

第五章 分式与分式方程

一 认识分式

知识点一 分式的概念

1、分式的概念

从形式上来看，它应满足两个条件：

- (1) 写成 $\frac{A}{B}$ 的形式 (A、B 表示两个整式)
- (2) 分母中含有字母

这两个条件缺一不可

2、分式的意义

- (1) 要使一个分式有意义，需具备的条件是_____
- (2) 要使一个分式无意义，需具备的条件是_____
- (3) 要使分式的值为 0，需具备的条件是_____

知识点二、分式的基本性质

分式的分子与分母都乘以（或除以）同一个_____

分式的值不变

用字母表示为 $\frac{A}{B} = \frac{A \times M}{B \times M}, \frac{A}{B} = \frac{A \div M}{B \div M}$ (其中 M 是不等于零的整式)

知识点三、分式的约分

1、概念：把一个分式的分子和分母中的公因式约去，这种变形称为分式的约分

2、依据：分式的基本性质

注意：(1) 约分的关键是正确找出分子与分母的公因式

(2) 当分式的分子和分母没有公因式时，这样的分式称为最简分式，化简分式时，通常要使结果成为最简分式或整式。

(3) 要会把互为相反数的因式进行变形，如： $(x-y)^2 = (y-2)^2$

二、分式的乘除法

【巩固训练】

1、(2013 四川成都) 要使分式 $\frac{5}{x-1}$ 有意义，则 x 的取值范围是()

- (A) $x \neq 1$ (B) $x > 1$ (C) $x < 1$ (D) $x \neq -1$

2、(2013 深圳) 分式 $\frac{x^2 - 4}{x + 2}$ 的值为 0，则 x 的取值是

- A . $x = -2$ B . $x = \pm 2$ C . $x = 2$ D . $x = 0$

3、(2013 湖南郴州) 函数 $y = \frac{2}{3-x}$ 中自变量 x 的取值范围是 ()

- A $x > 3$ B $x < 3$ C $x \neq 3$ D $x \neq -3$

4. (2013 湖南娄底, 7, 3分) 式子 $\frac{\sqrt{2x+1}}{x-1}$ 有意义的 x 的取值范围是 ()

- A $x \geq -\frac{1}{2}$ 且 $x \neq 1$ B $x \neq 1$ C $x \geq -\frac{1}{2}$

5. (2013 贵州省黔东南州, 2, 4分) 分式 $\frac{x^2-1}{x+1}$ 的值为零, 则 x 的

值为 ()

- A -1 B 0 C ± 1 D 1

6. (2013 广西钦州) 当 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, 分式 $\frac{3}{x-2}$ 无意义.

7. (2013 江苏南京) 使式子 $1 + \frac{1}{x}$ 有意义的 x 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

8. (2013 黑龙江省哈尔滨市) 在函数 $y = \frac{x}{x+3}$ 中, 自变量 x 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

9. (2013 江苏扬州) 已知关于 x 的方程 $\frac{3x+n}{2x+1} = 2$ 的解是负数, 则 n 的取值范围为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

10. (2013 湖南益阳) 化简: $\frac{x}{x-1} - \frac{1}{x-1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

11. (2013 山东临沂, 6, 3分) 化简 $\frac{a+1}{a^2-2a+1} \div (1 + \frac{2}{a-1})$ 的结果是 ()

- A. $\frac{1}{a-1}$ B. $\frac{1}{a+1}$
C. $\frac{1}{a^2-1}$ D. $\frac{1}{a^2+1}$

12. (2013 湖南益阳) 化简: $\frac{x}{x-1} - \frac{1}{x-1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

13. (2013 湖南郴州) 化简 $\frac{a}{a-1} + \frac{1}{1-a}$ 的结果为 ()

- A. -1 B. 1 C. $\frac{a+1}{a-1}$ D. $\frac{a+1}{1-a}$

14. (2013 湖北省咸宁市) 化简 $\frac{x^2}{x-1} + \frac{x}{1-x}$ 的结果为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

15. (2013 泰安) 化简分式 $\frac{2}{x-1} \div (\frac{2}{x^2-1} + \frac{1}{x+1})$ 的结果是 ()

- A. 2 B. $\frac{2}{x+1}$ C. $\frac{2}{x-1}$ D. -2

考点: 分式的混合运算.

分析: 这是个分式除法与减法混合运算题, 运算顺序是先做括号内的加法,

此时要先确定最简公分母进行通分；做除法时要注意先把除法运算转化为乘法运算，而做乘法运算时要注意先把分子、分母能因式分解的先分解，然后约分。

16 (2011年四川乐山) . 若 m 为正实数，且 $m - \frac{1}{m} = 3$ ，则 $m^2 - \frac{1}{m^2} =$

17 (2013重庆市(A)) 分式方程 $\frac{2}{x-2} - \frac{1}{x} = 0$ 的根是 ()

- A . $x=1$ B . $x=-1$ C . $x=2$ D . $x=-$

2

18、(2013湖南益阳) 分式方程 $\frac{5}{x-2} = \frac{3}{x}$ 的解是 ()

- A . $x=3$ B . $x=-3$ C . $x = \frac{3}{4}$

$-\frac{3}{4}$

19、(2013白银) 分式方程 $\frac{1}{x} = \frac{2}{x+3}$ 的解是 ()

- A . $x=-2$ B . $x=1$ C . $x=2$ D . $x=3$

20、(2013江苏扬州) 已知关于 x 的方程 $\frac{3x+n}{2x+1} = 2$ 的解是负数，则 n 的取值范围为_____。

【答案】 $n < 2$ 且 $n \neq 1.5$.

21 . (2013山东临沂) 分式方程 $\frac{2x}{x-1} + \frac{1}{1-x} = 3$ 的解是_____

— .

22. (2013广东省) 从三个代数式：① $a^2 - 2ab + b^2$ ，② $3a - 3b$ ，③

$a^2 - b^2$ 中任意选择两个代数式构造成分式，然后进行化简，并求当

$a=6, b=3$ 时该分式的值。

23、(2013湖北孝感, 19, 6分) 先化简，再求值： $\frac{1}{x-y} \div (\frac{1}{y} - \frac{1}{x})$ ，

其中 $x=\sqrt{3}+\sqrt{2}, y=\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

考 分式的化简求值；二次根式的化简求值。

点：

24 . (2013江苏苏州, 21, 5分) 先化简，再求值：

$\frac{x-2}{x-1} \div \left(x+1 - \frac{3}{x-1} \right)$ ，其中 $x = \sqrt{3} - 2$.

25 . (2013贵州安顺, 20, 10分) 先化简，再求值：

$(1 - \frac{1}{a+1}) \div \frac{a}{a^2+2a+1}$ ，其中 $a = \sqrt{3} - 1.6$. (2013山东德州, 18, 6分)

先化简，再求值：

$$\left(\frac{a-2}{a^2+2a} - \frac{a-1}{a^2+4a+4} \right) \div \frac{a-4}{a+2}, \text{ 其中 } a = \sqrt{2} - 1.$$

26、. (2013 湖南永州, 19, 6 分) 先化简, 再求值:

$$\left(\frac{x+1}{x^2-1} + \frac{x}{x-1} \right) \div \frac{x+1}{x^2-2x+1}, \text{ 其中 } x=2.$$

【思路分析】先化简, 再求值。

$$\text{【解】原式} = \frac{x+1+x(x+1)}{(x+1)(x-1)} \times \frac{(x-1)^2}{x+1}$$

$$= \frac{(x+1)^2}{(x+1)(x-1)} \times \frac{(x-1)^2}{x+1}$$

$$= x-1$$

把 $x=2$ 代入 $x-1=2-1=1$

【方法指导】分式化简及求值的一般过程:

- (1) 有括号先计算括号内的(加减法关键是通分);
- (2) 除法变为乘法;
- (3) 分子分母能因式分解进行分解;
- (4) 约分;
- (5) 进行加减运算: ①通分: 关键是寻找公分母, ②分子合

并同类项;

(6) 代入数字求代数的值.(代值过程中要注意使分式有意义, 即所代值不能使分母为零)

27. (2013 广东珠海, 12, 6 分) 解方程: $\frac{x}{x-2} - \frac{1}{x^2-4} = 1.$

28、. (2013 年陕西) (本题满分 5 分)

解分式方程: $\frac{2}{x^2-4} + \frac{x}{x-2} = 1.$

29. (2013 山东日照, 9, 4 分) 甲计划用若干个工作日完成某项工作, 从第三个工作日起, 乙加入此项工作, 且甲、乙两人工效相同, 结果提前 3 天完成任务, 则甲计划完成此项工作的天数是

- A.8 B.7 C.6 D.5

【答案】A

【解析】设甲计划完成此项工作的天数为 x , 由题意可得,

$$\frac{x-3}{x} + \frac{x-5}{x} = 1, \text{ 解得 } x=8.$$

经检验 $x=8$ 是原方程的根, 且符合题意。

30、(2013 深圳, 8, 3 分) 小朱要到距家 1500 米的学校上学, 一天, 小朱出发 10 分钟后, 小朱的爸爸立即去追小朱, 并且在距离学校 60 米的地方追上了他。已知爸爸比小朱的速度快 100 米/分, 求小朱的速度。若设小朱的速度是 x 米/分, 则根据题意所列方程正确的是

A. $\frac{1440}{x-100} - \frac{1440}{x} = 10$ B. $\frac{1440}{x} = 10 + \frac{1440}{x+100}$

$$C. \frac{1440}{x} = \frac{1440}{x-100} + 10$$

$$D. \frac{1440}{x+100} - \frac{1440}{x} = 10$$

31. (2013 河北省, 7, 3 分) 甲队修路 120 m 与乙队修路 100 m 所用天数相同, 已知甲队比乙队每天多修 10 m, 设甲队每天修路 x m. 依题意, 下面所列方程正确的是

$$A. =$$

$$B. =$$

$$C. =$$

$$D. =$$

32 (2013 江苏扬州, 24, 10 分) 某校九 (1)、九 (2) 两班的班长交流了为四川雅安地震灾区捐款的情况:

(I) 九 (1) 班班长说: “我们班捐款总额为 1200 元, 我们班人数比你们班多 8 人.”

(II) 九 (2) 班班长说: “我们班捐款总额也为 1200 元, 我们班人均捐款比你们班人均捐款多 20%.”

请根据两个班长的对话, 求这两个班级每班的人均捐款数.

33 (2013 贵州安顺, 21, 10 分)

某市为进一步缓解交通拥堵现象, 决定修建一条从市中心到飞机场的轻轨铁路. 实际施工时, 每月的工效比原计划提高了 20%, 结果提前 5 个月完成这一工程. 求原计划完成这一工程的时间是多少个月?