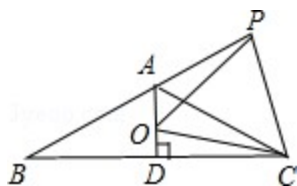


八年级数学提优练习题 2013.11

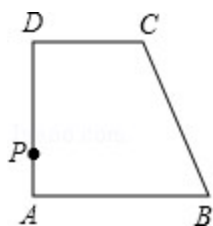
一. 选择题 (共7小题)

1. 已知如图等腰 $\triangle ABC$, $AB=AC$, $\angle BAC=120^\circ$, $AD \perp BC$ 于点D, 点P是BA延长线上一点, 点O是线段AD上一点, $OP=OC$, 下面的结论: ① $\angle APO + \angle DCO = 30^\circ$; ② $\triangle OPC$ 是等边三角形; ③ $AC=AO+AP$; ④ $S_{\triangle ABC} = S_{\text{四边形AOC P}}$. 其中正确的有()个.



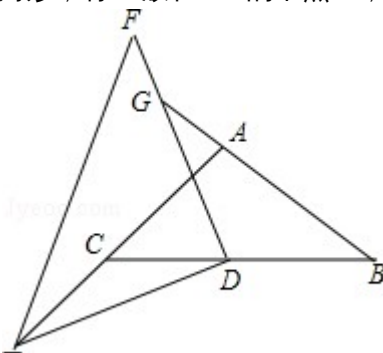
- A. ①②③ B. ①②④ C. ①③④ D. ①②③④

2. 如图, 四边形ABCD是直角梯形, $AB \parallel CD$, $AD \perp AB$, 点P是腰AD上的一个动点, 要使 $PC+PB$ 最小, 则点P应该满足()



- A. $PB=PC$ B. $PA=PD$ C. $\angle BPC=90^\circ$ D. $\angle APB = \angle DPC$

3. 如图, $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形, $\triangle DEF$ 是一个含 30° 角的直角三角形, 将D放在BC的中点上, 转动



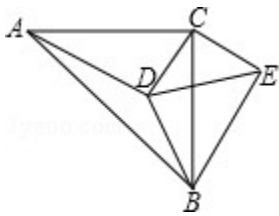
$\triangle DEF$, 设DE, DF分别交AC, BA的延长线于E, G, 则下列结论: **E**

- ① $AG=CE$ ② $DG=DE$
③ $BG - AC=CE$ ④ $S_{\triangle BDG} - S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$

其中总是成立的是()

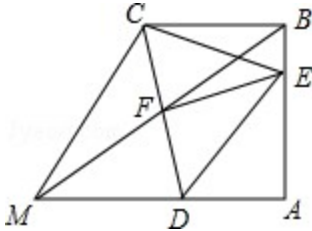
- A. ①②③ B. ①②③④ C. ②③④ D. ①②④

4. 如图: $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $\angle CAD=30^\circ$, $AC=BC=AD$, $CE \perp CD$, 且 $CE=CD$, 连接BD, DE, BE, 则下列结论: ① $\angle ECA=165^\circ$, ② $BE=BC$; ③ $AD \perp BE$; ④ $\frac{CD}{BD}=1$. 其中正确的是()



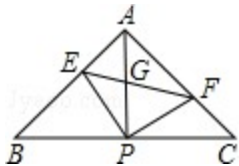
- A . ①②③ B . ①②④ C . ①③④ D . ①②③④

5. 如图, $BC \parallel AM$, $\angle A = 90^\circ$, $\angle BCD = 75^\circ$, 点 E 在 AB 上, $\triangle CDE$ 为等边三角形, BM 交 CD 于 F, 下列结论: ① $\angle ADE = 45^\circ$, ② $AB = BC$, ③ $EF \perp CD$, ④ 若 $\angle AMB = 30^\circ$, 则 $CF = DF$. 其中正确的有 ()



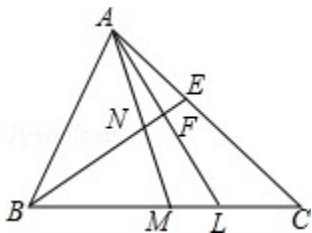
- A . ①②③ B . ①②④ C . ①③④ D . ②③④

6. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle BAC = 90^\circ$, 直角 $\angle EPF$ 的顶点 P 是 BC 的中点, 两边 PE、PF 分别交 AB、AC 于点 E、F, 连接 EF 交 AP 于 G. 给出四个结论: ① $AE = CF$; ② $EF = AP$; ③ $\triangle EPF$ 是等腰直角三角形; ④ $\angle AEP = \angle AGF$. 其中正确的结论有 ()



- A . 1 个 B . 2 个 C . 3 个 D . 4 个

7. 如图, AM、BE 是 $\triangle ABC$ 的角平分线, AM 交 BE 于 N, $AL \perp BE$ 于 F 交 BC 于 L, 若 $\angle ABC = 2\angle C$, 下列结论: ① $BE = EC$; ② $BF = AE + EF$; ③ $AC = BM + BL$; ④ $\angle MAL = \frac{1}{4}\angle ABC$, 其中正确的结论是 ()

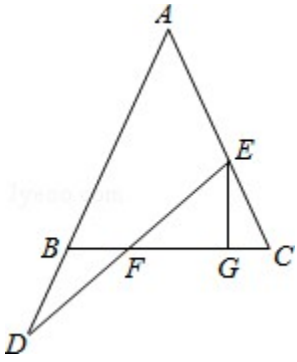


- A . ①②③ B . ①④ C . ①②③④ D . ①②

二. 解答题 (共 8 小题)

8. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, E 在线段 AC 上, D 在 AB 的延长线, 连 DE 交 BC 于 F, 过点 E 作 $EG \perp BC$ 于 G.

- (1) 若 $\angle A = 50^\circ$, $\angle D = 30^\circ$, 求 $\angle GEF$ 的度数;
 (2) 若 $BD = CE$, 求证: $FG = BF + CG$.



9. 如图，直角坐标系中，点 $B(a, 0)$ ，点 $C(0, b)$ ，点 A 在第一象限。若 a, b 满足 $(a-t)^2 + |b-t| = 0$ ($t > 0$)。

(1) 证明： $OB=OC$ ；

(2) 如图 1，连接 AB ，过 A 作 $AD \perp AB$ 交 y 轴于 D ，在射线 AD 上截取 $AE=AB$ ，连接 CE ， F 是 CE 的中点，连接 AF, OA ，当点 A 在第一象限内运动 (AD 不过点 C) 时，证明： $\angle OAF$ 的大小不变；

(3) 如图 2， B' 与 B 关于 y 轴对称， M 在线段 BC 上， N 在 CB' 的延长线上，且 $BM=NB'$ ，连接 MN 交 x 轴于点 T ，过 T 作 $TQ \perp MN$ 交 y 轴于点 Q ，求点 Q 的坐标。

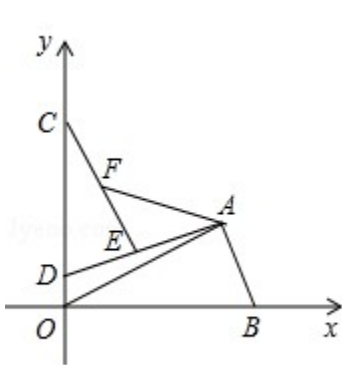


图1

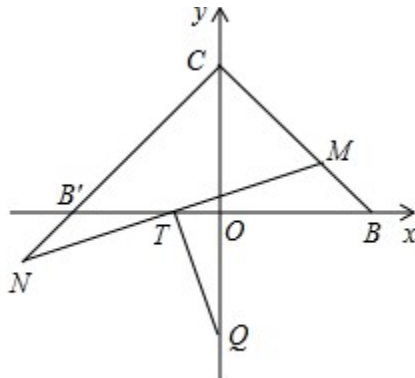


图2

10. 如图 1，在平面直角坐标系中，点 $A(4, 4)$ ，点 B, C 分别在 x 轴、 y 轴的正半轴上， $S_{\text{四边形}OBAC} = 16$ 。

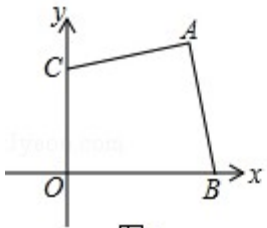


图1

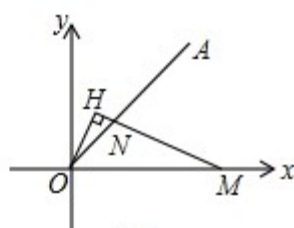


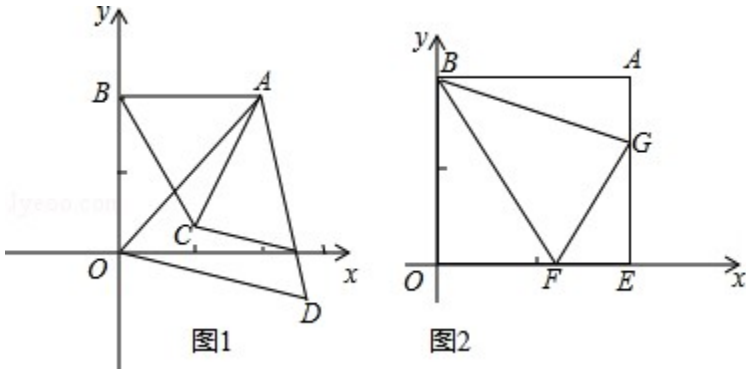
图2

(1) $\angle COA$ 的值为_____；

(2) 求 $\angle CAB$ 的度数；

(3) 如图 2，点 M, N 分别是 x 轴正半轴及射线 OA 上一点，且 $OH \perp MN$ 的延长线于 H ，满足 $\angle HON = \angle NMO$ ，请探究两条线段 MN, OH 之间的数量关系，并给出证明。

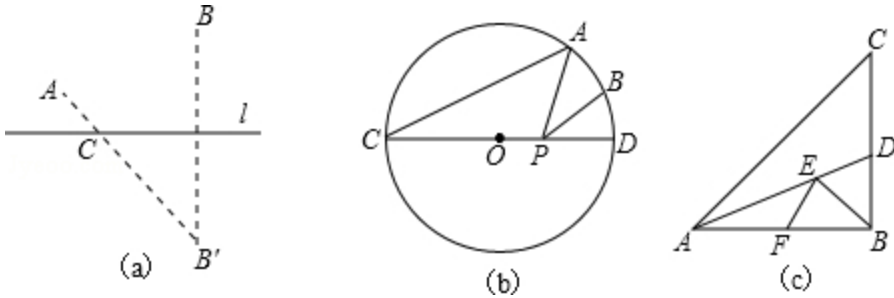
11. 如图，已知 $A(a, b)$ ， $AB \perp y$ 轴于 B ，且满足 $\sqrt{a-2} + (b-2)^2 = 0$ ，



- (1) 求 A 点坐标；
- (2) 分别以 AB，AO 为边作等边三角形 $\triangle ABC$ 和 $\triangle AOD$ ，如图 1 试判定线段 AC 和 DC 的数量关系和位置关系．
- (3) 如图 2 过 A 作 $AE \perp x$ 轴于 E，F，G 分别为线段 OE，AE 上的两个动点，满足 $\angle FBG = 45^\circ$ ，试探究 $\frac{OF+AG}{FG}$ 的值是否发生变化？如果不变，请说明理由并求其值；如果变化，请说明理由．

12. (2013·日照) 问题背景：

如图 (a)，点 A、B 在直线 l 的同侧，要在直线 l 上找一点 C，使 AC 与 BC 的距离之和最小，我们可以作出点 B 关于 l 的对称点 B'，连接 AB' 与直线 l 交于点 C，则点 C 即为所求．



(1) 实践运用：

如图 (b)，已知， $\odot O$ 的直径 CD 为 4，点 A 在 $\odot O$ 上， $\angle ACD = 30^\circ$ ，B 为弧 AD 的中点，P 为直径 CD 上一动点，则 BP+AP 的最小值为_____．

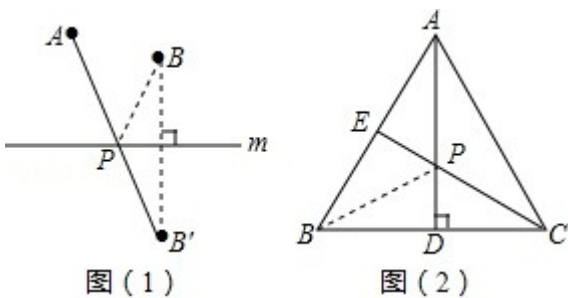
(2) 知识拓展：

如图 (c)，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $AB=10$ ， $\angle BAC=45^\circ$ ， $\angle BAC$ 的平分线交 BC 于点 D，E、F 分别是线段 AD 和 AB 上的动点，求 BE+EF 的最小值，并写出解答过程．

13. (2013·六盘水) (1) 观察发现

如图 (1)：若点 A、B 在直线 m 同侧，在直线 m 上找一点 P，使 AP+BP 的值最小，做法如下：

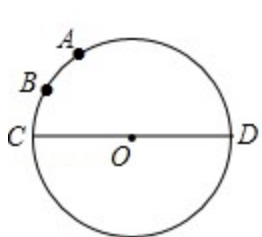
作点 B 关于直线 m 的对称点 B'，连接 AB'，与直线 m 的交点就是所求的点 P，线段 AB' 的长度即为 AP+BP 的最小值．



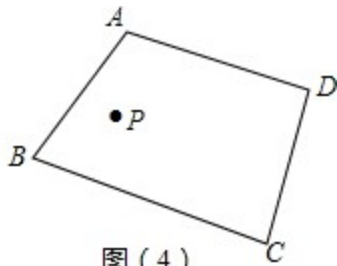
如图 (2)：在等边三角形 ABC 中， $AB=2$ ，点 E 是 AB 的中点，AD 是高，在 AD 上找一点 P，使 BP+PE 的值最小，做法如下：
作点 B 关于 AD 的对称点，恰好与点 C 重合，连接 CE 交 AD 于一点，则这点就是所求的点 P，故 BP+PE 的最小值为_____．

(2) 实践运用

如图(3)：已知 $\odot O$ 的直径 CD 为2， \widehat{AC} 的度数为 60° ，点 B 是 \widehat{AC} 的中点，在直径 CD 上作出点 P ，使 $BP+AP$ 的值最小，则 $BP+AP$ 的最小值为_____。



图(3)



图(4)

(3) 拓展延伸

如图(4)：点 P 是四边形 $ABCD$ 内一点，分别在边 AB 、 BC 上作出点 M 、点 N ，使 $PM+PN+MN$ 的值最小，保留作图痕迹，不写作法。

14. (2013·抚顺) 在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ， $\angle A=30^\circ$ ，点 D 是 AB 的中点， $DE \perp BC$ ，垂足为点 E ，连接 CD 。

(1) 如图1， DE 与 BC 的数量关系是_____；

(2) 如图2，若 P 是线段 CB 上一动点(点 P 不与点 B 、 C 重合)，连接 DP ，将线段 DP 绕点 D 逆时针旋转 60° ，得到线段 DF ，连接 BF ，请猜想 DE 、 BF 、 BP 三者之间的数量关系，并证明你的结论；

(3) 若点 P 是线段 CB 延长线上一动点，按照(2)中的作法，请在图3中补全图形，并直接写出 DE 、 BF 、 BP 三者之间的数量关系。

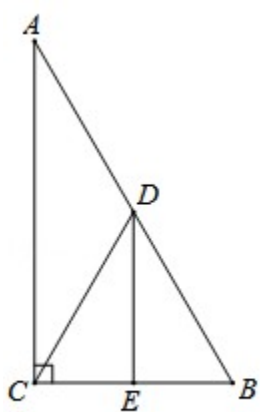


图1

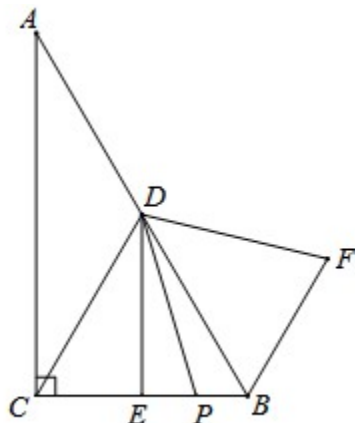


图2

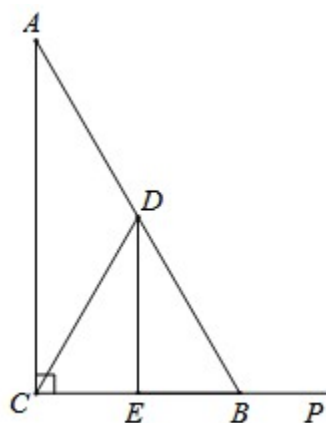


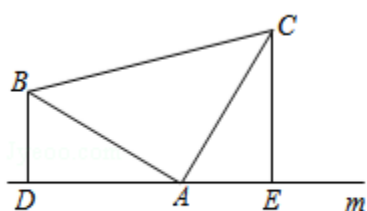
图3

15. (2013·东营) (1) 如图(1)，已知：在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC=90^\circ$ ， $AB=AC$ ，直线 m 经过点 A ， $BD \perp$ 直线 m ， $CE \perp$ 直线 m ，垂足分别为点 D 、 E 。

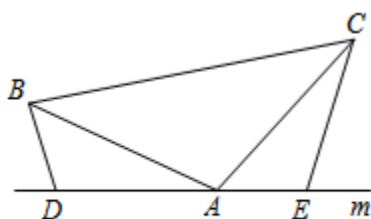
证明： $DE=BD+CE$ 。

(2) 如图(2)，将(1)中的条件改为：在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ， D 、 A 、 E 三点都在直线 m 上，并且有 $\angle BDA=\angle AEC=\angle BAC=\alpha$ ，其中 α 为任意锐角或钝角。请问结论 $DE=BD+CE$ 是否成立？如成立，请你给出证明；若不成立，请说明理由。

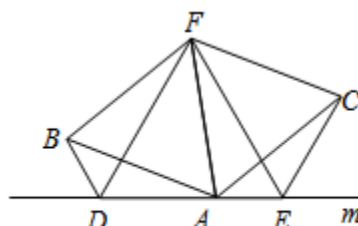
(3) 拓展与应用：如图(3)， D 、 E 是 D 、 A 、 E 三点所在直线 m 上的两动点(D 、 A 、 E 三点互不重合)，点 F 为 $\angle BAC$ 平分线上的一点，且 $\triangle ABF$ 和 $\triangle ACF$ 均为等边三角形，连接 BD 、 CE ，若 $\angle BDA=\angle AEC=\angle BAC$ ，试判断 $\triangle DEF$ 的形状。



(图1)



(图2)



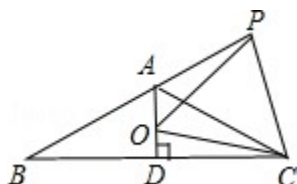
(图3)

八年级数学提优练习题 2013.11

参考答案与试题解析

一. 选择题 (共 7 小题)

1. 已知如图等腰 $\triangle ABC$, $AB=AC$, $\angle BAC=120^\circ$, $AD \perp BC$ 于点 D , 点 P 是 BA 延长线上一点, 点 O 是线段 AD 上一点, $OP=OC$, 下面的结论: ① $\angle APO + \angle DCO = 30^\circ$; ② $\triangle OPC$ 是等边三角形; ③ $AC=AO+AP$; ④ $S_{\triangle ABC} = S_{\text{四边形} AOC P}$. 其中正确的有 () 个.



A. ①②③

B. ①②④

C. ①③④

D. ①②③④

考点: 等腰三角形的判定与性质; 全等三角形的判定与性质; 等边三角形的判定与性质.

分析: ① 利用等边对等角, 即可证得: $\angle APO = \angle ABO$, $\angle DCO = \angle DBO$, 则

$\angle APO + \angle DCO = \angle ABO + \angle DBO = \angle ABD$, 据此即可求解;

② 证明 $\angle POC = 60^\circ$ 且 $OP = OC$, 即可证得 $\triangle OPC$ 是等边三角形;

③ 首先证明 $\triangle OPA \cong \triangle CPE$, 则 $AO = CE$, $AC = AE + CE = AO + AP$.

④ 过点 C 作 $CH \perp AB$ 于 H , 根据 $S_{\text{四边形} AOC P} = S_{\triangle ACP} + S_{\triangle AOC}$, 利用三角形的面积公式即可求解.

解答: 解: 连接 OB ,

$\because AB = AC, AD \perp BC$,

$\therefore BD = CD, \angle BAD = \frac{1}{2} \angle BAC = \frac{1}{2} \times 120^\circ = 60^\circ$,

$\therefore OB = OC, \angle ABC = 90^\circ - \angle BAD = 30^\circ$,

$\because OP = OC$,

$\therefore OB = OC = OP$,

$\therefore \angle APO = \angle ABO, \angle DCO = \angle DBO$,

$\therefore \angle APO + \angle DCO = \angle ABO + \angle DBO = \angle ABD = 30^\circ$;

故①正确;

$\because \angle APC + \angle DCP + \angle PBC = 180^\circ$,

$\therefore \angle APC + \angle DCP = 150^\circ$,

$\because \angle APO + \angle DCO = 30^\circ$,

$\therefore \angle OPC + \angle OCP = 120^\circ$,

$\therefore \angle POC = 180^\circ - (\angle OPC + \angle OCP) = 60^\circ$,

$\because OP = OC$,

$\therefore \triangle OPC$ 是等边三角形;

故②正确;

在 AC 上截取 $AE = PA$,

$\because \angle PAE = 180^\circ - \angle BAC = 60^\circ$,

$\therefore \triangle APE$ 是等边三角形,

$\therefore \angle PEA = \angle APE = 60^\circ, PE = PA$,

$\therefore \angle APO + \angle OPE = 60^\circ$,

$\because \angle OPE + \angle CPE = \angle CPO = 60^\circ$,

$\therefore \angle APO = \angle CPE$,

$\because OP=CP$,

在 $\triangle OPA$ 和 $\triangle CPE$ 中,

$$\begin{cases} PA=PE \\ \angle APO=\angle CPE, \\ OP=CP \end{cases}$$

$\therefore \triangle OPA \cong \triangle CPE$ (SAS),

$\therefore AO=CE$,

$\therefore AC=AE+CE=AO+AP$;

故③正确;

过点C作 $CH \perp AB$ 于H,

$\because \angle PAC = \angle DAC = 60^\circ$, $AD \perp BC$,

$\therefore CH=CD$,

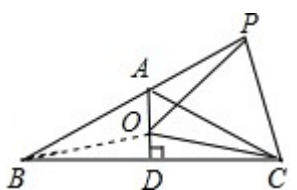
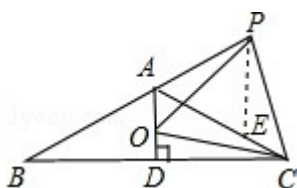
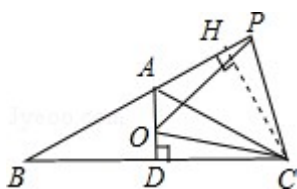
$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CH,$$

$$S_{\text{四边形} AOCF} = S_{\triangle ACP} + S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2} AP \cdot CH + \frac{1}{2} OA \cdot CD = \frac{1}{2} AP \cdot CH + \frac{1}{2} OA \cdot CH = \frac{1}{2} CH \cdot (AP + OA) = \frac{1}{2} CH \cdot AC,$$

$\therefore S_{\triangle ABC} = S_{\text{四边形} AOCF}$;

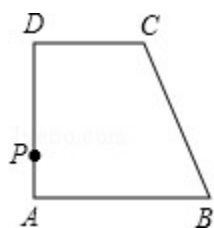
故④正确.

故选D.



点评: 本题考查了等腰三角形的判定与性质,关键是正确作出辅助线.

2. 如图, 四边形 ABCD 是直角梯形, $AB \parallel CD$, $AD \perp AB$, 点 P 是腰 AD 上的一个动点, 要使 $PC+PB$ 最小, 则点 P 应该满足 ()



A. $PB=PC$

B. $PA=PD$

C. $\angle BPC=90^\circ$

D. $\angle APB = \angle DPC$

考点: 轴对称-最短路线问题; 直角梯形. www.zxxk.com

专题: 压轴题; 动点型.

分析： 首先根据轴对称的知识，可知 P 点的位置是连接点 B 和点 C 关于 AD 的对称点 E 与 AD 的交点，利用轴对称和对顶角相等的性质可得。

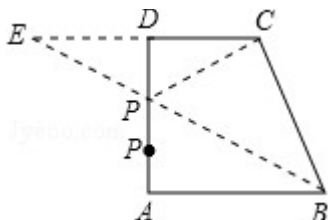
解答： 解：如图，作点 C 关于 AD 的对称点 E，连接 BE 交 AD 于 P，连接 CP。

根据轴对称的性质，得 $\angle DPC = \angle EPD$ ，

根据对顶角相等知 $\angle APB = \angle EPD$ ，

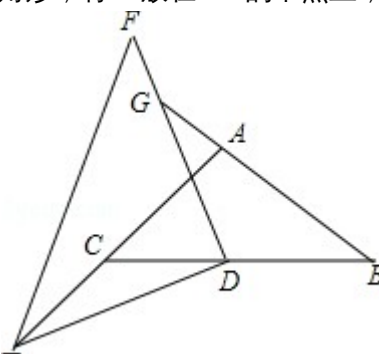
所以 $\angle APB = \angle DPC$ 。

故选 D。



点评： 此题的关键是应知点 P 是怎样确定的。要找直线上一个点和直线同侧的两个点的距离之和最小，则需要利用轴对称的性质进行确定。

3. 如图， $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形， $\triangle DEF$ 是一个含 30° 角的直角三角形，将 D 放在 BC 的中点上，转动



$\triangle DEF$ ，设 DE，DF 分别交 AC，BA 的延长线于 E，G，则下列结论：**E**

① $AG = CE$ ② $DG = DE$

③ $BG - AC = CE$ ④ $S_{\triangle BDG} - S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$

其中总是成立的是 ()

A. ①②③

B. ①②③④

C. ②③④

D. ①②④

考点： 旋转的性质；全等三角形的判定与性质。

专题： 开放型。

分析： 连 DA，由 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，D 点为 BC 的中点，根据等腰直角三角形的性质得

$AD \perp BC$ ， $AD = DC$ ， $\angle ACD = \angle CAD = 45^\circ$ ，得到 $\angle GAD = \angle ECD = 135^\circ$ ，由 $\angle EDF = 90^\circ$ ，根据同角的余角相等得到 $\angle 1 = \angle 2$ ，所以 $\triangle DAG \cong \triangle DCE$ ， $AG = EC$ ， $DG = DE$ ，由此可分别判断。

解答： 解：连 DA，如图，

$\because \triangle ABC$ 是等腰直角三角形，D 点为 BC 的中点，

$\therefore AD \perp BC$ ， $AD = DC$ ， $\angle ACD = \angle CAD = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle GAD = \angle ECD = 135^\circ$ ，

又 $\because \triangle DEF$ 是一个含 30° 角的直角三角形，

$\therefore \angle EDF = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle 1 = \angle 2$ ，

$\therefore \triangle DAG \cong \triangle DCE$ ，

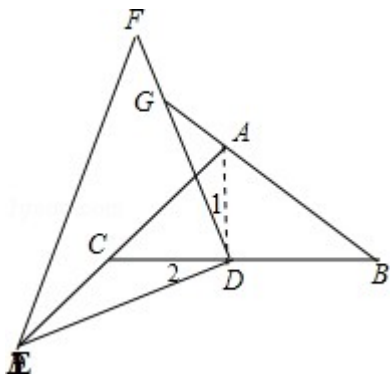
$\therefore AG = EC$ ， $DG = DE$ ，所以①②正确；

$\because AB = AC$ ，

$\therefore BG - AC = BG - AB = AG = EC$ ，所以③正确；

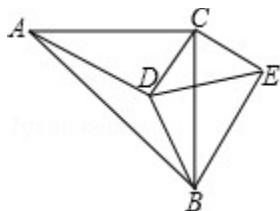
$\because S_{\triangle BDG} - S_{\triangle CDE} = S_{\triangle BDG} - S_{\triangle ADG} = S_{\triangle ADB} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$. 所以④正确 .

故选 B .



点评： 本题考查了旋转的性质：旋转前后的两个图形全等，对应点与旋转中心的连线段的夹角等于旋转角，对应点到旋转中心的距离相等 . 也考查了等腰直角三角形的性质，特别是斜边上的中线垂直斜边并且等于斜边的一半 .

4 . 如图： $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ， $\angle CAD=30^\circ$ ， $AC=BC=AD$ ， $CE \perp CD$ ，且 $CE=CD$ ，连接 BD ， DE ， BE ，则下列结论：① $\angle ECA=165^\circ$ ，② $BE=BC$ ；③ $AD \perp BE$ ；④ $\frac{CD}{BD}=1$. 其中正确的是 ()



A . ①②③

B . ①②④

C . ①③④

D . ①②③④

考点： 等腰直角三角形；全等三角形的判定与性质；等腰三角形的判定与性质；含 30 度角的直角三角形 .

分析： ① 根据： $\angle CAD=30^\circ$ ， $AC=BC=AD$ ，利用等腰三角形的性质和三角形内角和定理即可求出 $\angle ECA=165^\circ$ ，从而得证结论正确；

② 根据 $CE \perp CD$ ， $\angle ECA=165^\circ$ ，利用 SAS 求证 $\triangle ACD \cong \triangle BCE$ 即可得出结论；

③ 根据 $\angle ACB=90^\circ$ ， $\angle CAD=30^\circ$ ， $AC=BC$ ，利用等腰三角形的性质和 $\triangle ACD \cong \triangle BCE$ ，求出 $\angle CBE=30^\circ$ ，然后即可得出结论；

④ 过 D 作 $DM \perp AC$ 于 M，过 D 作 $DN \perp BC$ 于 N . 由 $\angle CAD=30^\circ$ ，可得 $CM=\frac{1}{2}AC$ ，求证

$\triangle CMD \cong \triangle CND$ ，可得 $CN=CM=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}BC$ ，从而得出 $CN=BN$. 然后即可得出结论 .

解答：

解：① $\because \angle CAD=30^\circ$ ， $AC=BC=AD$ ， $\therefore \angle ACD = \angle ADC = \frac{1}{2}(180^\circ - 30^\circ) = 75^\circ$ ，

$\because CE \perp CD$ ， $\therefore \angle DCE=90^\circ$ ，

$\therefore \angle ECA=165^\circ \therefore$ ① 正确；

② $\because CE \perp CD$ ， $\angle ECA=165^\circ$ (已证)，

$\therefore \angle BAE = \angle ECA - \angle ACB = 165 - 90 = 75^\circ$ ，

$\therefore \triangle ACD \cong \triangle BCE$ (SAS)，

$\therefore BE=BC$ ， \therefore ② 正确；

③ $\because \angle ACB=90^\circ$ ， $\angle CAD=30^\circ$ ， $AC=BC$ ，

$\therefore \angle CAB = \angle ACB = 45^\circ$

$\therefore \angle BAD = \angle BAC - \angle CAD = 45 - 30 = 15^\circ$ ，

$\therefore \triangle ACD \cong \triangle BCE$ ，

$\therefore \angle CBE=30^\circ$,
 $\therefore \angle ABF=45+30=75^\circ$,
 $\therefore \angle AFB=180 - 15 - 75=90^\circ$,
 $\therefore AD \perp BE$.

④证明：如图，

过D作DM⊥AC于M，过D作DN⊥BC于N．

$\therefore \angle CAD=30^\circ$ ，且 $DM=\frac{1}{2}AC$ ，

$\therefore AC=AD$ ， $\angle CAD=30^\circ$ ， $\therefore \angle ACD=75^\circ$ ，

$\therefore \angle NCD=90^\circ - \angle ACD=15^\circ$ ， $\angle MDC=\angle DMC - \angle ACD=15^\circ$ ，

$\therefore \triangle CMD \cong \triangle CND$ ，

$\therefore CN=CM=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}BC$ ，

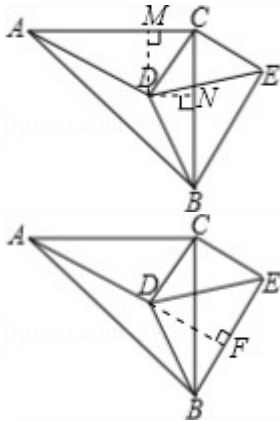
$\therefore CN=BN$ ．

$\therefore DN \perp BC$ ，

$\therefore BD=CD$ ． \therefore ④正确．

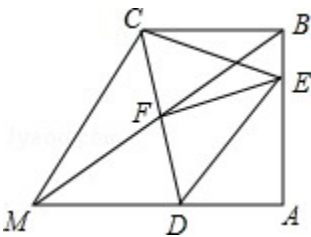
所以4个结论都正确．

故选D．



点评：此题主要考查等腰直角三角形，全等三角形的判定与性质，等腰三角形的判定与性质，含30度角的直角三角形等知识点的理解和掌握，此题有一定的拔高难度，属于难题．

5．如图， $BC \parallel AM$ ， $\angle A=90^\circ$ ， $\angle BCD=75^\circ$ ，点E在AB上， $\triangle CDE$ 为等边三角形，BM交CD于F，下列结论：① $\angle ADE=45^\circ$ ，② $AB=BC$ ，③ $EF \perp CD$ ，④若 $\angle AMB=30^\circ$ ，则 $CF=DF$ ．其中正确的有（ ）



A．①②③

B．①②④

C．①③④

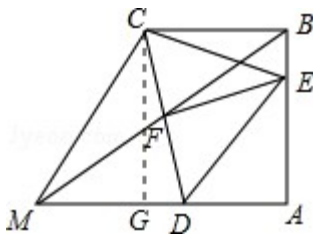
D．②③④

考点：直角梯形；等边三角形的性质；含30度角的直角三角形；等腰直角三角形．

分析：由 $BC \parallel AM$ 得 $\angle CDA=105^\circ$ ，根据等边三角形的性质得 $\angle CDE=60^\circ$ ，则 $\angle EDA=105^\circ - 60^\circ=45^\circ$ ；过C作 $CG \perp AM$ ，则四边形ABCG为矩形，于是 $\angle DCG=90^\circ - \angle BCD=15^\circ$ ，而 $\angle BCE=75^\circ - 60^\circ=15^\circ$ ，易证得 $Rt\triangle CBE \cong Rt\triangle CGD$ ，则 $BC=CG$ ，得到 $AB=BC$ ；由于 $AG=BC$ ，而 $AG \neq MD$ ，则 $CF:FD=BC:MD \neq 1$ ，不能得到F点是CD的中点，根据等边三角形的性质则不能得到 $EF \perp CD$ ；若 $\angle AMB=30^\circ$ ，则 $\angle CBF=30^\circ$ ，在 $Rt\triangle AMB$ 中根据含30度的直角三角形三边的关系得到 $BM=2AB$ ，则 $BM=2BC$ ，

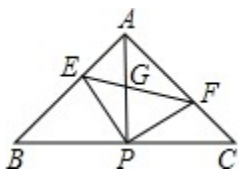
易得 $\angle BFC=75^\circ$ ，所以 $BF=BC$ ，得 $MF=BF$ ，由 $CB\parallel AM$ 得 $CF:FD=BF:MF=1$ ，即可有 $CF=DF$ 。

解答：解： $\because BC\parallel AM$ ，
 $\therefore \angle BCD+\angle CDA=180^\circ$ ，
 $\because \angle BCD=75^\circ$ ，
 $\therefore \angle CDA=105^\circ$ ，
 $\because \triangle CDE$ 为等边三角形，
 $\therefore \angle CDE=60^\circ$ ，
 $\therefore \angle EDA=105^\circ-60^\circ=45^\circ$ ，所以①正确；
 过 C 作 $CG\perp AM$ ，如图，
 $\because \angle A=90^\circ$ ，
 \therefore 四边形 $ABCG$ 为矩形，
 $\therefore \angle DCG=90^\circ-\angle BCD=15^\circ$ ，
 而 $\triangle CDE$ 为等边三角形，
 $\therefore \angle DCE=60^\circ$ ， $CE=CD$ ，
 $\therefore \angle BCE=75^\circ-60^\circ=15^\circ$ ，
 $\therefore \text{Rt}\triangle CBE\cong\text{Rt}\triangle CGD$ ，
 $\therefore BC=CG$ ，
 $\therefore AB=BC$ ，所以②正确；
 $\because AG=BC$ ，而 $AG\neq MD$ ，
 $\therefore CF:FD=BC:MD\neq 1$ ，
 $\therefore F$ 点不是 CD 的中点，
 $\therefore EF$ 不垂直 CD ，所以③错误；
 若 $\angle AMB=30^\circ$ ，则 $\angle CBF=30^\circ$ ，
 \therefore 在 $\text{Rt}\triangle AMB$ 中， $BM=2AB$ ，
 $\therefore BM=2BC$ ，
 $\because \angle BCD=75^\circ$ ，
 $\therefore \angle BFC=180^\circ-30^\circ-75^\circ=75^\circ$ ，
 $\therefore BF=BC$ ，
 $\therefore MF=BF$ ，
 而 $CB\parallel AM$ ，
 $\therefore CF:FD=BF:MF=1$ ，
 $\therefore CF=FD$ ，所以④正确。
 故选B。



点评：本题考查了直角梯形的性质：有一组对边平行，另一组对边不平行，且有一个直角。也考查了矩形和等边三角形的性质、含 30° 的直角三角形三边的关系以及相似三角形的判定与性质。

6. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ， $\angle BAC=90^\circ$ ，直角 $\angle EPF$ 的顶点 P 是 BC 的中点，两边 PE 、 PF 分别交 AB 、 AC 于点 E 、 F ，连接 EF 交 AP 于 G 。给出四个结论：① $AE=CF$ ；② $EF=AP$ ；③ $\triangle EPF$ 是等腰直角三角形；④ $\angle AEP=\angle AGF$ 。其中正确的结论有（ ）



A . 1 个

B . 2 个

C . 3 个

D . 4 个

考点：全等三角形的判定与性质；等腰直角三角形．

分析：根据等腰直角三角形的性质得： $AP \perp BC$ ， $AP = \frac{1}{2}BC$ ， AP 平分 $\angle BAC$ ．所以可证 $\angle C = \angle EAP$ ；

$\angle FPC = \angle EPA$ ； $AP = PC$ ．即证得 $\triangle APE$ 与 $\triangle CPF$ 全等．根据全等三角形性质判断结论是否正确．

解答：解： $\because AB = AC$ ， $\angle BAC = 90^\circ$ ，直角 $\angle EPF$ 的顶点 P 是 BC 的中点，

$\therefore AP \perp BC$ ， $AP = \frac{1}{2}BC = PC$ ， $\angle BAP = \angle CAP = 45^\circ = \angle C$ ．

$\therefore \angle APF + \angle FPC = 90^\circ$ ， $\angle APF + \angle APE = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle FPC = \angle EPA$ ．

$\therefore \triangle APE \cong \triangle CPF$ (ASA) ．

\therefore ① $AE = CF$ ；③ $EP = PF$ ，即 $\triangle EPF$ 是等腰直角三角形；

$\because \triangle ABC$ 是等腰直角三角形， P 是 BC 的中点，

$\therefore AP = \frac{1}{2}BC$ ，

$\because EF$ 不是 $\triangle ABC$ 的中位线，

$\therefore EF \neq AP$ ，故②错误；

④ $\because \angle AGF = \angle EGP = 180^\circ - \angle APE - \angle PEF = 180^\circ - \angle APE - 45^\circ$ ，

$\angle AEP = 180^\circ - \angle APE - \angle EAP = 180^\circ - \angle APE - 45^\circ$ ，

$\therefore \angle AEP = \angle AGF$ ．

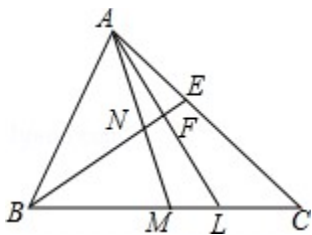
故正确的有①、③、④，共三个．

因此选 C．

点评：此题考查全等三角形的判定和性质，综合性较强．

7．如图， AM 、 BE 是 $\triangle ABC$ 的角平分线， AM 交 BE 于 N ， $AL \perp BE$ 于 F 交 BC 于 L ，若 $\angle ABC = 2\angle C$ ，下列结论：

① $BE = EC$ ；② $BF = AE + EF$ ；③ $AC = BM + BL$ ；④ $\angle MAL = \frac{1}{4}\angle ABC$ ，其中正确的结论是 ()



A . ①②③

B . ①④

C . ①②③④

D . ①②

考点：全等三角形的判定与性质；等腰三角形的判定与性质．

分析：根据角平分线定义求出 $\angle ABE = \angle EBC = \angle C$ ，根据等角对等边求出 $BE = CE$ ，即可判断①；

证 $\triangle ABE \sim \triangle ACB$ ，推出 $AB^2 = AE \times AC$ ，求出 $AF^2 = AB^2 - BF^2 = AE^2 - EF^2$ ，把 $AB^2 = AE \times AC$ 代入上式即可求出 $BF = AE + EF$ ，即可判断②；

延长 AB 到 N ，使 $BN = BM$ ，连接 MN ，证 $\triangle AMC \cong \triangle AMN$ ， $\triangle AFB \cong \triangle BLF$ ，推出 $AB = BL$ ，即可判断③；

设 $\angle LAC = x^\circ$ ， $\angle LAM = y^\circ$ ，则 $\angle BAM = \angle MAC = (x + y)^\circ$ ，证 $\triangle AFB \cong \triangle BLF$ 推出

$\angle BAF = \angle BLF$ ， $\angle BAF = \angle BAM + \angle MAL = x^\circ + y^\circ + y^\circ$ ， $\angle BLA = \angle C + \angle LAC = \angle C + x^\circ$ ，得出方程

$x^\circ + y^\circ + y^\circ = \angle C + x^\circ$ ，求出 $\angle C = 2y^\circ$ ， $\angle ABC = 4y^\circ$ ，即可判断④。

解答：解： \because BE 是 $\angle ABC$ 的角平分线，

$$\therefore \angle EBC = \angle ABE = \frac{1}{2} \angle ABC,$$

$$\therefore \angle ABC = 2 \angle C,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle EBC = \angle C,$$

$$\therefore BE = EC, \therefore \textcircled{1} \text{正确};$$

$$\therefore \angle ABE = \angle ACB, \angle BAC = \angle EAB$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle ACB,$$

$$\therefore \frac{AE}{AB} = \frac{AB}{AC},$$

$$\therefore AB^2 = AE \times AC,$$

在 $\text{Rt}\triangle AFB$ 与 $\text{Rt}\triangle AFE$ 中，由勾股定理得： $AF^2 = AB^2 - BF^2 = AE^2 - EF^2$ ，

把 $AB^2 = AE \times AC$ 代入上式得：

$$AE \times AC - BF^2 = AE^2 - EF^2,$$

$$\text{则 } BF^2 = AC \times AE - AE^2 + EF^2 = AE \times (AC - AE) + EF^2 = AE \times EC + EF^2 = AE \times BE + EF^2,$$

$$\text{即 } (BE - EF)^2 = AE \times BE + EF^2,$$

$$\therefore BE^2 - 2BE \times EF + EF^2 = AE \times BE + EF^2,$$

$$\therefore BE^2 - 2BE \times EF = AE \times BE,$$

$$\therefore BE - 2EF = AE,$$

$$BE - EF = AE + EF,$$

$$\text{即 } BF = AE + EF, \therefore \textcircled{2} \text{正确};$$

延长 AB 到 N' ，使 $BN = BM$ ，连接 MN' ，则 $\triangle BMN'$ 为等腰三角形，

$$\therefore \angle BN'M = \angle BMN',$$

$$\triangle BN'M \text{ 的一个外角 } \angle ABC = \angle BN'M + \angle BMN' = 2 \angle BN'M,$$

$$\text{则 } \angle BN'M = \angle ACB,$$

在 $\triangle AMC$ 与 $\triangle AMN'$ 中

$$\begin{cases} \angle MAC = \angle MAN' \\ \angle C = \angle N' \\ AM = AM \end{cases},$$

$$\therefore \triangle AMC \cong \triangle AMN' \text{ (AAS)},$$

$$\therefore AN' = AC = AB + BN' = AB + BM,$$

又 $\because AL \perp BE$ ，

$$\therefore \angle AFB = \angle LFB = 90^\circ,$$

在 $\triangle AFB$ 与 $\triangle LFB$ 中，

$$\begin{cases} \angle AFB = \angle LFB \\ BF = BF \\ \angle ABF = \angle LBF \end{cases},$$

$$\therefore \triangle AFB \cong \triangle BLF \text{ (ASA)},$$

$$\therefore AB = BL,$$

则 $AN' = AC = AB + BN' = AB + BM = BM + BL$ ，即 $AC = BM + BL$ ， $\therefore \textcircled{3}$ 正确；

设 $\angle LAC = x^\circ$ ， $\angle LAM = y^\circ$ ，

$$\therefore AM \text{ 平分 } \angle BAC,$$

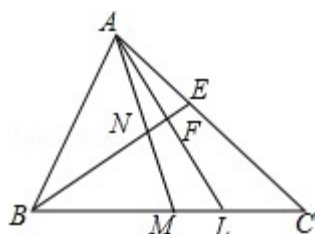
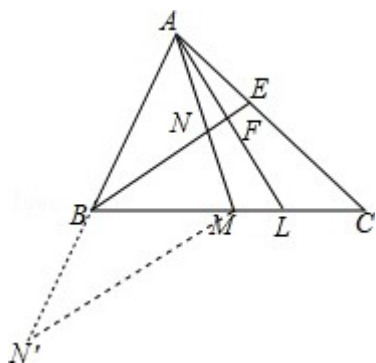
$$\therefore \angle BAM = \angle MAC = (x+y)^\circ.$$

$$\therefore \triangle AFB \cong \triangle BLF,$$

$$\therefore \angle BAF = \angle BLF,$$

$$\therefore \angle BAF = \angle BAM + \angle MAL = x^\circ + y^\circ + y^\circ, \angle BLA = \angle C + \angle LAC = \angle C + x^\circ,$$

$\therefore x^\circ + y^\circ + y^\circ = \angle C + x^\circ$,
 $\therefore \angle C = 2y^\circ$,
 $\therefore \angle ABC = 2\angle C$,
 $\therefore \angle ABC = 4y^\circ$,
 即 $\angle MAL = \frac{1}{4}\angle ABC$,
 \therefore ④ 正确 .
 故选 C .

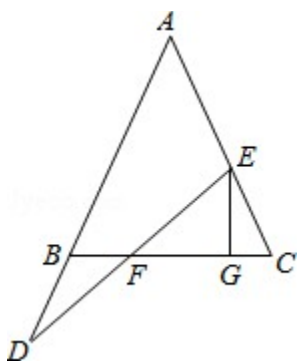


点评： 本题考查了勾股定理，相似三角形的性质和判定，角平分线性质的性质，相似三角形的性质和判定等知识点的综合运用 .

二 . 解答题 (共 8 小题)

8 . 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ，E 在线段 AC 上，D 在 AB 的延长线，连 DE 交 BC 于 F，过点 E 作 $EG \perp BC$ 于 G .

- (1) 若 $\angle A=50^\circ$ ， $\angle D=30^\circ$ ，求 $\angle GEF$ 的度数；
- (2) 若 $BD=CE$ ，求证： $FG=BF+CG$.



考点： 等腰三角形的性质；全等三角形的判定与性质 .

专题： 证明题 .

分析： (1) 根据等腰三角形两底角相等求出 $\angle C$ ，再根据直角三角形两锐角互余求出 $\angle CEG$ ，然后根据三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和求出 $\angle CEF$ ，然后计算即可得解；

(2) 过点 E 作 $EH \parallel AB$ 交 BC 于 H，根据两直线平行，同位角相等可得 $\angle ABC = \angle EHC$ ，内错角相等可得 $\angle D = \angle FEH$ ，然后求出 $\angle EHC = \angle C$ ，再根据等角对等边可得 $EC = EH$ ，然后求出 $BD = EH$ ，再利用“角角边”证明 $\triangle BDF$ 和 $\triangle HEF$ 全等，根据全等三角形对应边相等可得 $BF = FH$ ，根据等腰三角形三线合一的性质可

得 $CG=HG$ ，即可得证。

解答：(1) 解： $\because \angle A=50^\circ$ ，

$$\therefore \angle C = \frac{1}{2} (180^\circ - \angle A) = \frac{1}{2} (180^\circ - 50^\circ) = 65^\circ,$$

$\because EG \perp BC$ ，

$$\therefore \angle CEG = 90^\circ - \angle C = 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ,$$

$\because \angle A=50^\circ$ ， $\angle D=30^\circ$ ，

$$\therefore \angle CEF = \angle A + \angle D = 50^\circ + 30^\circ = 80^\circ,$$

$$\therefore \angle GEF = \angle CEF - \angle CEG = 80^\circ - 25^\circ = 55^\circ;$$

(2) 证明：过点 E 作 $EH \parallel AB$ 交 BC 于 H ，

则 $\angle ABC = \angle EHC$ ， $\angle D = \angle FEH$ ，

$\because AB=AC$ ，

$\therefore \angle ABC = \angle C$ ，

$\therefore \angle EHC = \angle C$ ，

$\therefore EC=EH$ ，

$\because BD=CE$ ，

$\therefore BD=EH$ ，

在 $\triangle BDF$ 和 $\triangle HEF$ 中，

$$\begin{cases} \angle D = \angle FEH \\ \angle EFH = \angle DFB \\ BD = EH \end{cases}$$

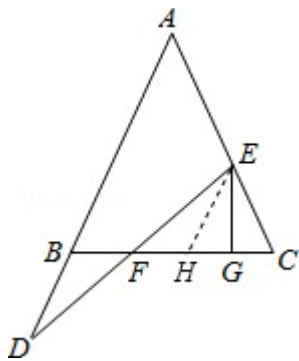
$\therefore \triangle BDF \cong \triangle HEF$ (AAS)，

$\therefore BF=FH$ ，

又 $\because EC=EH$ ， $EG \perp BC$ ，

$\therefore CG=HG$ ，

$\therefore FG=FH+HG=BF+CG$ 。



点评：本题考查了等腰三角形的性质，全等三角形的判定与性质，主要利用了等腰三角形两底角相等的性质，等角对等边的性质，(2) 作辅助线构造出全等三角形是解题的关键。

9. 如图，直角坐标系中，点 $B(a, 0)$ ，点 $C(0, b)$ ，点 A 在第一象限。若 a, b 满足 $(a-t)^2 + |b-t| = 0$ ($t > 0$)。

(1) 证明： $OB=OC$ ；

(2) 如图 1，连接 AB ，过 A 作 $AD \perp AB$ 交 y 轴于 D ，在射线 AD 上截取 $AE=AB$ ，连接 CE ， F 是 CE 的中点，连接 AF ， OA ，当点 A 在第一象限内运动 (AD 不过点 C) 时，证明： $\angle OAF$ 的大小不变；

(3) 如图 2， B' 与 B 关于 y 轴对称， M 在线段 BC 上， N 在 CB' 的延长线上，且 $BM=NB'$ ，连接 MN 交 x 轴于点 T ，过 T 作 $TQ \perp MN$ 交 y 轴于点 Q ，求点 Q 的坐标。

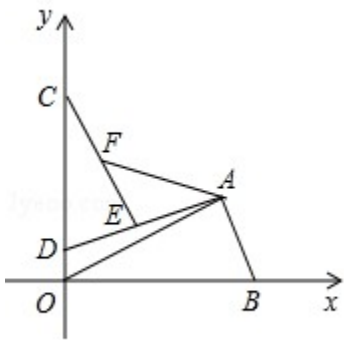


图1

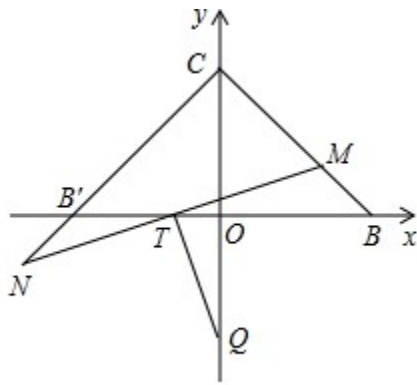


图2

考点：全等三角形的判定与性质；非负数的性质：绝对值；非负数的性质：偶次方；坐标与图形性质；等腰直角三角形．

分析：（1）根据 $a=t, b=t$ ，推出 $a=b$ 即可；

（2）延长 AF 至 T ，使 $TF=AF$ ，连接 TC, TO ，证 $\triangle TCF \cong \triangle AEF$ ，推出 $CT=AE, \angle TCF = \angle AEF$ ，再证 $\triangle TCO \cong \triangle ABO$ ，推出 $TO=AO, \angle TOC = \angle AOB$ ，求出 $\triangle TAO$ 为等腰直角三角形即可；

（3）连接 $MQ, NQ, BQ, B'Q$ ，过 M 作 $MH \parallel CN$ 交 x 轴于 H ，证 $\triangle NTB' \cong \triangle MTH$ ，推出 $TN=MT$ ，证 $\triangle NQB' \cong \triangle MQB$ ，推出 $\angle NB'Q = \angle CBQ$ ，求出 $\triangle QBQ'$ 是等腰直角三角形即可．

解答：（1）解： $\because a, b$ 满足 $(a-t)^2 + |b-t| = 0 (t > 0)$ ．

$$\therefore a-t=0, b-t=0,$$

$$\therefore a=t, b=t,$$

$$\therefore a=b,$$

$$\therefore B(t, 0), \text{ 点 } C(0, t)$$

$$\therefore OB=OC;$$

（2）证明：延长 AF 至 T ，使 $TF=AF$ ，连接 TC, TO ，

$\because F$ 为 CE 中点，

$$\therefore CF=EF,$$

在 $\triangle TCF$ 和 $\triangle AEF$ 中

$$\begin{cases} CF=EF \\ \angle CFT = \angle EFA \\ FT=AF \end{cases}$$

$\therefore \triangle TCF \cong \triangle AEF (SAS)$ ，

$\therefore CT=AE, \angle TCF = \angle AEF$ ，

$\therefore TC \parallel AD$ ，

$\therefore \angle TCD = \angle CDA$ ，

$\because AB=AE$ ，

$\therefore TC=AB$ ，

$\because AD \perp AB, OB \perp OC$ ，

$\therefore \angle COB = \angle BAD = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle ABO + \angle ADO = 180^\circ$ ，

$\because \angle ADO + \angle ADC = 180^\circ$ ，

$\therefore \angle ADC = \angle ABC$ ，

$\because \angle TCD = \angle CDA$ ，

$\therefore \angle TCD = \angle ABO$ ，

在 $\triangle TCO$ 和 $\triangle ABO$ 中

$$\begin{cases} TC=AB \\ \angle TCO=\angle ABO \\ OC=OB \end{cases}$$

$\therefore \triangle TCO \cong \triangle ABO$ (SAS) ,
 $\therefore TO=AO$, $\angle TOC = \angle AOB$,
 $\therefore \angle AOB + \angle AOC = 90^\circ$,
 $\therefore \angle TOC + \angle AOC = 90^\circ$,
 $\therefore \triangle TAO$ 为等腰直角三角形 ,
 $\therefore \angle OAF = 45^\circ$;

(3) 解 : 连接 MQ , NQ , BQ , $B'Q$, 过 M 作 $MH \parallel CN$ 交 x 轴于 H ,
 $\therefore B$ 和 B' 关于关于 y 轴对称 , C 在 y 轴上 ,

$\therefore CB=CB'$,
 $\therefore \angle CBB' = \angle CB'B$,
 $\therefore MH \parallel CN$,
 $\therefore \angle MHB = \angle CB'B$,
 $\therefore \angle MHB = \angle CBB'$,
 $\therefore MH=BM$,
 $\therefore BM=B'N$,
 $\therefore MH=B'N$,
 $\therefore MH \parallel CN$,

$\therefore \angle NB'T = \angle MHT$,
 在 $\triangle NTB'$ 和 $\triangle MTH$ 中

$$\begin{cases} \angle NB'T = \angle MHT \\ \angle B'TN = \angle MTH \\ B'N = MH \end{cases}$$

$\therefore \triangle NTB' \cong \triangle MTH$,
 $\therefore TN=MT$, 又 $TQ \perp MN$,
 $\therefore MQ=NQ$,
 $\therefore CQ$ 垂直平分 BB' ,
 $\therefore BQ=B'Q$,

\therefore 在 $\triangle NQB'$ 和 $\triangle MQB$ 中

$$\begin{cases} B'N = BM \\ B'Q = BQ \\ NQ = MQ \end{cases}$$

$\therefore \triangle NQB' \cong \triangle MQB$ (SSS) ,
 $\therefore \angle NB'Q = \angle CBQ$,

而 $\angle NB'Q + \angle CB'Q = 180^\circ$

$\therefore \angle CBQ + \angle CB'Q = 180^\circ$
 $\therefore \angle B'CB + \angle B'QB = 180^\circ$,
 又 $\angle B'CB = 90^\circ$,
 $\therefore \angle B'QB = 90^\circ$

$\therefore \triangle BQB'$ 是等腰直角三角形 ,
 $\therefore OQ=OB=t$,
 $\therefore Q(0, -t)$.

$\angle HON = \angle NMO = \angle LMN$ ，求出 $OL = ML$ ，证 $\triangle OLP \cong \triangle MLN$ ，推出 $MN = OP$ ，即可得出答案。

解答： 解：(1) 过 A 作 $AN \perp OC$ 于 N， $AM \perp OB$ 于 M，
 则 $\angle ANO = \angle AMO = \angle COB = 90^\circ$ ，
 $\because A(4, 4)$ ，
 $\therefore AN = AM = 4$ ，
 \therefore 四边形 NOMA 是正方形，
 $\therefore \angle COA = \frac{1}{2} \angle COB = \frac{1}{2} \times 90^\circ = 45^\circ$ 。

故答案为： 45° ；

(2) \because 四边形 NOMA 是正方形，
 $\therefore AM = AN = 4$ ， $OM = ON = 4$ ，
 $\therefore \frac{1}{2} OC \times AN + \frac{1}{2} OB \times AM = 16$ ，

$\therefore OC + OB = 8 = ON + OM$ ，

即 $ON - OC = OB - OM$ ，

$\therefore CN = BM$ ，

在 $\triangle ANC$ 和 $\triangle AMB$ 中，

$$\begin{cases} AN = AM \\ \angle ANC = \angle AMB \\ NC = MB \end{cases}$$

$\therefore \triangle ANC \cong \triangle AMB$ (SAS)，

$\therefore \angle NAC = \angle MAB$ ，

$\therefore \angle CAB = \angle CAM + \angle MAB = \angle NAM = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ ，

即 $\angle CAB = 90^\circ$ ；

(3) $MN = 2OH$ ，

证明：在 $Rt\triangle OMH$ 中， $\angle HON + \angle NMO + \angle NOM = 90^\circ$ ，

又 $\because \angle NOM = 45^\circ$ ， $\angle HON = \angle NMO$ ，

$\therefore \angle HON = \angle NMO = 22.5^\circ$ ，

延长 OH 至点 P 使 $PH = OH$ ，连接 MP 交 OA 于 L，

$\therefore OM = MP$ ， $\angle OMP = 2 \angle OMN = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle HON = \angle NMO = \angle LMN$ ，

$\therefore \angle OLM = 90^\circ = \angle PLO$ ，

$\therefore OL = ML$ ，

在 $\triangle OLP$ 和 $\triangle MLN$ 中，

$$\begin{cases} \angle PLO = \angle NLM \\ OL = LM \\ \angle POL = \angle LMN = 22.5^\circ \end{cases}$$

$\therefore \triangle OLP \cong \triangle MLN$ (ASA)，

$\therefore MN = OP$ ，

$\therefore OP = 2HO$ ，

$\therefore MN = 2HO$ 。

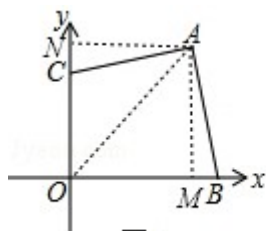


图1

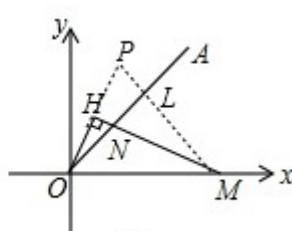
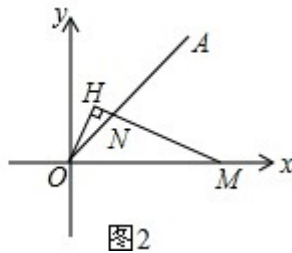
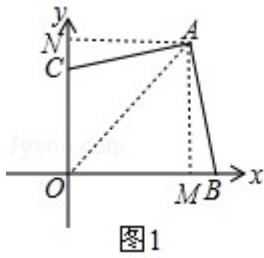
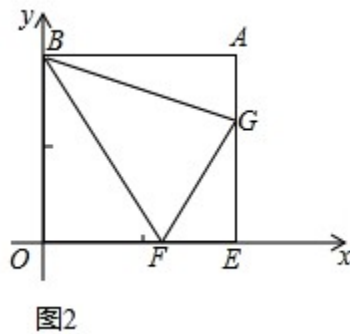
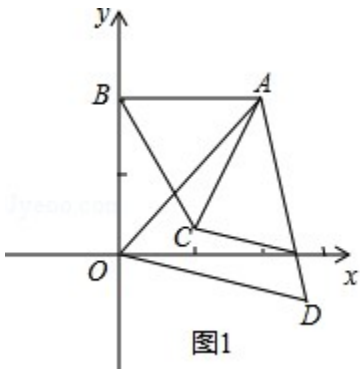


图2



点评： 本题考查了坐标与图形性质，等腰三角形的性质和判定，正方形的性质和判定，全等三角形的性质和判定等知识点的应用，题目综合性比较强，有一定的难度．

11．如图，已知 $A(a, b)$ ， $AB \perp y$ 轴于 B ，且满足 $\sqrt{a-2} + (b-2)^2 = 0$ ，



(1) 求 A 点坐标；

(2) 分别以 AB ， AO 为边作等边三角形 $\triangle ABC$ 和 $\triangle AOD$ ，如图 1 试判定线段 AC 和 DC 的数量关系和位置关系．

(3) 如图 2 过 A 作 $AE \perp x$ 轴于 E ， F ， G 分别为线段 OE ， AE 上的两个动点，满足 $\angle FBG = 45^\circ$ ，试探究 $\frac{OF+AG}{FG}$ 的值是否发生变化？如果不变，请说明理由并求其值；如果变化，请说明理由．

考点： 全等三角形的判定与性质；非负数的性质：偶次方；非负数的性质：算术平方根；坐标与图形性质；等边三角形的性质．

专题： 探究型．

分析： (1) 根据二次根式以及偶次方都是非负数，两个非负数的和是 0，则每个数一定同时等于 0，即可求解；
(2) 连接 OC ，只要证明 OC 是 $\angle AOD$ 的角平分线即可判断 $AC=CD$ ，求出 $\angle ACD$ 的度数即可判断位置关系；

(3) 延长 GA 至点 M ，使 $AM=OF$ ，连接 BM ，由全等三角形的判定定理得出 $\triangle BAM \cong \triangle BOF$ ， $\triangle FBG \cong \triangle MBG$ ，故可得出 $FG=GM=AG+OF$ ，由此即可得出结论．

解答： 解：(1) 根据题意得： $a-2=0$ 且 $b-2=0$ ，
解得： $a=2$ ， $b=2$ ，
则 A 的坐标是 $(2, 2)$ ；

(2) $AC=CD$ ，且 $AC \perp CD$ ．

如图 1，连接 OC ， CD ，

$\because A$ 的坐标是 $(2, 2)$ ，

$\therefore AB=OB=2$ ，

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形，

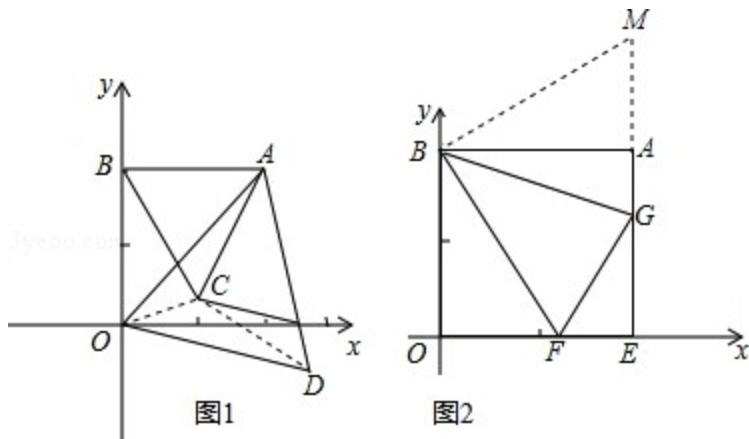
$\therefore \angle OBC=30^\circ$ ， $OB=BC$ ，

$\therefore \angle BOC=\angle BCO=75^\circ$ ，

\because 在直角 $\triangle ABO$ 中， $\angle BOA=45^\circ$ ，

$\therefore \angle AOC=\angle BOC-\angle BOA=75^\circ-45^\circ=30^\circ$ ，

$\because \triangle OAD$ 是等边三角形，
 $\therefore \angle DOC = \angle AOC = 30^\circ$ ，
 即 OC 是 $\angle AOD$ 的角平分线，
 $\therefore OC \perp AD$ ，且 OC 平分 AD ，
 $\therefore AC = DC$ ，
 $\therefore \angle ACO = \angle DCO = 60^\circ + 75^\circ = 135^\circ$ ，
 $\therefore \angle ACD = 360^\circ - 135^\circ - 135^\circ = 90^\circ$ ，
 $\therefore AC \perp CD$ ，
 故 $AC = CD$ ，且 $AC \perp CD$ 。



(3) 不变。

延长 GA 至点 M ，使 $AM = OF$ ，连接 BM ，

\therefore 在 $\triangle BAM$ 与 $\triangle BOF$ 中，

$$\begin{cases} AB = OB \\ \angle BAM = \angle BOF \\ AM = OF \end{cases}$$

$\therefore \triangle BAM \cong \triangle BOF$ (SAS)，

$\therefore \angle ABM = \angle OBF$ ， $BF = BM$ ，

$\therefore \angle OBF + \angle ABG = 90^\circ - \angle FBG = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle MBG = 45^\circ$ ，

\therefore 在 $\triangle FBG$ 与 $\triangle MBG$ 中，

$$\begin{cases} BM = BF \\ \angle MBG = \angle FBG \\ BG = BG \end{cases}$$

$\therefore \triangle FBG \cong \triangle MBG$ (SAS)，

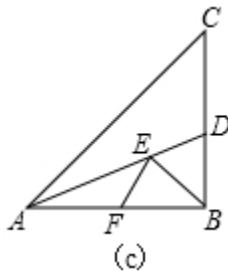
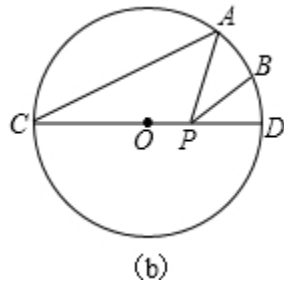
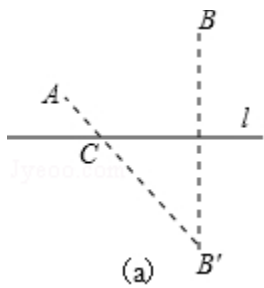
$\therefore FG = GM = AG + OF$ ，

$$\therefore \frac{OF + AG}{FG} = 1.$$

点评： 本题考查的是全等三角形的判定与性质，涉及到非负数的性质及等边三角形的性质等知识，难度适中。

12. (2013·日照) 问题背景：

如图 (a)，点 A 、 B 在直线 l 的同侧，要在直线 l 上找一点 C ，使 AC 与 BC 的距离之和最小，我们可以作出点 B 关于 l 的对称点 B' ，连接 AB' 与直线 l 交于点 C ，则点 C 即为所求。 www.



(1) 实践运用：

如图 (b) ，已知， $\odot O$ 的直径 CD 为 4，点 A 在 $\odot O$ 上， $\angle ACD=30^\circ$ ， B 为弧 AD 的中点， P 为直径 CD 上一动点，则 $BP+AP$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$ 。

(2) 知识拓展：

如图 (c) ，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $AB=10$ ， $\angle BAC=45^\circ$ ， $\angle BAC$ 的平分线交 BC 于点 D ， E 、 F 分别是线段 AD 和 AB 上的动点，求 $BE+EF$ 的最小值，并写出解答过程。

考点： 轴对称-最短路线问题。

分析： (1) 找点 A 或点 B 关于 CD 的对称点，再连接其中一点的对称点和另一点，和 MN 的交点 P 就是所求作的位置。根据题意先求出 $\angle C'AE$ ，再根据勾股定理求出 AE ，即可得出 $PA+PB$ 的最小值；

(2) 首先在斜边 AC 上截取 $AB'=AB$ ，连结 BB' ，再过点 B' 作 $B'F \perp AB$ ，垂足为 F ，交 AD 于 E ，连结 BE ，则线段 $B'F$ 的长即为所求。

解答： 解：(1) 作点 B 关于 CD 的对称点 E ，连接 AE 交 CD 于点 P

此时 $PA+PB$ 最小，且等于 AE 。

作直径 AC' ，连接 $C'E$ 。

根据垂径定理得弧 BD =弧 DE 。

$$\because \angle ACD=30^\circ,$$

$$\therefore \angle AOD=60^\circ, \angle DOE=30^\circ,$$

$$\therefore \angle AOE=90^\circ,$$

$$\therefore \angle C'AE=45^\circ,$$

又 AC' 为圆的直径， $\therefore \angle AEC'=90^\circ$ ，

$$\therefore \angle C' = \angle C'AE=45^\circ,$$

$$\therefore C'E=AE=\frac{\sqrt{2}}{2}AC'=2\sqrt{2},$$

即 $AP+BP$ 的最小值是 $2\sqrt{2}$ 。

故答案为： $2\sqrt{2}$ ；

(2) 如图，在斜边 AC 上截取 $AB'=AB$ ，连结 BB' 。

$\because AD$ 平分 $\angle BAC$ ，

\therefore 点 B 与点 B' 关于直线 AD 对称。

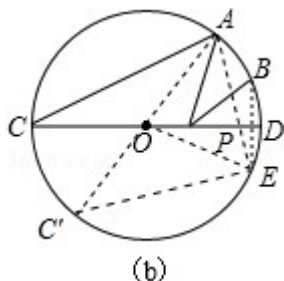
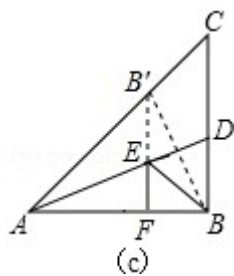
过点 B' 作 $B'F \perp AB$ ，垂足为 F ，交 AD 于 E ，连结 BE ，

则线段 $B'F$ 的长即为所求。(点到直线的距离最短)

在 $\text{Rt}\triangle AFB'$ 中， $\because \angle BAC=45^\circ$ ， $AB'=AB=10$ ，

$$\therefore B'F=AB' \cdot \sin 45^\circ=AB \cdot \sin 45^\circ=10 \times \frac{\sqrt{2}}{2}=5\sqrt{2},$$

$\therefore BE+EF$ 的最小值为 $5\sqrt{2}$ 。



点评： 此题主要考查了利用轴对称求最短路径问题以及锐角三角函数关系等知识，根据已知得出对应点 P 位置是解题关键。

13. (2013•六盘水) (1) 观察发现

如图 (1)：若点 A、B 在直线 m 同侧，在直线 m 上找一点 P，使 AP+BP 的值最小，做法如下：

作点 B 关于直线 m 的对称点 B'，连接 AB'，与直线 m 的交点就是所求的点 P，线段 AB' 的长度即为 AP+BP 的最小值。



图 (1)

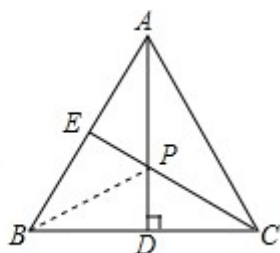


图 (2)

如图 (2)：在等边三角形 ABC 中，AB=2，点 E 是 AB 的中点，AD 是高，在 AD 上找一点 P，使 BP+PE 的值最小，做法如下：

作点 B 关于 AD 的对称点，恰好与点 C 重合，连接 CE 交 AD 于一点，则这点就是所求的点 P，故 BP+PE 的最小值为 $\sqrt{3}$ 。

(2) 实践运用

如图 (3)：已知 $\odot O$ 的直径 CD 为 2， \widehat{AC} 的度数为 60° ，点 B 是 \widehat{AC} 的中点，在直径 CD 上作出点 P，使 BP+AP 的值最小，则 BP+AP 的最小值为 $\sqrt{2}$ 。

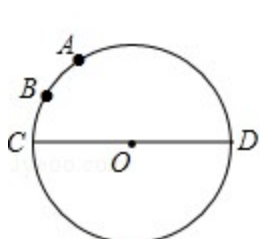


图 (3)

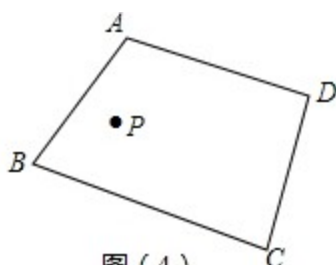


图 (4)

(3) 拓展延伸

如图 (4)：点 P 是四边形 ABCD 内一点，分别在边 AB、BC 上作出点 M，点 N，使 PM+PN+MN 的值最小，保留作图痕迹，不写作法。

考点： 圆的综合题；轴对称-最短路线问题。

专题： 压轴题。

分析：(1) 观察发现：利用作法得到 CE 的长为 BP+PE 的最小值；由 AB=2，点 E 是 AB 的中点，根据等边三角形的性质得到 $CE \perp AB$ ， $\angle BCE = \frac{1}{2} \angle BCA = 30^\circ$ ，BE=1，再根据含 30 度的直角三角形三边的关系得 $CE = \sqrt{3}$ ；

(2) 实践运用：过 B 点作弦 $BE \perp CD$ ，连结 AE 交 CD 于 P 点，连结 OB、OE、OA、PB，根据垂径定理得到 CD 平分 BE，即点 E 与点 B 关于 CD 对称，则 AE 的长就是 BP+AP 的最小值；由于 \widehat{AC} 的度数为 60° ，点 B 是 \widehat{AC} 的中点得到 $\angle BOC = 30^\circ$ ， $\angle AOC = 60^\circ$ ，所以 $\angle AOE = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$ ，于是可判断 $\triangle OAE$ 为等腰直角三角形，则 $AE = \sqrt{2}OA = \sqrt{2}$ ；

(3) 拓展延伸：分别作出点 P 关于 AB 和 BC 的对称点 E 和 F，然后连结 EF，EF 交 AB 于 M、交 BC 于 N。

解答：解：(1) 观察发现

如图 (2)，CE 的长为 BP+PE 的最小值，

\because 在等边三角形 ABC 中，AB=2，点 E 是 AB 的中点

$\therefore CE \perp AB$ ， $\angle BCE = \frac{1}{2} \angle BCA = 30^\circ$ ，BE=1，

$\therefore CE = \sqrt{3}BE = \sqrt{3}$ ；

故答案为 $\sqrt{3}$ ；

(2) 实践运用

如图 (3)，过 B 点作弦 $BE \perp CD$ ，连结 AE 交 CD 于 P 点，连结 OB、OE、OA、PB，

$\because BE \perp CD$ ，

$\therefore CD$ 平分 BE，即点 E 与点 B 关于 CD 对称，

$\because \widehat{AC}$ 的度数为 60° ，点 B 是 \widehat{AC} 的中点，

$\therefore \angle BOC = 30^\circ$ ， $\angle AOC = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle EOC = 30^\circ$ ，

$\therefore \angle AOE = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$ ，

$\because OA = OE = 1$ ，

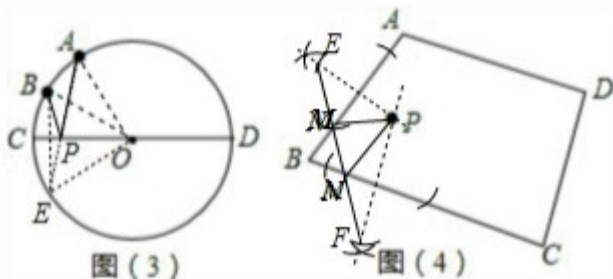
$\therefore AE = \sqrt{2}OA = \sqrt{2}$ ，

$\therefore AE$ 的长就是 BP+AP 的最小值。

故答案为 $\sqrt{2}$ ；

(3) 拓展延伸

如图 (4)。



点评：本题考查了圆的综合题：弧、弦和圆心角之间的关系以及圆周角定理在有关圆的几何证明中经常用到，同时熟练掌握等边三角形的性质以及轴对称 - 最短路径问题。

14. (2013•抚顺) 在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle A = 30^\circ$ ，点 D 是 AB 的中点， $DE \perp BC$ ，垂足为点 E，连接 CD。

(1) 如图 1，DE 与 BC 的数量关系是 $DE = \frac{\sqrt{3}}{2}BC$ ；

(2) 如图 2, 若 P 是线段 CB 上一动点 (点 P 不与点 B、C 重合), 连接 DP, 将线段 DP 绕点 D 逆时针旋转 60° , 得到线段 DF, 连接 BF, 请猜想 DE、BF、BP 三者之间的数量关系, 并证明你的结论;

(3) 若点 P 是线段 CB 延长线上一动点, 按照 (2) 中的作法, 请在图 3 中补全图形, 并直接写出 DE、BF、BP 三者之间的数量关系.

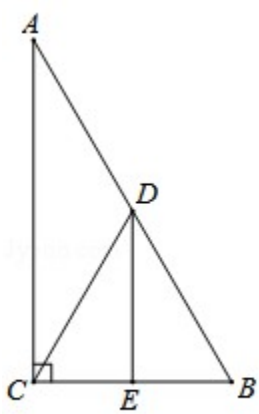


图 1

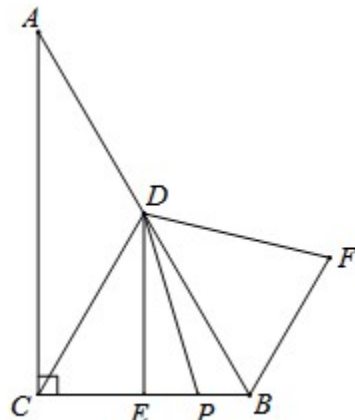


图 2

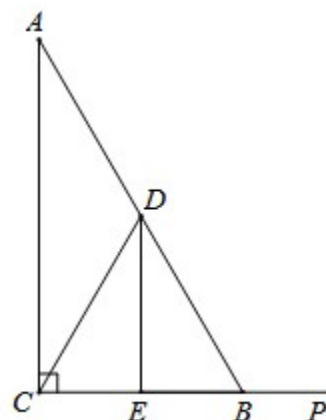


图 3

考点: 全等三角形的判定与性质; 等边三角形的判定与性质; 含 30° 度角的直角三角形.

分析: (1) 由 $\angle ACB=90^\circ$, $\angle A=30^\circ$ 得到 $\angle B=60^\circ$, 根据直角三角形斜边上中线性质的性质得到 $DB=DC$, 则可判断 $\triangle DCB$ 为等边三角形, 由于 $DE \perp BC$, $DE = \frac{\sqrt{3}}{2}BC$;

(2) 根据旋转的性质得到 $\angle PDF=60^\circ$, $DP=DF$, 易得 $\angle CDP = \angle BDF$, 则可根据“SAS”可判断 $\triangle DCP \cong \triangle DBF$, 则 $CP=BF$, 利用 $CP=BC - BP$, $DE = \frac{\sqrt{3}}{2}BC$ 可得到 $BF+BP = \frac{2\sqrt{3}}{3}DE$;

(3) 与 (2) 的证明方法一样得到 $\triangle DCP \cong \triangle DBF$ 得到 $CP=BF$, 而 $CP=BC+BP$, 则 $BF - BP=BC$, 所以 $BF - BP = \frac{2\sqrt{3}}{3}DE$.

解答: 解: (1) $\because \angle ACB=90^\circ$, $\angle A=30^\circ$,

$$\therefore \angle B=60^\circ,$$

\because 点 D 是 AB 的中点,

$$\therefore DB=DC,$$

$\therefore \triangle DCB$ 为等边三角形,

$\because DE \perp BC$,

$$\therefore DE = \frac{\sqrt{3}}{2}BC;$$

故答案为 $DE = \frac{\sqrt{3}}{2}BC$.

(2) $BF+BP = \frac{2\sqrt{3}}{3}DE$. 理由如下:

\because 线段 DP 绕点 D 逆时针旋转 60° , 得到线段 DF,

$$\therefore \angle PDF=60^\circ, DP=DF,$$

而 $\angle CDB=60^\circ$,

$$\therefore \angle CDB - \angle PDB = \angle PDF - \angle PDB,$$

$$\therefore \angle CDP = \angle BDF,$$

在 $\triangle DCP$ 和 $\triangle DBF$ 中

$$\begin{cases} DC=DB \\ \angle CDP=\angle BDF, \\ DP=DF \end{cases}$$

$\therefore \triangle DCP \cong \triangle DBF$ (SAS) ,

$\therefore CP=BF$,

而 $CP=BC-BP$,

$\therefore BF+BP=BC$,

$\therefore DE=\frac{\sqrt{3}}{2}BC$,

$\therefore BC=\frac{2\sqrt{3}}{3}DE$,

$\therefore BF+BP=\frac{2\sqrt{3}}{3}DE$;

(3) 如图 ,

与 (2) 一样可证明 $\triangle DCP \cong \triangle DBF$,

$\therefore CP=BF$,

而 $CP=BC+BP$,

$\therefore BF-BP=BC$,

$\therefore BF-BP=\frac{2\sqrt{3}}{3}DE$.

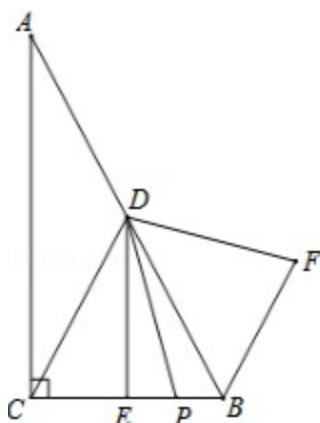


图 2

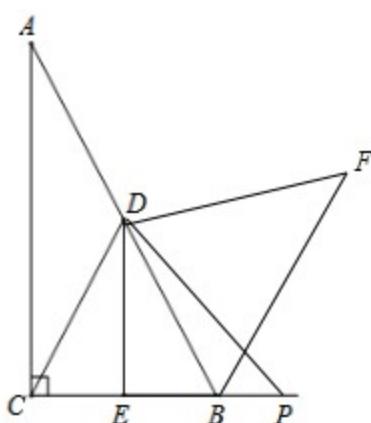


图 3

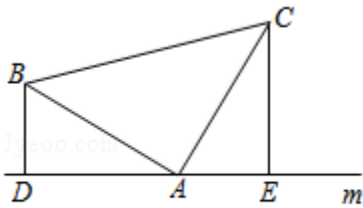
点评： 本题考查了全等三角形的判定与性质：判定三角形全等的方法有“SSS”、“SAS”、“ASA”、“AAS”；全等三角形的对应边相等．也考查了等边三角形的判定与性质以及含 30 度的直角三角形三边的关系．

15. (2013•东营) (1) 如图 (1) , 已知：在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC=90^\circ$, $AB=AC$, 直线 m 经过点 A , $BD \perp$ 直线 m , $CE \perp$ 直线 m , 垂足分别为点 D 、 E .

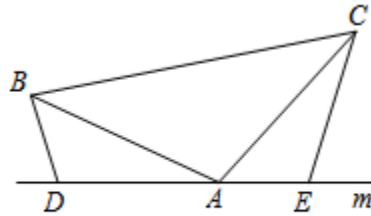
证明： $DE=BD+CE$.

(2) 如图 (2) , 将 (1) 中的条件改为：在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, D 、 A 、 E 三点都在直线 m 上, 并且有 $\angle BDA=\angle AEC=\angle BAC=\alpha$, 其中 α 为任意锐角或钝角 . 请问结论 $DE=BD+CE$ 是否成立？如成立, 请你给出证明；若不成立, 请说明理由 .

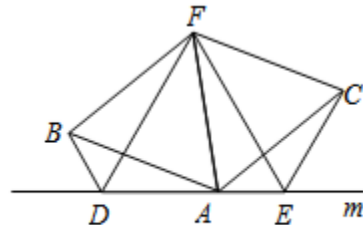
(3) 拓展与应用：如图 (3) , D 、 E 是 D 、 A 、 E 三点所在直线 m 上的两动点 (D 、 A 、 E 三点互不重合) , 点 F 为 $\angle BAC$ 平分线上的一点, 且 $\triangle ABF$ 和 $\triangle ACF$ 均为等边三角形, 连接 BD 、 CE , 若 $\angle BDA=\angle AEC=\angle BAC$, 试判断 $\triangle DEF$ 的形状 .



(图1)



(图2)



(图3)

考点：全等三角形的判定与性质；等边三角形的判定．

专题：压轴题．

分析： (1) 根据 $BD \perp$ 直线 m , $CE \perp$ 直线 m 得 $\angle BDA = \angle CEA = 90^\circ$, 而 $\angle BAC = 90^\circ$, 根据等角的余角相等得 $\angle CAE = \angle ABD$, 然后根据“ AAS ”可判断 $\triangle ADB \cong \triangle CEA$, 则 $AE = BD$, $AD = CE$, 于是 $DE = AE + AD = BD + CE$;

(2) 与 (1) 的证明方法一样;

(3) 与前面的结论得到 $\triangle ADB \cong \triangle CEA$, 则 $BD = AE$, $\angle DBA = \angle CAE$, 根据等边三角形的性质得 $\angle ABF = \angle CAF = 60^\circ$, 则 $\angle DBA + \angle ABF = \angle CAE + \angle CAF$, 则 $\angle DBF = \angle FAE$, 利用“ SAS ”可判断 $\triangle DBF \cong \triangle EAF$, 所以 $DF = EF$, $\angle BFD = \angle AFE$, 于是 $\angle DFE = \angle DFA + \angle AFE = \angle DFA + \angle BFD = 60^\circ$, 根据等边三角形的判定方法可得到 $\triangle DEF$ 为等边三角形．

解答： 证明：(1) $\because BD \perp$ 直线 m , $CE \perp$ 直线 m ,

$$\therefore \angle BDA = \angle CEA = 90^\circ, \text{ www.}$$

$$\because \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD + \angle CAE = 90^\circ,$$

$$\because \angle BAD + \angle ABD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CAE = \angle ABD,$$

\therefore 在 $\triangle ADB$ 和 $\triangle CEA$ 中

$$\begin{cases} \angle ABD = \angle CAE \\ \angle BDA = \angle CEA, \\ AB = AC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADB \cong \triangle CEA \text{ (AAS)},$$

$$\therefore AE = BD, AD = CE,$$

$$\therefore DE = AE + AD = BD + CE;$$

$$(2) \because \angle BDA = \angle BAC = \alpha,$$

$$\therefore \angle DBA + \angle BAD = \angle BAD + \angle CAE = 180^\circ - \alpha,$$

$$\therefore \angle CAE = \angle ABD,$$

\therefore 在 $\triangle ADB$ 和 $\triangle CEA$ 中

$$\begin{cases} \angle ABD = \angle CAE \\ \angle BDA = \angle CEA, \\ AB = AC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADB \cong \triangle CEA \text{ (AAS)},$$

$$\therefore AE = BD, AD = CE,$$

$$\therefore DE = AE + AD = BD + CE;$$

$$(3) \text{ 由 (2) 知, } \triangle ADB \cong \triangle CEA,$$

$$BD = AE, \angle DBA = \angle CAE,$$

$\therefore \triangle ABF$ 和 $\triangle ACF$ 均为等边三角形,

$$\therefore \angle ABF = \angle CAF = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle DBA + \angle ABF = \angle CAE + \angle CAF,$$

$$\therefore \angle DBF = \angle FAE,$$

$$\because BF = AF$$

在 $\triangle DBF$ 和 $\triangle EAF$ 中

$$\begin{cases} FB = FA \\ \angle FBD = \angle FAE, \\ BD = AE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle DBF \cong \triangle EAF \text{ (SAS)},$$

$$\therefore DF = EF, \angle BFD = \angle AFE,$$

$$\therefore \angle DFE = \angle DFA + \angle AFE = \angle DFA + \angle BFD = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle DEF$ 为等边三角形.

点评： 本题考查了全等三角形的判定与性质：判定三角形全等的方法有“SSS”、“SAS”、“ASA”、“AAS”；全等三角形的对应边相等．也考查了等边三角形的判定与性质．