_1^2=l_2^2$；

当 $r>\dfrac{4h}{\pi^2-4}$ 时，$l_1^2>l_2^2$；

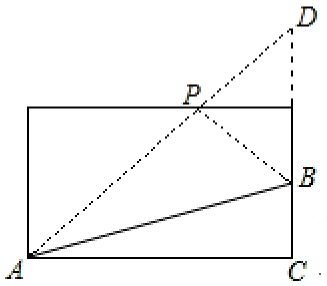
当 $r<\dfrac{4h}{\pi^2-4}$ 时，$l_1^2<l_2^2$．

3.**解：**（1）如图，$AC=\pi\cdot\dfrac{18}{\pi}\div 2=9$cm，BC=4cm，则蚂蚁走过的最短路径为：$AB=\sqrt{9^2+4^2}=\sqrt{97}$ cm，所以 $\sqrt{97}\div 2=\dfrac{\sqrt{97}}{2}$（s），即至少需要 $\dfrac{\sqrt{97}}{2}$ s．



（2）如图，作 B 关于 EF 的对称点 D，连接 AD，交 EF 于点 P，连接 BP，则
蚂蚁走的最短路程是 AP+PB=AD，由图可知，AC=9cm，CD=8+4=12（cm）．
所以 $AD=\sqrt{9^2+12^2}=15$（cm），15÷2=7.5（s）

即至少需要 7.5s．


D
P
B
A
C