

暑假专题——分式方程及其应用

知识要点：

1. 分式方程：分母中含有未知数的方程叫做分式方程。

2. 分式方程的解：

使分式方程的最简公分母不为零的根是分式方程的根，使最简公分母等于零的根是原方程的增根，原方程无解。

3. 解分式方程的步骤：

(1) 去分母

(2) 去括号

(3) 移项

(4) 合并同类项

(5) 系数化为1

(6) 检验

4. 分式方程的应用——列分式方程解应用题

步骤：

(1) 审题；

(2) 设未知数

(3) 找相等关系列分式方程

(4) 解分式方程

(5) 验根

(6) 写答案

【典型例题】

例1. 填空题：

(1) 下列方程中是分式方程的是_____ (填序号)

① $\frac{ax+b}{2}=5$

② $\frac{1}{4}(x+3)+2=\frac{x+4}{3}$

③ $\frac{m+x}{a}+1=\frac{m \cdot x}{a}$

④ $\frac{2x}{2x-1}+1=\frac{2}{x}$

⑤ $1+\frac{1}{x}=2-\frac{2}{x}$

答案：③④⑤

(2) 如果方程 $\frac{2}{a(x-1)}=3$ 的解是 $x=5$ ，则 $a=_____$ 。

答案： $\frac{1}{6}$

解(一)：方程去分母得： $2=3a(x-1)$

$$2=3ax-3a$$

$$3ax=2+3a$$

$$x=\frac{2+3a}{3a}$$

把 $x=5$ 代入得： $\frac{2+3a}{3a}=5$

$$2 + 3a = 15a$$

$$12a = 2$$

$$a = \frac{1}{6}$$

解 (二) : $\frac{2}{4a} = 3$

$$2 = 12a$$

$$a = \frac{1}{6}$$

(3) 分式方程 $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x^2-1}$ 去分母时, 方程两边都乘以 _____.

答案 : $(x+1)(x-1)$

(4) 如果 $\frac{x-4}{x-5}$ 与 $\frac{4-2x}{x-4}$ 互为倒数, 则 $x =$ _____, 如果 $\frac{3}{x-1}$ 与 $\frac{4}{x}$ 互为相反数, 那么 x 的值是 _____.

答案 : $3; \frac{4}{7}$

解 : ① $\frac{x-4}{x-5} \cdot \frac{4-2x}{x-4} = 1$

$$\therefore \frac{4-2x}{x-5} = 1$$

去分母得: $4 - 2x = x - 5$

$$-3x = -9$$

$$x = 3$$

② $\frac{3}{x-1} + \frac{4}{x} = 0$

去分母得: $3x + 4(x-1) = 0$

$$3x + 4x - 4 = 0$$

$$7x = 4$$

$$x = \frac{4}{7}$$

检验: $x = 3$ 与 $x = \frac{4}{7}$ 是所列方程的根。

(5) 学校包车到企业参观生产线, 按原定人数估计共需车费 400 元, 后因部分学生另有任务, 少去 20 人, 如果设原定人数为 x 人, 那么原来每人平均车费 _____ 元, 减少 20 人后, 每人平均车费 _____ 元。

答案 : $\frac{400}{x}; \frac{400}{x-20}$

(6) 某商场降价销售一批服装, 打 8 折后的售价是 120 元, 则这种服装原来的售价是 _____ 元。

答案 : 150

解 : 设原来售价 x 元

$$80\%x = 120$$

$$x = 150$$

(7) 分式 $\frac{a+b}{a-1}$ 的值是零，实数 a 、 b 应满足的条件是 _____.

答案： $a + b = 0$ 且 $a \neq 1$

(8) 甲的速度是 a km/h，乙的速度是 b km/h，甲从 A 地到 B 地需要 t 小时，那么乙从 A 到 B 需要 _____ 小时。

答案： $\frac{at}{b}$

例 2. 选择题：

(1) 解方程： $\frac{1}{x-2} = \frac{1-x}{2-x} - 3$ ，去分母得 ()

A. $1 = 1 - x - 3(x - 2)$

B. $1 = x - 1 - 3(2 - x)$

C. $1 = x - 1 - 3(x - 2)$

D. $-1 = 1 - x - 3(x - 2)$

答案： C

解： $\frac{1}{x-2} = \frac{1-x}{2-x} - 3$

$$\frac{1}{x-2} = \frac{x-1}{x-2} - 3$$

去分母，方程两边同乘以 $x - 2$ 得：

$$1 = x - 1 - 3(x - 2)$$

\therefore 选 C

(2) 分式方程 $\frac{x+1}{x-2} = \frac{x-1}{x+2}$ 的解是 ()

A. 2 B. -2 C. 1 D. 0

答案： D

解： $\frac{x+1}{x-2} = \frac{x-1}{x+2}$

方程两边同乘以 $(x+2)(x-2)$ ，得：

$$(x+1)(x+2) = (x-1)(x-2)$$

$$x^2 + 3x + 2 = x^2 - 3x + 2$$

$$6x = 0$$

$$x = 0$$

检验：把 $x = 0$ 代入 $(x+2)(x-2) \neq 0$ ， $\therefore x = 0$ 是原方程的解。

(3) 如果 $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ ($R_1 + R_2 \neq 0$)，则 $R =$ ()

A. $\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}$

B. $R_1 + R_2$

C. $\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

D. $R_1 R_2$

答案：C

解： $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

两边同乘以 RR_1R_2 得： $R_1R_2 = RR_2 + RR_1$
 $(R_1 + R_2)R = R_1R_2$

$\because R_1 + R_2 \neq 0, \therefore R = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}$

\therefore 选C

(4) x为何值时，分式 $\frac{2x}{(1-x)^2}$ 有意义 ()

A. $x > 1$ B. $x < 1$ C. $x \neq 1$ D. $x \neq 0$

答案：C

解： $(1-x)^2 \neq 0$

$1-x \neq 0$

$x \neq 1$

(5) 若 $x - \frac{1}{x} = 3$ ，则 $x^2 + \frac{1}{x^2}$ 的值为 ()

A. 3 B. 11 C. 9 D. 7

答案：B

解： $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 = 9 + 2 = 11$

(6) 在有理式： $-\frac{1}{2}x$ ； $\frac{1}{x}$ ； $\frac{3}{x} + \frac{2}{y}$ ； $7 - \frac{1}{m}$ ； $2x^2 - \frac{1}{3}y^2$ ； $\frac{1}{x-3}$ ； $(y+2)^2$

中，分式有 ()

A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

答案：D

例3. 解答题：

(1) 解下列方程。

① $\frac{2}{x+3} + \frac{3}{2} = \frac{7}{2x+6}$

解： $\frac{2}{x+3} + \frac{3}{2} = \frac{7}{2(x+3)}$

去分母得： $4 + 3(x+3) = 7$

$3x = -6$

$x = -2$

检验：把 $x = -2$ 代入 $2(x+3) \neq 0$ ， $\therefore x = -2$ 是原方程的解。

② $\frac{2x}{2x-1} + \frac{x}{x-2} = 2$

解：去分母得：

$2x(x-2) + x(2x-1) = 2(2x-1)(x-2)$

$$2x^2 - 4x + 2x^2 - x = 4x^2 - 10x + 4$$

$$5x = 4$$

$$x = \frac{4}{5}$$

检验：把 $x = \frac{4}{5}$ 代入 $(2x - 1)(x - 2) \neq 0$ ， $\therefore x = \frac{4}{5}$ 是原方程的解。

(2) 关于 x 的分式方程 $\frac{6}{x-1} = \frac{x+3}{x(x-1)} - \frac{K}{x}$ 有解，求 K 的取值范围。

解：去分母得： $6x = x + 3 - K(x - 1)$

$$6x - x + Kx = 3 + K$$

$$(5 + K)x = 3 + K$$

$$\therefore x = \frac{3 + K}{5 + K}$$

\therefore 方程有解，且不为增根

$$\therefore 5 + K \neq 0$$

$$K \neq -5$$

$$x \neq 0, \text{ 即 } 3 + K \neq 0, K \neq -3$$

$$x \neq 1, \text{ 即 } 3 + K \neq 5 + K \text{ 永远成立}$$

$$\therefore k \neq -5 \text{ 且 } k \neq -3$$

(3) 列方程解应用题。

① A、B 两地的距离是 80 千米，一辆公共汽车从 A 地驶出 3 小时后，一辆小汽车也从 A 地出发，它的速度是公共汽车的 3 倍，已知小汽车比公共汽车迟 20 分钟到达 B 地，求两车的速度。

解：设公共汽车速度为 x 千米/时，则小汽车的速度为 $3x$ 千米/时

$$20 \text{ 分钟} = \frac{1}{3} \text{ 小时}$$

$$\frac{80}{x} + \frac{1}{3} = \frac{80}{3x} + 3$$

$$\text{解得：} x = 20$$

$$\therefore 3x = 60$$

经检验： $x = 20$ 是所列方程的根。

答：公共汽车速度为 20 千米/时，小汽车的速度为 60 千米/时。

② 要在规定时间内完成一项工程，甲队单独做正好按期完成，乙队单独做要超期 3 天才完成。现在甲乙合作 2 天，余下的工程由乙单独做，刚好按期完成，问规定时间是多少天？

解：设规定 x 天完成

$$2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3}\right) + (x-2) \cdot \frac{1}{x+3} = 1$$

$$\text{解得：} x = 6$$

经检验： $x = 6$ 是所列方程的根

答：规定时间是 6 天。

③ 一个最简分数的分子与分母的和是 92，若分子、分母都减去 16，这个分数的值是 $\frac{1}{3}$ ，求这个分数。

解：设分子为 x ，则分母为 $92 - x$

$$\frac{x - 16}{92 - x - 16} = \frac{1}{3}$$

解得： $x = 31$

$$92 - x = 61$$

经检验： $x = 31$ 是所列方程的根。

答：这个分数是 $\frac{31}{61}$ 。

【模拟试题】（答题时间：45 分钟）

一. 填空题（每题 4 分，共 20 分）

1. 方程 $\frac{2}{x} = \frac{3}{x+4}$ 的解为_____。

2. 要使 $\frac{x+3}{x-1}$ 与 $\frac{x+1}{x}$ 的值相等，那么 $x =$ _____。

3. 若分式 $\frac{3-x}{2x+1}$ 的值为 2，则 $x =$ _____。

4. 若方程 $\frac{x}{x-5} = 4 - \frac{m}{5-x}$ 有增根 $x = 5$ ，则 $m =$ _____。

5. 写出一个关于 x 的分式方程，使它的根为 $x = -2$ ，则分式方程是_____。

二. 选择题（每题 4 分，共 24 分）

6. 下列方程中，不是分式方程的是（ ）

A. $\frac{1}{x} = 0$

B. $\frac{x}{x-1} = 2$

C. $\frac{x}{2} - \frac{1}{3} = x$

D. $\frac{1}{x+3} - x = 1$

7. 方程 $\frac{2x+1}{x-2} = 0$ 的根是（ ）

A. 2

B. -2

C. $\frac{1}{2}$

D. $-\frac{1}{2}$

8. 下列方程中，增根为 $x = -1$ 的方程是（ ）

A. $\frac{1}{x+1} = 0$

B. $\frac{2}{x+1} = 1$

C. $\frac{1}{x+1} = \frac{2}{x}$

D. $\frac{2}{x+1} - \frac{2}{x} = \frac{3}{x^2+x}$

9. 方程 $\frac{x+3}{a-x} = \frac{2}{x}$ 的根为 $x = 1$ ，那么 a 的值是（ ）

A. 1

B. 2

C. 3

D. 0

10. 某学校食堂有煤 a t，原计划每天用煤 x t，实际每天用煤量是原计划的 2 倍，这样食堂的煤比原计划少用了 4 天，则可列出关于 x 的方程为（ ）

A. $\frac{a}{x} - \frac{a}{2x} = 4$

B. $\frac{a}{2x} - \frac{a}{x} = 4$

C. $\frac{a}{x} + \frac{a}{2x} = 4$ D. $\frac{2a}{x} + \frac{a}{x} = 4$

11. 南京到上海铁路长 300 km，为了适应两市经济的发展，客车的速度比原来每小时增加了 40 km，因此从南京到上海的时间缩短了一半，设客车原来的速度是 x km/h，则根据题意列出的方程是 ()

A. $\frac{300}{x-40} = \frac{1}{2} \cdot \frac{300}{x}$ B. $\frac{300}{x-40} = 2 \cdot \frac{300}{x}$
 C. $\frac{300}{x+40} = \frac{1}{2} \cdot \frac{300}{x}$ D. $\frac{300}{x+40} = 2 \cdot \frac{300}{x}$

三. 解答题 (第 12~15 题每题 9 分，每 16、17 题每题 10 分，共 56 分)

12. 解方程： $\frac{2}{x-1} = \frac{1}{4-x}$

13. 解方程： $\frac{3}{x-2} = \frac{8-x}{x(x-2)}$

14. 解方程： $\frac{2}{x-2} = \frac{1}{x^2-4}$

15. 小明在超市用 24 元钱买了某种品牌牛奶若干盒，过了一段时间再去该超市，发现这种牛奶正在让利销售，每盒让利 0.4 元，小明购买了和上次数量一样多的牛奶，却只花了 20 元，问：小明第一次购买的牛奶每盒多少元钱？

16. 某校师生去离校 15km 的植物园参观，张老师带领服务组与师生队伍同时出发，服务组的行进速度是师生队伍的 1.2 倍，以便提前半小时到达做好准备，求服务组与师生队伍的行进速度。

17. 某超市规定：凡一次购买大米 180 kg 以上可以按原价打折出售，购买 180 kg 以下 (包括 180 kg) 只能按原价出售。小明家到超市买大米，原计划买的大米，只能按原价付款，需要 500 元；若多买 40kg，则按打折价格付款，也需要 500 元。

(1) 小明家原计划购买大米的数量的范围是多少？

(2) 若按原价购买 4 kg 与打折购买 5 kg 的款相同，那么原计划小明家买多少大米？

【试题答案】

一. 填空题。

1. $x = 8$ 2. $-\frac{1}{3}$ 3. $\frac{1}{5}$

4. 5 5. $1 + \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$ (答案不惟一)

二. 选择题。

6. C 7. D 8. D 9. C 10. A 11. C

三. 解答题。

12. $x = 3$

13. $x = 2$ 为增根，原方程无解

14. $x = -\frac{3}{2}$

15. 设小明第一次购买的牛奶每盒 x 元，则有

$$\frac{24}{x} = \frac{20}{x-0.4}$$

解得： $x = 2.4$

16. 设师生队伍的行进速度为每小时 x km, 则

$$\frac{15}{x} - \frac{15}{1.2x} = \frac{1}{2}$$

解得: $x = 5$

$$\therefore 1.2x = 6$$

17. (1) 大于 140kg 而小于等于 180kg

(2) 160kg