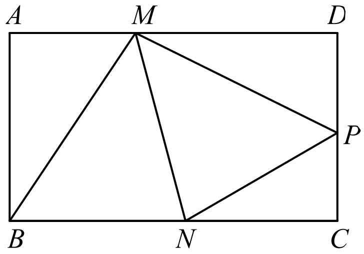
几何综合题

1．已知：如图，矩形纸片 $ABCD$ 的边 $AD=3$，$CD=2$，点 P 是边 CD 上的一个动点（不与点 C 重合，把这张矩形纸片折叠，使点 B 落在点 P 的位置上，折痕交边 AD 与点 M，折痕交边 BC 于点 N.

（1）写出图中的全等三角形. 设 $CP=x$，$AM=y$，写出 y 与 x 的函数关系式；

（2）试判断 $\angle BMP$ 是否可能等于 90°. 如果可能，请求出此时 CP 的长；如果不可能，请说明理由.



（第27题图）

2、已知边长为 1 的正方形 $ABCD$ 中，P 是对角线 AC 上的一个动点（与点 A、C 不重合），过点 P 作 $PE\perp PB$，PE 交射线 DC 于点 E，过点 E 作 $EF\perp AC$，垂足为点 F.

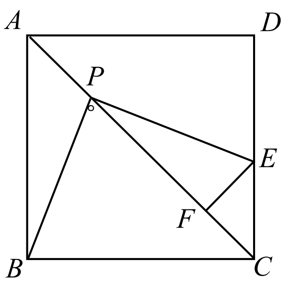
（1）当点 E 落在线段 CD 上时（如图 10），

① 求证：$PB=PE$；

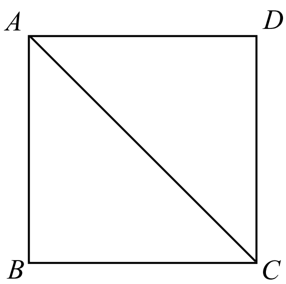
② 在点 P 的运动过程中，PF 的长度是否发生变化？若不变，试求出这个不变的值，若变化，试说明理由；

（2）当点 E 落在线段 DC 的延长线上时，在备用图上画出符合要求的大致图形，并判断上述（1）中的结论是否仍然成立（只需写出结论，不需要证明）；

（3）在点 P 的运动过程中，$\triangle PEC$ 能否为等腰三角形？如果能，试求出 AP 的长，如果不能，试说明理由．



（图1）



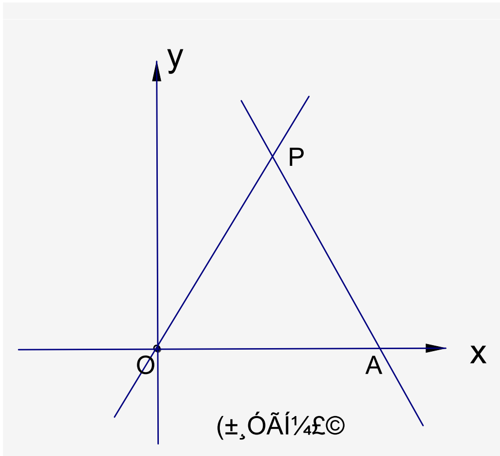
（备用图）

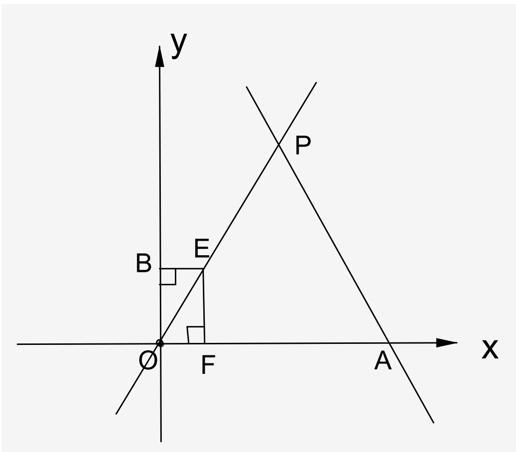
3、如图，直线 $y=-\sqrt{3}x+4\sqrt{3}$ 与 x 轴相交于点 A，与直线 $y=\sqrt{3}x$ 相交于点 P.

(1) 求点 P 的坐标.

(2) 请判断△ OPA 的形状并说明理由.

(3) 动点 E 从原点 O 出发，以每秒 1 个单位的速度沿着 $O\rightarrow P\rightarrow A$ 的路线向点 A 匀速运动（E 不与点 O、A 重合），过点 E 分别作 $EF\perp x$ 轴于 F，$EB\perp y$ 轴于 B.设运动 t 秒时，矩形 $EBOF$ 与△ OPA 重叠部分的面积为 S.求 S 与 t 之间的函数关系式.





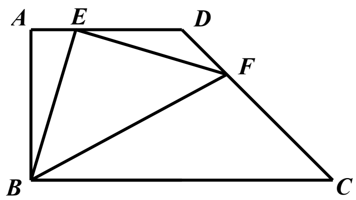
4．已知：如图，梯形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，$\angle A=90^{\circ}$，$\angle C=45^{\circ}$，$AB=AD=4$．E 是直线 AD 上一点，联结 BE，过点 E 作 $EF\perp BE$ 交直线 CD 于点 F．联结 BF．

（1）若点 E 是线段 AD 上一点（与点 A、D 不重合），（如图 1 所示）

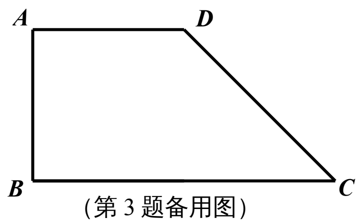
①求证：$BE=EF$．

②设$DE=x$，△BEF的面积为y，求y关于x的函数解析式，并写出此函数的定义域．

（2）直线AD上是否存在一点E，使△BEF是△ABE面积的3倍，若存在，直接写出DE的长，若不存在，请说明理由．



（第3题图1）



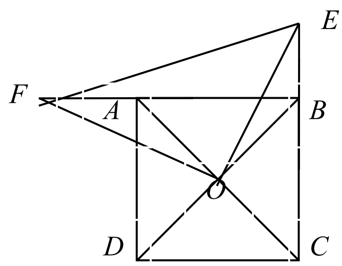
（第3题备用图）

5．已知：O为正方形$ABCD$对角线的交点，点E在边CB的延长线上，联结EO，$OF\perp OE$交BA延长线于点F，联结EF（如图4）。

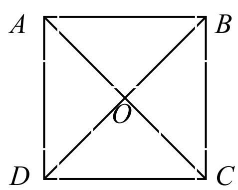
（1） 求证：$EO=FO$；

（2） 若正方形的边长为2，$OE=2OA$，求BE的长；

（3） 当$OE=2OA$时，将△FOE绕点O逆时针旋转到△F_1OE_1，使得$\angle BOE_1=30^\circ$时，试猜想并证明△AOE_1是什么三角形。



（图4）



（备用图）

6．（本题满分10分，第（1）小题3分，第（2）小题4分，第（3）小题3分）

如图，在正方形$ABCD$中，点E、F分别在BC、AD的延长线上，且$EA\perp CF$，垂足为

H，

AE与CD相交于点G．

（1）求证：$AG=CF$；

（2）当点G为CD的中点时（如图1），求证：$FC=FE$；

（3）如果正方形$ABCD$的边长为2，当$EF=EC$时（如图2），求DG的长．

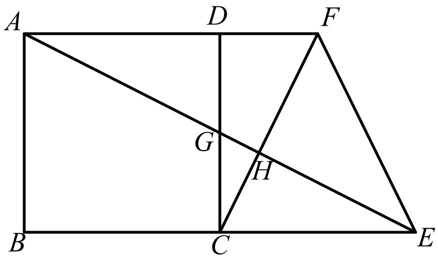


图1

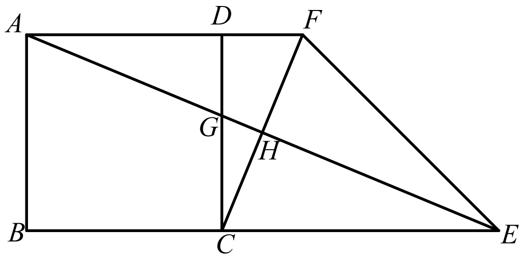


图2

几何综合题答案

1．（1）$\triangle MBN \cong \triangle MPN$ ……………………………1

∵$\triangle MBN \cong \triangle MPN$

∴MB=MP,

∴ $MB^2 = MP^2$

∵矩形ABCD

∴AD=CD（矩形的对边相等）

∴∠A=∠D=90°(矩形四个内角都是直角) ……………………………1

∵AD=3, CD=2, CP=x, AM=y

∴DP=2-x, MD=3-y ……………………………1

Rt△ABM中，

$MB^2 = AM^2 + AB^2 = y^2 + 4$

同理 $MP^2 = MD^2 + PD^2 = (3-y)^2 + (2-x)^2$ ……………………………1

$y^2 + 4 = (3-y)^2 + (2-x)^2$ ……………………………1

∴ $y = \dfrac{x^2 - 4x + 9}{6}$ ……………………………1

（3）$\angle BMP = 90^\circ$ ……………………………1

当$\angle BMP = 90^\circ$时，

可证$\Delta ABM \cong \Delta DMP$ ……………………………1

∴ AM=CP，AB=DM

∴ $2 = 3 - y, y = 1$ ……………………………1

∴ $1 = 2 - x, x = 1$ ……………………………1

∴当CM=1时，$\angle BMP = 90^\circ$

2．（1）① 证：过 P 作 $MN\perp AB$，交 AB 于点 M，交 CD 于点 N

∵正方形 ABCD，∴ $PM=AM$，$MN=AB$ ，

从而 $MB=PN$ ………………………………（2 分）

∴ $\triangle PMB\cong\triangle PNE$，从而 $PB=PE$ …………（2 分）

② 解：PF 的长度不会发生变化，

设 O 为 AC 中点，联结 PO，

∵正方形 ABCD，∴ $BO\perp AC$，…………（1 分）

从而 $\angle PBO=\angle EPF$，……………………（1 分）

∴ $\triangle POB\cong\triangle PEF$， 从而 $PF=BO=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ …………（2 分）

（2）图略，上述（1）中的结论仍然成立；…………（1 分）（1 分）

（3）当点 E 落在线段 CD 上时，$\angle PEC$ 是钝角，

从而要使 $\triangle PEC$ 为等腰三角形，只能 $EP=EC$，…………（1 分）

这时，$PF=FC$，∴ $PC=AC=\sqrt{2}$，点 P 与点 A 重合，与已知不符。……（1 分）

当点 E 落在线段 DC 的延长线上时，$\angle PCE$ 是钝角，

从而要使 $\triangle PEC$ 为等腰三角形，只能 $CP=CE$，…………（1 分）

设 $AP=x$，则 $PC=\sqrt{2}-x$，$CF=PF-PC=x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

又 $CE=\sqrt{2}CF$，∴ $\sqrt{2}-x=\sqrt{2}(x-\dfrac{\sqrt{2}}{2})$，解得 $x=1$. …………（1 分）

综上，$AP=1$ 时，$\triangle PEC$ 为等腰三角形

3.解：（1）$\begin{cases} y=\sqrt{3}x+4\sqrt{3} \\ y=\sqrt{3}x \end{cases}$ 解得：$\begin{cases} x=2 \\ y=2\sqrt{3} \end{cases}$ ………………………1′

∴点 P 的坐标为（2，$2\sqrt{3}$） ………………………1′

（2）当 $y=0$ 时，$x=4$ ∴点 A 的坐标为（4，0） ………………………1′

∵ $OP=\sqrt{2^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2}=4$ $PA=\sqrt{(2-4)^2+(2\sqrt{3}-0)^2}=4$ ……………1′

∴ $OA=OP=PA$

∴ $\triangle POA$ 是等边三角形 ………………………1′

（3）当 $0<t\le 4$ 时， ………………………1′

$$S=\frac{1}{2}\cdot OF\cdot EF=\frac{\sqrt{3}}{8}t^2$$ ………………………1′

当 $4<t<8$ 时， ………………………1′

$S=-\frac{3\sqrt{3}}{8}t^2+4\sqrt{3}t-8\sqrt{3}$ ……………………1′

4．(1) ①

证明：在 AB 上截取 $AG=AE$，联结 EG．

$\therefore \angle AGE=\angle AEG$．

又$\because \angle A=90°$，$\angle A+\angle AGE+\angle AEG=180°$.

$\therefore \angle AGE=45°$.

$\therefore \angle BGE=135°$.

$\because AD \parallel BC$．

$\therefore \angle C+\angle D=180°$.

又$\because \angle C=45°$.

$\therefore \angle D=135°$.

$\therefore \angle BGE=\angle D$. ……………………………………………………………1 分

$\because AB=AD$，$AG=AE$．

$\therefore BG=DE$．………………………………………………………………1 分

$\because EF\perp BE$．

$\therefore \angle BEF=90°$.

又$\because \angle A+\angle ABE+\angle AEB=180°$，

$\angle AEB+\angle BEF+\angle DEF=180°$，

$\angle A=90°$.

$\therefore \angle ABE=\angle DEF$. ……………………………………………………………1 分

$\therefore \triangle BGE \cong \triangle EDF$. ……………………………………………………………1 分

$\therefore BE=EF$．

(1) ②

y 关于 x 的函数解析式为：$y=\frac{x^2-8x+32}{2}$ ………………………………1 分

此函数的定义域为：$0<x<4$ …………………………………………………1 分

(2) 存在…………………………………………………………………………1 分

Ⅰ当点 E 在线段 AD 上时，$DE=-2\pm2\sqrt{5}$（负值舍去）．………………1 分

Ⅱ当点 E 在线段 AD 延长线上时，$DE=2\pm2\sqrt{5}$（负值舍去）．………………1 分

Ⅲ当点 E 在线段 DA 延长线上时，$DE=10\pm2\sqrt{5}$．………………………………1 分

$\therefore DE$ 的长为 $2\sqrt{5}-2$、$2\sqrt{5}+2$ 或 $10\pm2\sqrt{5}$．

5、(1) 证明：∵ABCD 是正方形，对角线交于点 O，

∴AO=BO，AC⊥BD，--1 分

∴ ∠OAB=∠OBA,∴∠OAF=∠OBE，--------------------------------------1 分

∵AC⊥BD，$OF\perp OE$，∴∠AOF=$90°-\angle AOE$=∠BOE，------------1 分

∴△AOF≌△BOE，

∴EO=FO.--1 分

（2）解：∵ABCD 是正方形，边长为 2，∴AO= $\sqrt{2}$,∴OE=2OA= $2\sqrt{2}$

∵$OF\perp OE$，EO=FO，∴EF=4，---1 分

∵△AOF≌△BOE，∴AF=BE，---1 分

设 AF=BE=x， 在 Rt△EFB 中，[illegible],即[illegible]

解得 $x=-1\pm\sqrt{7}$，∵x＞0，∴$x=\sqrt{7}-1$，即 BE= $\sqrt{7}-1$ ---------------2 分

（3）△AOE_1 是直角三角形。--1 分

证明：取 OE 中点 M，则 OM=EM= $\frac{1}{2}OE$,---1 分

∵$OE=2OA$，∴OA= $\frac{1}{2}OE$ ，∴OA=OM

∵∠EOB= $30°$,∵AC⊥BD，∴∠AOE= $60°$,∴△OAM 是等边三角形，----------1 分

∴AM=OM=EM，∴∠MAE=∠MEA,∴∠MAO=∠MOA，

∵∠MAE+∠MEA+∠MAO+∠MOA= $180°$ ，∴2∠MEA+2∠MOA= $180°$ ，

∴∠MEA+∠MOA= $90°$ ，---1 分

即△AOE_1 为直角三角形。

6．（1）证明：∵在正方形 $ABCD$ 中，$AD=CD$，$\angle ADC=\angle CDF=90°$，

∵$AE\perp CF$，∴$\angle AGD=90°-\angle GAD=\angle CFD$，……………………… （1 分）

∴$\triangle ADG\cong\triangle CDF$，…………………………………………………… （1 分）

∴$AG=CF$．…………………………………………………………………… （1 分）

（2）证明：过点 F 作 $FM\perp CE$，垂足为 M，…………………………………… （1 分）

∵$\angle ECG=\angle ADG=90°$，$\angle CGE=\angle DGA$，$CG=DG$，∴$\triangle ECG\cong\triangle ACD$，…（1 分）

∴$CE=AD=CD$．∵$FM//CD$，∴$CM=DF=DG=\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2}CE$，………（1 分）

∴$FC=FE$．…………………………………………………………………… （1 分）

（3）解：联结 GF，∵$EF=EC,EH\perp CF,GF=CG$．…………………………………（1 分）

设 $DF=DG=x$ ，则 $GF=CG=2-x$ ，

∵ $DF^2+DG^2=FG^2$，∴ $x^2+x^2=(2-x)^2$，…………………………（1 分）

$\therefore x=-2\pm 2\sqrt{2}$（负值舍去），$\therefore DF=2\sqrt{2}-2$．…………………………（1分）