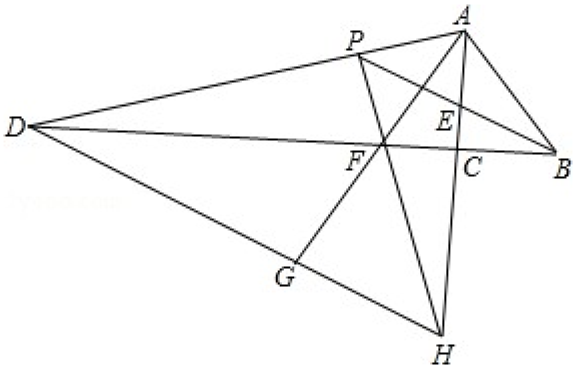
八年级[上]数学期末《全等三角形》《轴对称》复习提优题【大海之音组卷】

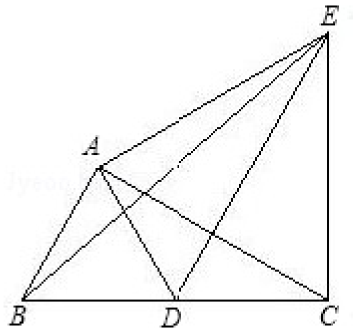
一．选择题（共4小题）

1．如图，Rt△ACB中，∠ACB=90°，∠ABC的角平分线BE和∠BAC的外角平分线AD相交于点P，分别交AC和BC的延长线于E，D．过P作PF⊥AD交AC的延长线于点H，交BC的延长线于点F，连接AF交DH于点G．则下列结论：①∠APB=45°；②PF=PA；③BD﹣AH=AB；④DG=AP+GH．其中正确的是（　　）



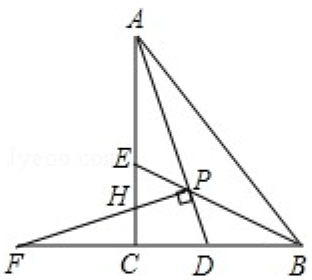
A．①②③　　B．①②④　　C．②③④　　D．①②③④

2．如图，将30°的直角三角尺ABC绕直角顶点A逆时针旋转到ADE的位置，使B点的对应点D落在BC边上，连接EB、EC，则下列结论：①∠DAC=∠DCA；②ED为AC的垂直平分线；③EB平分∠AED；④ED=2AB．其中正确的是（　　）



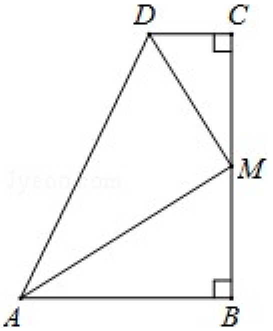
A．①②③　　B．①②④　　C．②③④　　D．①②③④

3．如图，Rt△ACB中，∠ACB=90°，△ABC的角平分线AD、BE相交于点P，过P作PF⊥AD交BC的延长线于点F，交AC于点H，则下列结论：①∠APB=135°；②PF=PA；③AH+BD=AB；④$S_{四边形ABDE}=\frac{3}{2}S_{\triangle ABP}$，其中正确的是（　　）



A．①③　　B．①②④　　C．①②③　　D．②③

4．如图，在四边形ABCD中，∠B=∠C=90°，∠DAB与∠ADC的平分线相交于BC边上的M点，则下列结论：①∠AMD=90°；②M为BC的中点；③AB+CD=AD；④$S_{\triangle ADM}=\frac{1}{2}S_{梯形ABCD}$；⑤M到AD的距离等于BC的一半；其中正确的有（　　）



A．2个　　B．3个　　C．4个　　D．5个

二．解答题（共8小题）

5．如图1，在Rt△ACB中，∠ACB=90°，∠ABC=30°AC=1点D为AC上一动点，连接BD，以BD为边作等边△BDE，EA的延长线交BC的延长线于F，设CD=n，

（1）当n=1时，则AF=__________；

（2）当0＜n＜1时，如图2，在BA上截取BH=AD，连接EH，求证：△AEH为等边三角形．

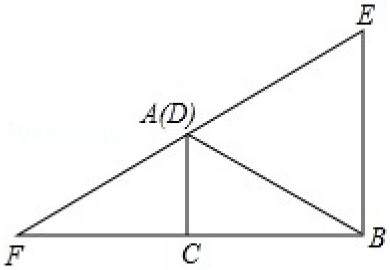


图1

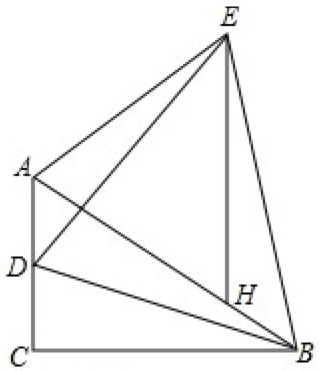


图2

6．两个等腰直角△ABC和等腰直角△DCE如图1摆放，其中D点在AB上，连接BE．

（1）则$\frac{BE}{AD}$=__________，∠CBE=__________度；

（2）当把△DEF绕点C旋转到如图2所示的位置时（D点在BC上），连接AD并延长交BE于点F，连接FC，则$\frac{BE}{AD}$=__________，∠CFE=__________度；

（3）把△DEC绕点C旋转到如图3所示的位置时，请求出∠CFE的度数__________．

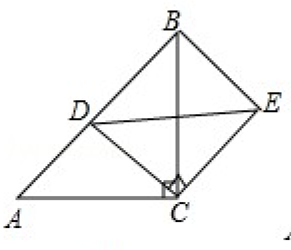


图1

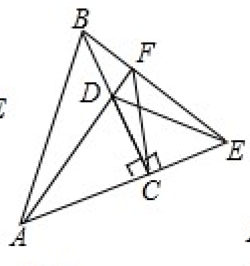


图2

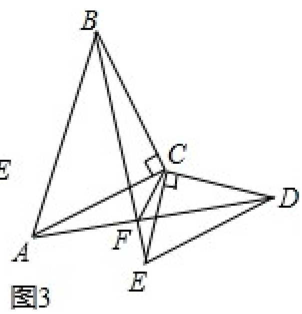


图3

7．已知△ABC为边长为10的等边三角形，D是BC边上一动点：

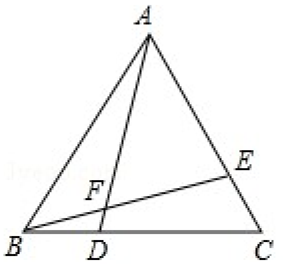


图1

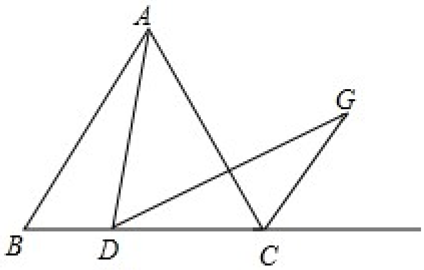


图2

① 如图 1，点 E 在 AC 上，且 BD=CE，BE 交 AD 于 F，当 D 点滑动时，∠AFE 的大小是否变化？若不变，请求出其度数．

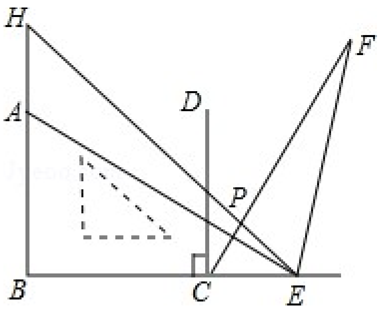
② 如图 2，过点 D 作∠ADG=60°与∠ACB 的外角平分线交于 G，当点 D 在 BC 上滑动时，有下列两个结论：

① DC+CG 的值为定值；② DG﹣CD 的值为定值．其中有且只有一个是正确的，请你选择正确的结论加以证明并求出其值．

8．如图，点 A、C 分别在一个含 45°的直角三角板 HBE 的两条直角边 BH 和 BE 上，且 BA=BC，过点 C 作 BE 的垂线 CD，过 E 点作 EF⊥AE 交∠DCE 的角平分线于 F 点，交 HE 于 P．

（1）试判断△PCE 的形状，并请说明理由；

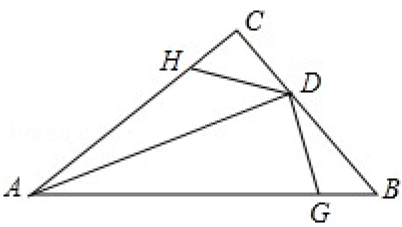
（2）若∠HAE=120°，AB=3，求 EF 的长．



9．如图，AD 是△ABC 的角平分线，H，G 分别在 AC，AB 上，且 HD=BD．

（1）求证：∠B 与∠AHD 互补；

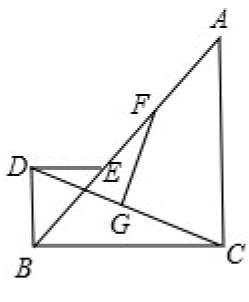
（2）若∠B+2∠DGA=180°，请探究线段 AG 与线段 AH、HD 之间满足的等量关系，并加以证明．

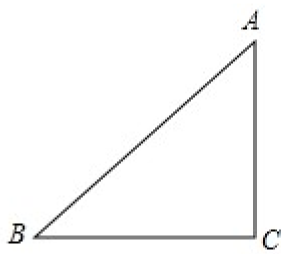


10．如图，在等腰 Rt△ABC 与等腰 Rt△DBE 中，∠BDE=∠ACB=90°，且 BE 在 AB 边上，取 AE 的中点 F，CD 的中点 G，连接 GF．

（1）FG 与 DC 的位置关系是__________，FG 与 DC 的数量关系是__________；

（2）若将△BDE 绕 B 点逆时针旋转 180°，其它条件不变，请完成下图，并判断（1）中的结论是否仍然成立？请证明你的结论．





11．如图 1，△ABC 中，AG⊥BC 于点 G，以 A 为直角顶点，分别以 AB、AC 为直角边，向△ABC 外作等腰 Rt△ABE 和等腰 Rt△ACF，过点 E、F 作射线 GA 的垂线，垂足分别为 P、Q．

（1）试探究 EP 与 FQ 之间的数量关系，并证明你的结论．

（2）若连接 EF 交 GA 的延长线于 H，由（1）中的结论你能判断并证明 EH 与 FH 的大小关系吗？

（3）图 2 中的△ABC 与△AEF 的面积相等吗？（不用证明）

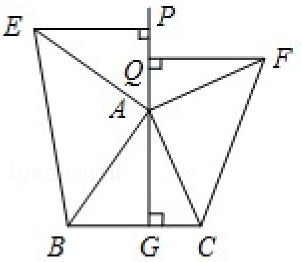


图 1

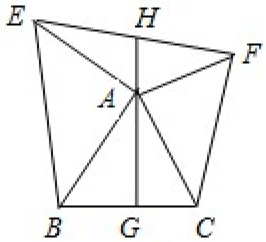


图 2

12．已知如图 1：△ABC 中，AB=AC，∠B、∠C 的平分线相交于点 O，过点 O 作 EF∥BC 交 AB、AC 于 E、F．

① 图中有几个等腰三角形？请说明 EF 与 BE、CF 间有怎样的关系．

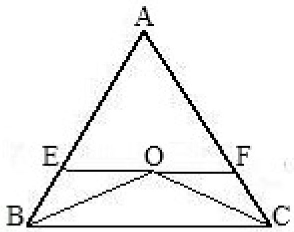


图1

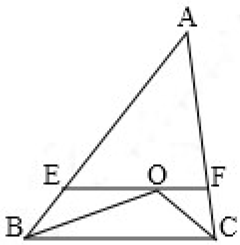


图2

② 若 AB≠AC，其他条件不变，如图 2，图中还有等腰三角形吗？如果有，请分别指出它们．另第①问中 EF 与 BE、CF 间的关系还存在吗？

③ 若△ABC 中，∠B 的平分线与三角形外角∠ACD 的平分线 CO 交于 O，过 O 点作 OE∥BC 交 AB 于 E，交 AC 于 F．如图 3，这时图中还有哪几个等腰三角形？EF 与 BE、CF 间的关系如何？为什么？

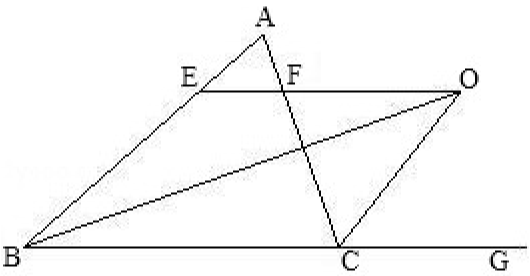


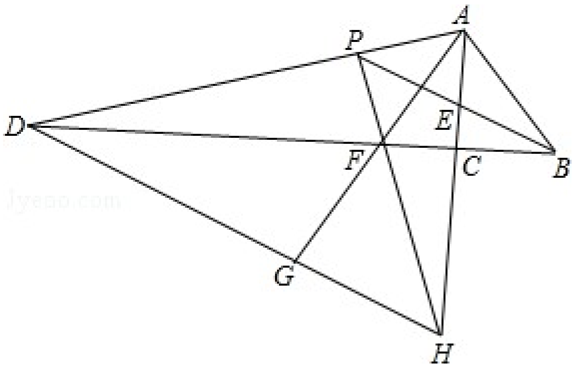
图3

八年级[上]数学期末《全等三角形》《轴对称》复习提优题【大海之音组卷】

参考答案与试题解析

一．选择题（共4小题）

1．如图，Rt△ACB中，∠ACB=90°，∠ABC的角平分线BE和∠BAC的外角平分线AD相交于点P，分别交AC和BC的延长线于E，D．过P作PF⊥AD交AC的延长线于点H，交BC的延长线于点F，连接AF交DH于点G．则下列结论：①∠APB=45°；②PF=PA；③BD－AH=AB；④DG=AP+GH．其中正确的是（　　）



A．①②③　　B．①②④　　C．②③④　　D．①②③④

考点：直角三角形的性质；角平分线的定义；垂线；全等三角形的判定与性质．

专题：推理填空题．

分析：①根据三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和与角平分线的定义表示出∠CAP，再根据角平分线的定义∠ABP=$\frac{1}{2}$∠ABC，然后利用三角形的内角和定理整理即可得解；

②③先根据直角的关系求出∠AHP=∠FDP，然后利用角角边证明△AHP与△FDP全等，根据全等三角形对应边相等可得DF=AH，对应角相等可得∠PFD=∠HAP，然后利用平角的关系求出∠BAP=∠BFP，再利用角角边证明△ABP与△FBP全等，然后根据全等三角形对应边相等得到AB=BF，从而得解；

④根据PF⊥AD，∠ACB=90°，可得AG⊥DH，然后求出∠ADG=∠DAG=45°，再根据等角对等边可得DG=AG，再根据等腰直角三角形两腰相等可得GH=GF，然后求出DG=GH+AF，有直角三角形斜边大于直角边，AF＞AP，从而得出本小题错误．

解答：解：①∵∠ABC的角平分线BE和∠BAC的外角平分线，

∴∠ABP=$\frac{1}{2}$∠ABC，

∠CAP=$\frac{1}{2}$（90°+∠ABC）=45°+$\frac{1}{2}$∠ABC，

在△ABP中，∠APB=180°－∠BAP－∠ABP，

=180°－（45°+$\frac{1}{2}$∠ABC+90°－∠ABC）－$\frac{1}{2}$∠ABC，

=180°－45°－$\frac{1}{2}$∠ABC－90°+∠ABC－$\frac{1}{2}$∠ABC，

=45°，故本小题正确；

②③∵∠ACB=90°，PF⊥AD，

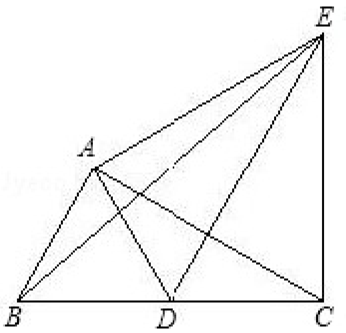
∴∠FDP+∠HAP=90°，∠AHP+∠HAP=90°，

∴∠AHP=∠FDP，

∵PF⊥AD，
∴∠APH=∠FPD=90°，
在△AHP与△FDP中，$\begin{cases}\angle AHP=\angle FDP\\ \angle APH=\angle FPD=90^{\circ}\\ AP=PF\end{cases}$，
∴△AHP≌△FDP（AAS），
∴DF=AH，
∵AD为∠BAC的外角平分线，∠PFD=∠HAP，
∴∠PAE+∠BAP=180°，
又∵∠PFD+∠BFP=180°，
∴∠PAE=∠PFD，
∵∠ABC的角平分线，
∴∠ABP=∠FBP，
在△ABP与△FBP中，$\begin{cases}\angle PAE=\angle PFD\\ \angle ABP=\angle FBP\\ PB=PB\end{cases}$，
∴△ABP≌△FBP（AAS），
∴AB=BF，AP=PF故②小题正确；
∵BD=DF+BF，
∴BD=AH+AB，
∴BD﹣AH=AB，故③小题正确；
④∵PF⊥AD，∠ACB=90°，
∴AG⊥DH，
∵AP=PF，PF⊥AD，
∴∠PAF=45°，
∴∠ADG=∠DAG=45°，
∴DG=AG，
∵∠PAF=45°，AG⊥DH，
∴△ADG与△FGH都是等腰直角三角形，
∴DG=AG，GH=GF，
∴DG=GH+AF，
∵AF＞AP，
∴DG=AP+GH不成立，故本小题错误，
综上所述①②③正确．
故选A．

点评：本题考查了直角三角形的性质，全等三角形的判定，以及等腰直角三角形的判定与性质，等角对等边，等边对等角的性质，综合性较强，难度较大，做题时要分清角的关系与边的关系．

2．如图，将30°的直角三角尺ABC绕直角顶点A逆时针旋转到ADE的位置，使B点的对应点D落在BC边上，连接EB、EC，则下列结论：①∠DAC=∠DCA；②ED为AC的垂直平分线；③EB平分∠AED；④ED=2AB．其中正确的是（　　）



A．①②③　　B．①②④　　C．②③④　　D．①②③④

考点：旋转的性质；含 30 度角的直角三角形．

分析：根据直角三角形中 30°的角所对的直角边等于斜边的一半，以及旋转的性质即可判断．

解答：解：①根据旋转的性质可以得到：AB=AD，而∠ABD=60°，则△ABD 是等边三角形，可得到∠DAC=30°，∴∠DAC=∠DCA，故正确；

②根据①可得 AD=CD，并且根据旋转的性质可得：AC=AE，∠EAC=60°，则△ACE 是等边三角形，则 EA=EC，即 D、E 都到 AC 两端的距离相等，则 DE 在 AC 的垂直平分线上，故正确；

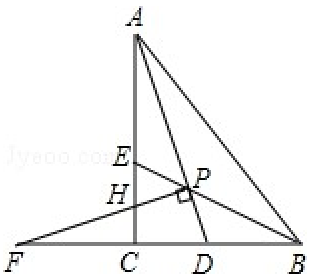
③根据条件 AB∥DE，而 AB≠AE，即可证得 EB 平分∠AED 不正确，故错误；

④根据旋转的性质，DE=BC，而 BC=2AB，即可证得 ED=2AB，故正确；

故正确的是：①②④．故选 B．

点评：正确理解旋转的性质，图形旋转前后两个图形全等是解决本题的关键．

3．如图，Rt△ACB 中，∠ACB=90°，△ABC 的角平分线 AD、BE 相交于点 P，过 P 作 PF⊥AD 交 BC 的延长线于点 F，交 AC 于点 H，则下列结论：①∠APB=135°；② PF=PA；③ AH+BD=AB；④ $S_{四边形ABDE}=\frac{3}{2}S_{\triangle ABP}$，其中正确的是（　　）



A．①③　　B．①②④　　C．①②③　　D．②③

考点：全等三角形的判定与性质；等腰三角形的性质．

分析：根据三角形全等的判定和性质以及三角形内角和定理逐条分析判断．

解答：解：在△ABC 中，AD、BE 分别平分∠BAC、∠ABC，

∵∠ACB=90°，

∴∠A+∠B=90°，

又∵AD、BE 分别平分∠BAC、∠ABC，

∴$\angle BAD+\angle ABE=\frac{1}{2}(\angle A+\angle B)=45°$，

∴∠APB=135°，故①正确．

∴∠BPD=45°，

又∵PF⊥AD，

∴∠FPB=90°+45°=135°，

∴∠APB=∠FPB，

又∵$\angle ABP=\angle FBP$，

$BP=BP$，

∴$\triangle ABP\cong\triangle FBP$，

∴$\angle BAP=\angle BFP$，$AB=FB$，$PA=PF$，故②正确．

在$\triangle APH$和$\triangle FPD$中，

∵$\angle APH=\angle FPD=90^\circ$，

$\angle PAH=\angle BAP=\angle BFP$，

$PA=PF$，

∴$\triangle APH\cong\triangle FPD$，

∴$AH=FD$，

又∵$AB=FB$，

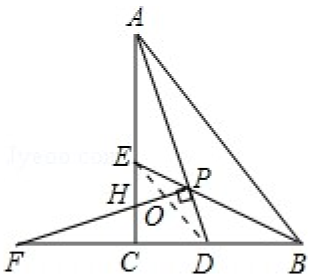
∴$AB=FD+BD=AH+BD$．故③正确．

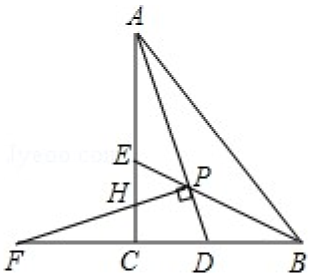
∵$\triangle ABP\cong\triangle FBP$，$\triangle APH\cong\triangle FPD$，

∴$S_{四边形ABDE}=S_{\triangle ABP}+S_{\triangle BDP}+S_{\triangle APH}-S_{\triangle EOH}+S_{\triangle DOP}=S_{\triangle ABP}+S_{\triangle ABP}-S_{\triangle EOH}+S_{\triangle DOP}=2S_{\triangle ABP}-S_{\triangle EOH}+S_{\triangle DOP}$

$\neq\frac{3}{2}S_{\triangle ABP}$．

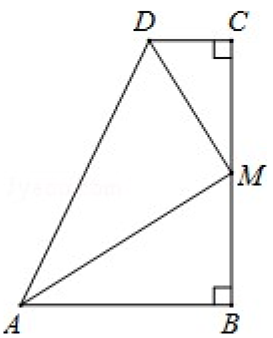
故选C．





点评：本题考查三角形全等的判定方法，判定两个三角形全等的一般方法有：SSS、SAS、ASA、AAS、HL．注意：AAA、SSA不能判定两个三角形全等，判定两个三角形全等时，必须有边的参与，若有两边一角对应相等时，角必须是两边的夹角．

4．如图，在四边形ABCD中，$\angle B=\angle C=90^\circ$，$\angle DAB$与$\angle ADC$的平分线相交于BC边上的M点，则下列结论：①$\angle AMD=90^\circ$；②M为BC的中点；③$AB+CD=AD$；④$S_{\triangle ADM}=\frac{1}{2}S_{梯形ABCD}$；⑤M到AD的距离等于BC的一半；其中正确的有（　　）

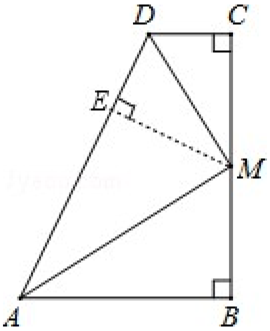


A．2个　　B．3个　　C．4个　　D．5个

考点： 全等三角形的判定与性质；角平分线的性质．

分析： 过M作ME⊥AD于E，得出∠MDE=$\frac{1}{2}$∠CDA，∠MAD=$\frac{1}{2}$∠BAD，求出∠MDA+∠MAD=$\frac{1}{2}$（∠CDA+∠BAD）=90°，根据三角形内角和定理求出∠AMD，即可判断①；根据角平分线性质求出MC=ME，ME=MB，即可判断②和⑤；由勾股定理求出DC=DE，AB=AE，即可判断③；根据SSS证△DEM≌△DCM，推出$S_{三角形DEM}=S_{三角形DCM}$，同理得出$S_{三角形AEM}=S_{三角形ABM}$，即可判断④．

解答：



解：

过M作ME⊥AD于E，

∵∠DAB与∠ADC的平分线相交于BC边上的M点，

∴∠MDE=$\frac{1}{2}$∠CDA，∠MAD=$\frac{1}{2}$∠BAD，

∵DC∥AB，

∴∠CDA+∠BAD=180°，

∴∠MDA+∠MAD=$\frac{1}{2}$（∠CDA+∠BAD）=$\frac{1}{2}$×180°=90°，

∴∠AMD=180°﹣90°=90°，∴①正确；

∵DM平分∠CDE，∠C=90°（MC⊥DC），ME⊥DA，

∴MC=ME，

同理ME=MB，

∴MC=MB=ME=$\frac{1}{2}$BC，∴②正确；

∴M到AD的距离等于BC的一半，∴⑤正确；

∵由勾股定理得：$DC^2=MD^2-MC^2$，$DE^2=MD^2-ME^2$，

又∵ME=MC，MD=MD，

∴DC=DE，

同理AB=AE，

∴AD=AE+DE=AB+DC，∴③正确；

∵在△DEM和△DCM中

$$\begin{cases} DE=DC \\ DM=DM \\ ME=MC \end{cases}，$$

∴△DEM≌△DCM（SSS），

∴$S_{三角形DEM}=S_{三角形DCM}$

同理$S_{三角形AEM}=S_{三角形ABM}$，

∴$S_{三角形AMD}=\frac{1}{2}S_{梯形ABCD}$，∴④正确；

故选D．

点评： 本题考查了角平分线性质，垂直定义，直角梯形，勾股定理，全等三角形的性质和判定等知识点的应用，主要考查学生运用定理进行推理的能力．

二．解答题（共 8 小题）

5．如图 1，在 Rt△ACB 中，∠ACB=90°，∠ABC=30°AC=1 点 D 为 AC 上一动点，连接 BD，以 BD 为边作等边△BDE，EA 的延长线交 BC 的延长线于 F，设 CD=n，

（1）当 n=1 时，则 AF=__2__；

（2）当 0＜n＜1 时，如图 2，在 BA 上截取 BH=AD，连接 EH，求证：△AEH 为等边三角形．

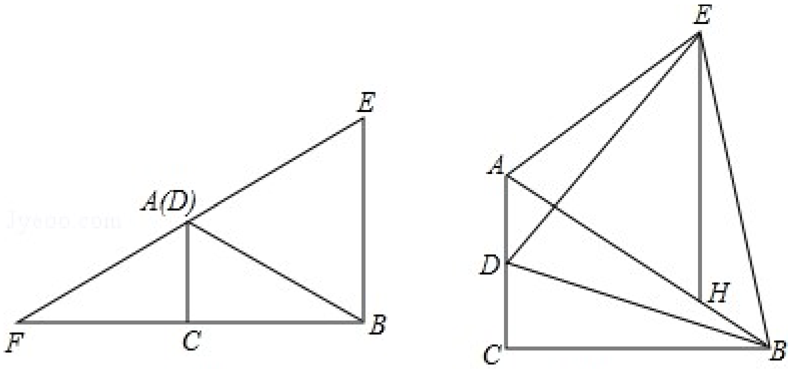


图1　　图2

考点：　含 30 度角的直角三角形；全等三角形的判定与性质；等边三角形的性质．

专题：　动点型．

分析：　（1）根据三角形内角和定理求出∠BAC=60°，再根据平角等于 180°求出∠FAC=60°，然后求出∠F=30°，根据 30°角所对的直角边等于斜边的一半求解即可；

（2）根据三角形的任意一个外角等于与它不相邻的两个内角的和利用∠CBD 表示出∠ADE=30°+∠CBD，又∠HBE=30°+∠CBD，从而得到∠ADE=∠HBE，然后根据边角边证明△ADE 与△HBE 全等，根据全等三角形对应边相等可得 AE=HE，对应角相等可得∠AED=∠HEB，然后推出∠AEH=∠BED=60°，再根据等边三角形的判定即可证明．

解答：　（1）解：∵△BDE 是等边三角形，

∴∠EDB=60°，

∵∠ACB=90°，∠ABC=30°，

∴∠BAC=180°﹣90°﹣30°=60°，

∴FAC=180°﹣60°﹣60°=60°，

∴∠F=180°﹣90°﹣60°=30°，

∵∠ACB=90°，

∴∠ACF=180°﹣90°，

∴AF=2AC=2×1=2；

（2）证明：∵△BDE 是等边三角形，

∴BE=BD，∠EDB=∠EBD=60°，

在△BCD 中，∠ADE+∠EDB=∠CBD+∠C，

即∠ADE+60°=∠CBD+90°，

∴∠ADE=30°+∠CBD，

∵∠HBE+∠ABD=60°，∠CBD+∠ABD=30°，

∴∠HBE=30°+∠CBD，

∴∠ADE=∠HBE，

在△ADE 与△HBE 中，

$$\begin{cases} BH=AD \\ \angle ADE=\angle HBE \\ BE=BD \end{cases}，$$

∴△ADE≌△HBE（SAS），

∴AE=HE，∠AED=∠HEB，
∴∠AED+∠DEH=∠DEH+∠HEB，
即∠AEH=∠BED=60°，
∴△AEH 为等边三角形．

点评：本题考查了 30°角所对的直角边等于斜边的一半的性质，全等三角形的判定与性质，等边三角形的性质与判定，以及三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和的性质，（2）中求出∠ADE=∠HBE 是解题的关键．

6．两个等腰直角△ABC 和等腰直角△DCE 如图 1 摆放，其中 D 点在 AB 上，连接 BE．

（1）则$\frac{BE}{AD}$=<u> 1 </u>，∠CBE=<u> 45 </u>度；

（2）当把△DEF 绕点 C 旋转到如图 2 所示的位置时（D 点在 BC 上），连接 AD 并延长交 BE 于点 F，连接 FC，则$\frac{BE}{AD}$=<u> 1 </u>，∠CFE=<u> 45 </u>度；

（3）把△DEC 绕点 C 旋转到如图 3 所示的位置时，请求出∠CFE 的度数<u> 135° </u>．

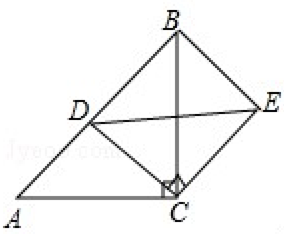


图1

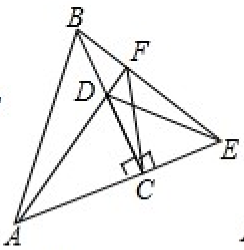


图2

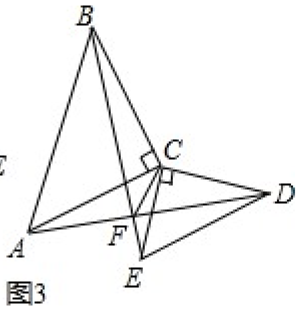


图3

考点：圆周角定理；全等三角形的判定与性质；等腰直角三角形；确定圆的条件．

分析：（1）先证明∠ACD=∠BCE，再根据边角边定理证明△ACD≌△BCE，然后根据全等三角形对应边相等和对应角相等解答；

（2）根据（1）的思路证明△ACD 和△BCE 全等，再根据全等三角形对应边相等得 BE=AD，对应角相等得∠DAC=∠DBF，又 AC⊥CD，所以 AF⊥BF，从而可以得到 C、E、F、D 四点共圆，根据同弧所对的圆周角相等即可求出∠CFE=∠CDE=45°；

（3）同（2）的思路，证明 C、F、D、E 四点共圆，得出∠CFD=∠CED=45°，而∠DEF=90°，所以∠CFE 的度数即可求出．

解答：解：（1）∵△ABC 和△DCE 是等腰三角形，
∴AC=BC，CD=CE，
∵∠ACB=∠DCE=90°，
∴∠ACB﹣∠BCD=∠DCE﹣∠BCD，
即∠ACD=∠BCE，

在△ACD 和△BCE 中，$\begin{cases}AC=BC\\ \angle ACD=\angle BCE\\ CD=CE\end{cases}$，

∴△ACD≌△BCE（SAS），
∴BE=AD，∠CBE=∠CAD=45°，
因此$\frac{BE}{AD}$=1，∠CBE=45°；

（2）同（1）可得 BE=AD，
∴$\frac{BE}{AD}$=1，

∠CBE=∠CAD；
又∵∠ACD=90°，∠ADC=∠BDF，
∴∠BFD=∠ACD=90°；
又∵∠DCE=90°，
∴C、E、F、D 四点共圆，
∴∠CFE=∠CDE=45°；

（3）同（2）可得∠BFA=90°，
∴∠DFE=90°；
又∵∠DCE=90°，
∴C、F、D、E 四点共圆，
∴∠CFD=∠CED=45°，
∴∠CFE=∠CFD+∠DFE
=45°+90°
=135°．

点评：本题综合考查了等边对等角的性质，三角形全等的判定和全等三角形的性质，四点共圆以及同弧所对的圆周角相等的性质，需要熟练掌握并灵活运用．

7．已知△ABC 为边长为 10 的等边三角形，D 是 BC 边上一动点：

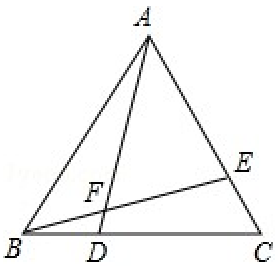


图1

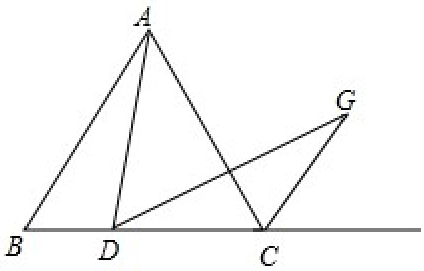


图2

①如图 1，点 E 在 AC 上，且 BD=CE，BE 交 AD 于 F，当 D 点滑动时，∠AFE 的大小是否变化？若不变，请求出其度数．
②如图 2，过点 D 作∠ADG=60°与∠ACB 的外角平分线交于 G，当点 D 在 BC 上滑动时，有下列两个结论：①DC+CG 的值为定值；②DG－CD 的值为定值．其中有且只有一个是正确的，请你选择正确的结论加以证明并求出其值．

考点：等边三角形的性质；全等三角形的判定与性质．
专题：探究型．
分析：①∠AFE 的大小不变，其度数为 60°，理由如下：由三角形 ABC 为等边三角形，得到三条边相等，三个内角相等，都为 60°，可得出 AB=BC，∠ABD=∠C，再由 BD=CE，利用 SAS 可得出三角形 ABD 与三角形 BCE 全等，根据全等三角形的对应角相等可得出∠BAD=∠CBE，在三角形 ABD 中，由∠ABD 为 60°，得到∠BAD+∠ADB 的度数，等量代换可得出∠CBE+∠ADB 的度数，利用三角形的内角和定理求出∠BFD 的度数，根据对应角相等可得出∠AFE=∠BFD，可得出∠AFE 的度数不变；
②连接 AG，如图所示，由三角形 ABC 为等边三角形，得出三条边相等，三个内角都相等，都为 60°，再由 CG 为外角平分线，得出∠ACG 也为 60°，由∠ADG 为 60°，可得出 A，D，C，G 四点共圆，根据圆内接四边形的对角互补可得出∠DAG 与∠DCG 互补，而∠DCG 为 120°，可得出∠DAG 为 60°，根据∠BAD+∠DAC=∠DAC+∠CAG=60°，利用等式的性质得到∠BAD=∠CAG，利用 ASA 可证明三角形 ABD 与三角形 ACG 全等，利用全等三角形的对应边相等可得出 BD=CG，由 BC=BD+DC，等量代换可得出 CG+CD=BC，而 BC=10，即可得到 DC+CG 为定值 10，得证．
解答：解：①∠AFE 的大小不变，其度数为 60°，理由为：
∵△ABC 为等边三角形，

∴AB=BC，∠ABD=∠C=60°，
在△ABD和△BCE中，

$$\begin{cases}AB=BC\\ \angle ABD=\angle C\\ BD=CE\end{cases}，$$

∴△ABD≌△BCE（SAS），
∴∠BAD=∠CBE，
又∠BAD+∠ADB=120°，
∴∠CBE+∠ADB=120°，
∴∠BFD=60°，
则∠AFE=∠BFD=60°；
②正确的结论为：DC+CG的值为定值，理由如下：
连接AG，如图2所示：

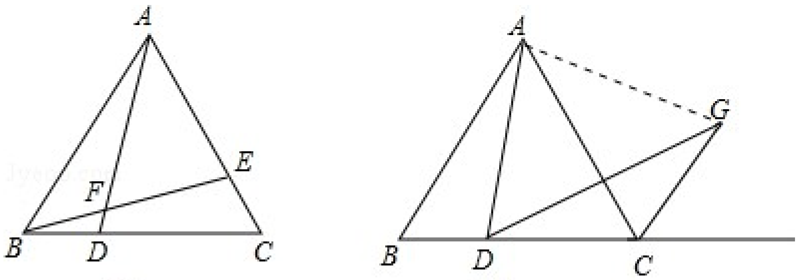


图1　　图2

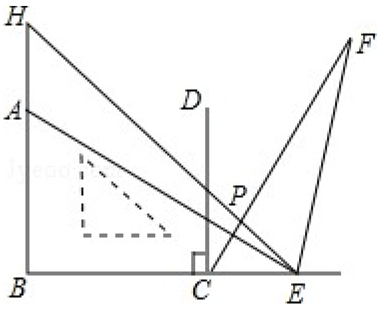
∵△ABC为等边三角形，
∴AB=BC=AC，∠ABD=∠ACB=∠BAC=60°，
又CG为∠ACB的外角平分线，
∴∠ACG=60°，
又∵∠ADG=60°，
∴∠ADG=∠ACG，即A，D，C，G四点共圆，
∴∠DAG+∠DCG=180°，又∠DCG=120°，
∴∠DAG=60°，即∠DAC+∠CAG=60°，
又∵∠BAD+∠DAC=60°，
∴∠BAD=∠GAC，
在△ABD和△ACG中，

$$∵\begin{cases}\angle B=\angle ACG=60^\circ\\ AB=AC\\ \angle BAD=\angle CAG\end{cases}，$$

∴△ABD≌△ACG（ASA），
∴DB=GC，又BC=10，
则BC=BD+DC=DC+CG=10，即DC+CG的值为定值．

点评：此题考查了等边三角形的判定与性质，全等三角形的判定与性质，四点共圆的条件，以及圆内接四边形的性质，利用了等量代换及转化的思想，熟练掌握等边三角形的判定与性质是解本题的关键．

8．如图，点A、C分别在一个含45°的直角三角板HBE的两条直角边BH和BE上，且BA=BC，过点C作BE的垂线CD，过E点作EF上AE交∠DCE的角平分线于F点，交HE于P．
（1）试判断△PCE的形状，并请说明理由；
（2）若∠HAE=120°，AB=3，求EF的长．



考点： 全等三角形的判定与性质；等腰直角三角形．

专题： 计算题；证明题．

分析：

（1）根据∠PCE=$\frac{1}{2}$∠DCE=$\frac{1}{2}$×90°=45°，求证∠CPE=90°，然后即可判断三角形的形状．

（2）根据∠HEB=∠H=45°得 HB=BE，再根据 BA=BC 和∠HAE=120°，利用 ASA 求证△HAE≌△CEF，得 AE=EF，又因为 AE=2AB．然后即可求得 EF．

解答： 解：（1）△PCE 是等腰直角三角形，

理由如下：

∵∠PCE=$\frac{1}{2}$∠DCE=$\frac{1}{2}$×90°=45°

∠PEC=45°

∴∠PCE=∠PEC

∠CPE=90°

∴△PCE 是等腰直角三角形

（2）∵∠HEB=∠H=45°

∴HB=BE

∵BA=BC

∴AH=CE

而∠HAE=120°

∴∠BAE=60°，∠AEB=30°

又∵∠AEF=90°

∴∠CEF=120°=∠HAE

而∠H=∠FCE=45°

∴△HAE≌△CEF（ASA）

∴AE=EF

又∵AE=2AB=2×3=6

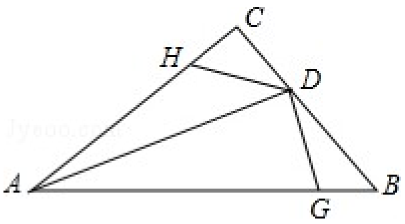
∴EF=6

点评： 此题主要考查学生对全等三角形的判定与性质和等腰直角三角形等知识点的理解和掌握，解答（2）的关键是利用 ASA 求证△HAE≌△CEF，此题有一定的拔高难度，属于中档题．

9．如图，AD 是△ABC 的角平分线，H，G 分别在 AC，AB 上，且 HD=BD．

（1）求证：∠B 与∠AHD 互补；

（2）若∠B+2∠DGA=180°，请探究线段 AG 与线段 AH、HD 之间满足的等量关系，并加以证明．



考点： 全等三角形的判定与性质．

专题： 证明题．

分析： （1）在 AB 上取一点 M，使得 AM=AH，连接 DM，则利用 SAS 可得出△AHD≌△AMD，从而得出 HD=MD=DB，即有∠DMB=∠B，通过这样的转化可证明∠B 与∠AHD 互补．

（2）由（1）的结论中得出的∠AHD=∠AMD，结合三角形的外角可得出∠DGM=∠GDM，可将 HD 转化为 MG，从而在线段 AG 上可解决问题．

解答： 证明：（1）在 AB 上取一点 M，使得 AM=AH，连接 DM，

$\because \begin{cases} AH=AM \\ \angle CAD=\angle BAD \\ AD=AD \end{cases}$，

∴△AHD≌△AMD，

∴HD=MD，∠AHD=∠AMD，

∵HD=DB，

∴DB=MD，

∴∠DMB=∠B，

∵∠AMD+∠DMB=180°，

∴∠AHD+∠B=180°，

即∠B 与∠AHD 互补．

（2）由（1）∠AHD=∠AMD，HD=MD，∠AHD+∠B=180°，

∵∠B+2∠DGA=180°，∠AHD=2∠DGA，

∴∠AMD=2∠DGM，

又∵∠AMD=∠DGM+∠GDM，

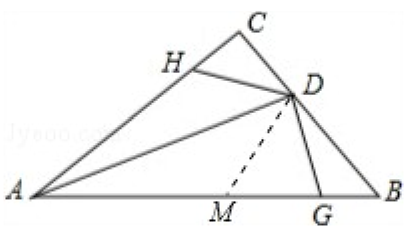
∴2∠DGM=∠DGM+∠GDM，即∠DGM=∠GDM，

∴MD=MG，

∴HD=MG，

∵AG=AM+MG，

∴AG=AH+HD．

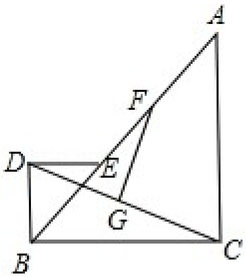


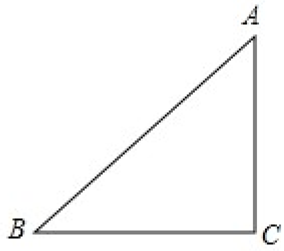
点评： 本题考查了全等三角形的判定及性质，结合了等腰三角形的知识，解决这两问的关键都是通过全等图形的对应边相等、对应角相等，将题目涉及的角或边进行转化．

10．如图，在等腰 Rt△ABC 与等腰 Rt△DBE 中，∠BDE=∠ACB=90°，且 BE 在 AB 边上，取 AE 的中点 F，CD 的中点 G，连接 GF．

（1）FG 与 DC 的位置关系是__FG⊥CD__，FG 与 DC 的数量关系是__$FG=\frac{1}{2}CD$__；

（2）若将△BDE 绕 B 点逆时针旋转 180°，其它条件不变，请完成下图，并判断（1）中的结论是否仍然成立？请证明你的结论．





考点： 全等三角形的判定与性质；等腰直角三角形．

专题： 探究型．

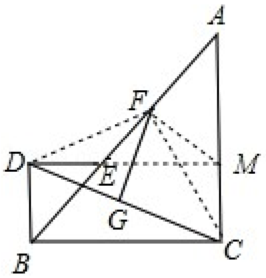
分析： （1）证 FG 和 CD 的大小和位置关系，我们已知了 G 是 CD 的中点，猜想应该是 FG⊥CD，FG=$\frac{1}{2}$CD．可通过构建三角形连接 FD，FC，证三角形 DFC 是等腰直角三角形来得出上述结论，可通过全等三角形来证明；延长 DE 交 AC 于 M，连接 FM，证明三角形 DEF 和 FMC 全等即可．我们发现 BDMC 是个矩形，因此 BD=CM=DE．由于三角形 DEB 和 ABC 都是等腰直角三角形，∠BED=∠A=45°，因此∠AEM=∠A=45°，这样我们得出三角形 AEM 是个等腰直角三角形，F 是斜边 AE 的中点，因此 MF=EF，∠AMF=∠BED=45°，那么这两个角的补角也应当相等，由此可得出∠DEF=∠FMC，这样就构成了三角形 DEF 和 CMF 的全等的所有条件，可得到 DF=FC，即三角形 DFC 是等腰三角形，下面证直角．根据两三角形全等，我们还能得出∠MFC=∠DFE，我们知道∠MFC+∠CFE=90°，因此∠DFE+∠CFE=∠DFC=90°，这样就得出三角形 DFC 是等腰直角三角形了，也就能得出 FG⊥CD，FG=$\frac{1}{2}$CD 的结论了．

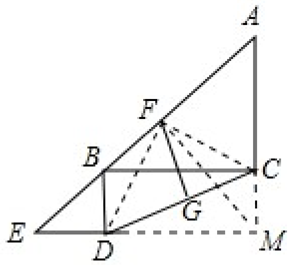
（2）和（1）的证法完全一样．

解答： 解：（1）FG⊥CD，FG=$\frac{1}{2}$CD．

（2）延长 ED 交 AC 的延长线于 M，连接 FC、FD、FM，
∴四边形 BCMD 是矩形．
∴CM=BD．
又△ABC 和△BDE 都是等腰直角三角形，
∴ED=BD=CM．
∵∠AEM=∠A=45°，
∴△AEM 是等腰直角三角形．
又 F 是 AE 的中点，
∴MF⊥AE，EF=MF，∠EDF=∠MCF．
∵在△EFD 和△MFC 中
$$\begin{cases} DE=MC \\ \angle DEF=\angle CMF \\ EF=MF \end{cases}，$$
∴△EFD≌△MFC．
∴FD=FC，∠EFD=∠MFC．
又∠EFD+∠DFM=90°，
∴∠MFC+∠DFM=90°．
即△CDF 是等腰直角三角形，
又 G 是 CD 的中点，

∴FG=$\frac{1}{2}$CD，FG⊥CD．





点评： 本题中通过构建全等三角形来证明线段和角相等是解题的关键．

11．如图1，△ABC中，AG⊥BC于点G，以A为直角顶点，分别以AB、AC为直角边，向△ABC外作等腰Rt△ABE和等腰Rt△ACF，过点E、F作射线GA的垂线，垂足分别为P、Q．

（1）试探究EP与FQ之间的数量关系，并证明你的结论．

（2）若连接EF交GA的延长线于H，由（1）中的结论你能判断并证明EH与FH的大小关系吗？

（3）图2中的△ABC与△AEF的面积相等吗？（不用证明）

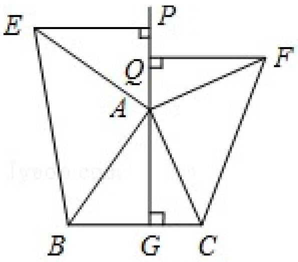


图1

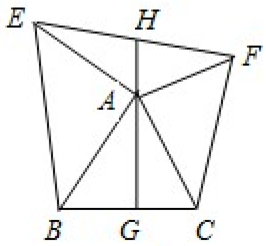


图2

考点： 全等三角形的判定与性质；等腰直角三角形．

分析： （1）根据全等三角形的判定得出△ABG≌△EAP，进而求出AG=EP．同理AG=FQ，即EP=FQ．

（2）过点E作EP⊥GA，FQ⊥GA，垂足分别为P、Q．根据全等三角形的判定和性质即可解题．

（3）由（1）、（2）中的全等三角形可以推知△ABC与△AEF的面积相等．

解答： 解：（1）EP=FQ，理由如下：

如图1，∵Rt△ABE是等腰三角形，

∴EA=BA．

∵∠PEA+∠PAE=90°，

∠PAE+∠BAG=90°，

∴∠PEA=∠BAG

在△EAP与△ABG中，

$$\begin{cases}\angle EPA=\angle AGB=90^\circ\\ \angle PEA=\angle GAB\\ EA=AB\end{cases},$$

∴△EAP≌△ABG（AAS），

∴EP=AG．

同理AG=FQ．

∴EP=FQ．

（2）如图2，HE=HF．

理由：过点E作EP⊥GA，FQ⊥GA，垂足分别为P、Q．

由（1）知EP=FQ．

在△EPH与△FQH中，

$\because\begin{cases}\angle EPH=\angle FQH=90^\circ\\ \angle EHP=\angle FHQ（对顶角相等）\\ HE=HF\end{cases}$，

∴△EPH≌△FQH（AAS）．

∴HE=HF；

（3）相等．理由如下：

由（1）知，△ABG≌△EAP，△FQA≌△AGC，则 $S_{\triangle ABG}=S_{\triangle EAP}$，$S_{\triangle FQA}=S_{\triangle AGC}$．

由（2）知，△EPH≌△FQH，则 $S_{\triangle EPH}=S_{\triangle FQH}$，

所以 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABG}+S_{\triangle AGC}=S_{\triangle EAP}-S_{\triangle EPH}+S_{\triangle FQA}-S_{\triangle FQH}=S_{\triangle EAP}+S_{\triangle FQA}=S_{\triangle AEF}$，即 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AEF}$．

故图 2 中的△ABC 与△AEF 的面积相等．

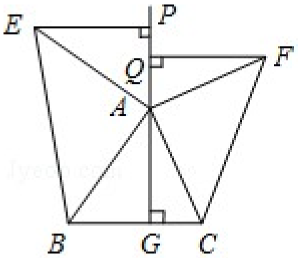


图 1

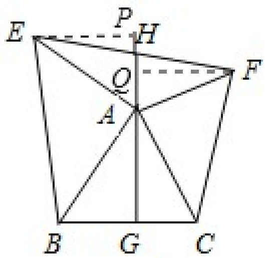


图 2

点评： 本题考查了全等三角形的证明，考查了全等三角形对应边相等的性质，考查了三角形内角和为 180°的性质，考查了等腰三角形腰长相等的性质，本题中求证△AFQ≌△CAG 是解题的关键．

12．已知如图 1：△ABC 中，AB=AC，∠B、∠C 的平分线相交于点 O，过点 O 作 EF∥BC 交 AB、AC 于 E、F．

① 图中有几个等腰三角形？请说明 EF 与 BE、CF 间有怎样的关系．

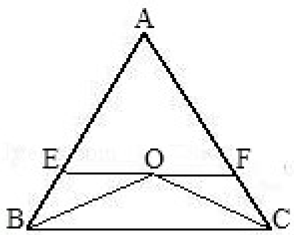


图1

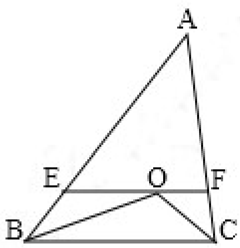


图2

② 若 AB≠AC，其他条件不变，如图 2，图中还有等腰三角形吗？如果有，请分别指出它们．另第①问中 EF 与 BE、CF 间的关系还存在吗？

③ 若△ABC 中，∠B 的平分线与三角形外角∠ACD 的平分线 CO 交于 O，过 O 点作 OE∥BC 交 AB 于 E，交 AC 于 F．如图 3，这时图中还有哪几个等腰三角形？EF 与 BE、CF 间的关系如何？为什么？

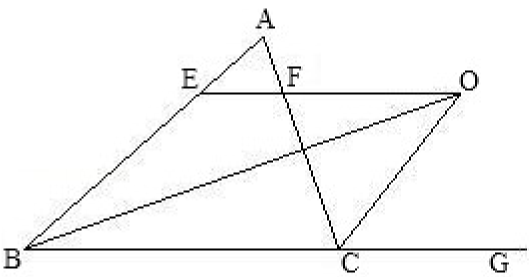


图3

考点： 等腰三角形的判定与性质；平行线的性质．

专题： 计算题；证明题．

分析：（1）根据EF∥BC，∠B、∠C的平分线交于O点，可得∠EOB=∠OBC，∠FOC=∠OCB，∠EOB=∠OBE，∠FCO=∠FOC，再加上题目中给出的AB=AC，共5个等腰三角形；根据等腰三角形的性质，即可得出EF与BE、CF间有怎样的关系．

（2）根据EF∥BC和∠B、∠C的平分线交于O点，还可以证明出△OBE和△OCF是等腰三角形；利用几个等腰三角形的性质即可得出EF与BE，CF的关系．

（3）EO∥BC和OB，OC分别是∠ABC与∠ACL的角平分线，还可以证明出△BEO和△CFO是等腰三角形．

解答：解：（1）有5个等腰三角形，EF与BE、CF间有怎样的关系是：EF=BE+CF=2BE=2CF．理由如下：

∵EF∥BC，

∴∠EOB=∠OBC，∠FOC=∠OCB，

又∠B、∠C的平分线交于O点，

∴∠EBO=∠OBC，∠FCO=∠OCB，

∴∠EOB=∠OBE，∠FCO=∠FOC，

∴OE=BE，OF=CF，

∴EF=OE+OF=BE+CF．

又AB=AC，

∴∠ABC=∠ACB，

∴∠EOB=∠OBE=∠FCO=∠FOC，

∴EF=BE+CF=2BE=2CF；

（2）有2个等腰三角形分别是：等腰△OBE和等腰△OCF；

第一问中的EF与BE，CF的关系是：EF=BE+CF．

（3）有，还是有2个等腰三角形，△EBO，△OCF，EF=BE﹣CF，理由如下：

∵EO∥BC，

∴∠EOB=∠OBC，∠EOC=∠OCG（G是BC延长线上的一点）

又∵OB，OC分别是∠ABC与∠ACG的角平分线

∴∠EBO=∠OBC，∠ACO=∠OCG，

∴∠EOB=∠EBO，

∴BE=OE，

∠FCO=∠FOC，

∴CF=FO，

又∵EO=EF+FO，

∴EF=BE﹣CF．

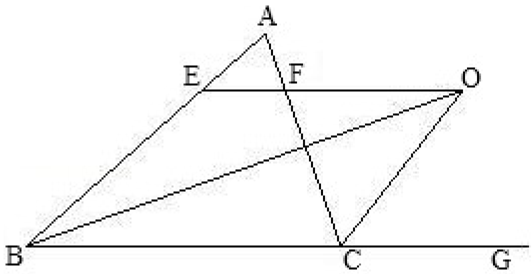


图3

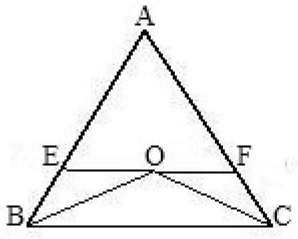


图1

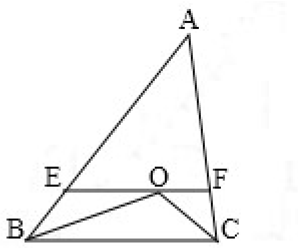


图2

点评：此题主要考查学生对等腰三角形的判定与性质和平行线性质的理解和掌握，此题难度并不大，但是步骤繁琐，属于中档题，还有第（1）中容易忽略△ABC也是等腰三角形，因此这又是一道易错题．要求学生在证明此题时一定要仔细，认真．