第二章　实数

2.1 认识无理数

专题 无理数近似值的确定

1. 设面积为 3 的正方形的边长为 x，那么关于 x 的说法正确的是（　　）

A．x 是有理数　　　　　B．x 取 0 和 1 之间的实数

C．x 不存在　　　　　D．x 取 1 和 2 之间的实数

2．（1）如图 1，小明想剪一块面积为 $25cm^2$ 的正方形纸板，你能帮他求出正方形纸板的边长吗？

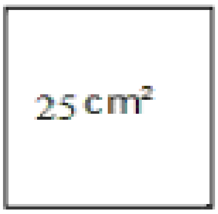


图1

（2）若小明想将两块边长都为 3cm 的正方形纸板沿对角线剪开，拼成如图 2 所示的一个大正方形，你能帮他求出这个大正方形的面积吗？它的边长是整数吗？若不是整数，那么请你估计这个边长的值在哪两个整数之间．

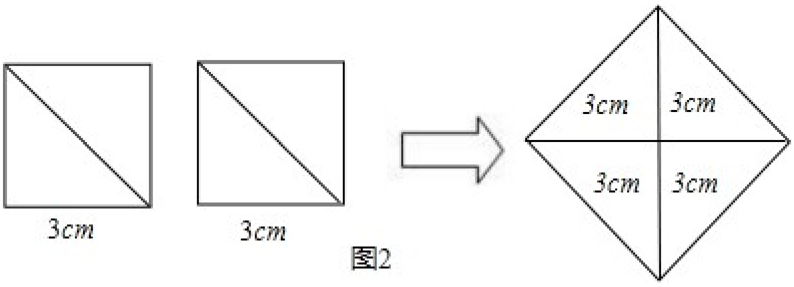


图2

3. 你能估测一下我们教室的长、宽、高各是多少米吗？你能估测或实际测量一下数学课本的长、宽和厚度吗？请你再估算一下我们的教室能放下多少本数学书？这些数学书可供多少所像我们这样的学校的初一年级学生使用呢？请你对每一个问题给出估测的数据，再把估算的过程结果一一写出来．

答案：

1．D　**【解析】** ∵面积为 3 的正方形的边长为 x，∴$x^2=3$，而 $1^2=1$，$2^2=4$，∴$1<x^2<4$，∴$1<x<2$，故选 D.

2．**解：**（1）边长为 5cm.

（2）设大正方形的边长为 x，∵大正方形的面积$=3^2+3^2=18$，而 $4^2=16$，$5^2=25$，∴$16<x^2<25$，∴$4<x<5$,故正方形的边长不是整数,它的值在 4 和 5 之间.

3．**解：**估算的过程：教室的长、宽、高可以用我们的身高估计出来；数学课本的长、宽和厚度可以用我们的手指估计出来，也可以用直尺测量出来；我们用长宽高相乘估计出教室的容积与课本的体积相除算出能放下多少本数学书，就是能供多少名学生使用，再用本班人数乘一年级班数估计本校一年级人数，然后相处就可以估计出这些数学书可供多少所像我们这样的学校的初一年级学生使用了．估测的数据、估算的结果略.

2.2 平方根

专题一 非负数问题

1. 若$(a+\sqrt{2})^2$与$|b+1|$互为相反数，则$a-b$的值为（　）

A．$\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{2}+1$　　C．$\sqrt{2}-1$　　D．$1-\sqrt{2}$

2．设 a，b，c 都是实数，且满足（2-a）^{2}+ $\sqrt{a^2+b+c}$+|c+8|=0，$ax^2+bx+c=0$，求式子 x^2+2x 的算术平方根．

3. 若实数 x，y，z 满足条件$\sqrt{x}$ + $\sqrt{y-1}$ + $\sqrt{z-2}$ = $\frac{1}{4}$(x+y+z+9)，求 xyz 的值．

专题二 探究题

4. 研究下列算式，你会发现有什么规律？

$\sqrt{1\times3+1}=\sqrt{4}=2$；$\sqrt{2\times4+1}=\sqrt{9}=3$；$\sqrt{3\times5+1}=\sqrt{16}=4$；$\sqrt{4\times6+1}=\sqrt{25}=5$；…

请你找出规律，并用公式表示出来．

5.先观察下列等式，再回答下列问题：

① $\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}$ =1+ $\frac{1}{1}$ - $\frac{1}{1+1}$ - = $1\frac{1}{2}$ ；

② $\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}$ =1+ $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{2+1}$ = $1\frac{1}{6}$ ；

③ $\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}$ =1+ $\frac{1}{3}$ - $\frac{1}{3+1}$ = $1\frac{1}{12}$.

（1）请你根据上面三个等式提供的信息，猜想 $\sqrt{1+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}}$ 的结果，并验证；

（2）请你按照上面各等式反映的规律，试写出用含 n 的式子表示的等式（n 为正整数）．

答案：

1．D 【解析】∵$(a+\sqrt{2})^2$与$|b+1|$互为相反数，

∴$(a+\sqrt{2})^2+|b+1|=0$，

∴$a+\sqrt{2}=0$且$b+1=0$，

∴$a=-\sqrt{2}$，$b=-1$，$a-b=1-\sqrt{2}$，故选 D.

2．**解**：由题意，得 2-a=0，$a^2+b+c=0$，c+8=0．

∴a=2，c=-8，b=4．

∴$2x^2+4x-8=0$．

∴$x^2+2x=4$．

∴式子 x^2+2x 的算术平方根为 2．

3．**解**：将题中等式移项并将等号两边同乘以 4 得 $x-4\sqrt{x}+y-4\sqrt{y-1}+z-4\sqrt{z-2}+9=0$，

∴$(x-4\sqrt{x}+4)+(y-1-4\sqrt{y-1}+4)+(z-2-4\sqrt{z-2}+4)=0$,

∴$(\sqrt{x}-2)^2+(\sqrt{y-1}-2)^2+(\sqrt{z-2}-2)^2=0$,

∴$\sqrt{x}-2=0$且$\sqrt{y-1}-2=0$且$\sqrt{z-2}-2=0$,

∴$\sqrt{x}=2$ $\sqrt{y-1}=2$ $\sqrt{z-2}=2$,

∴x=4,y-1=4 ,z-2=4,∴x=4,y=5,z=6.

∴xyz=120．

4.**解**：第 n 项 $a_n=\sqrt{n(n+2)+1}=\sqrt{(n+1)^2}=n+1$，即 $a_n=n+1$．

5.**解**：（1）$\sqrt{1+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}}=1+\frac{1}{4}-\frac{1}{4+1}=1\frac{1}{20}$．

验证：$\sqrt{1+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}}=\sqrt{1+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}}=\sqrt{1+\frac{25}{400}+\frac{16}{400}}=\sqrt{\frac{441}{400}}=1\frac{1}{20}$．

（2）$\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1+\frac{1}{n(n+1)}$（n 为正整数）．

2.3 立方根

专题 立方根探究性问题

1．（1）填表：

a	0.000001	0.001	1	1000	1000000
$\sqrt[3]{a}$					

（2）由上表你发现了什么规律（请你用语言叙述出来）；

（3）根据发现的规律填空：

① 已知 $\sqrt[3]{3}$ =1.442，则 $\sqrt[3]{3000}$ =_____________；

② 已知 $\sqrt[3]{0.000456}$ =0.07696，则 $\sqrt[3]{456}$ =_____________．

2．观察下列各式：

（1） $\sqrt{2\frac{2}{3}}=2\sqrt{\frac{2}{3}}$ ；（2） $\sqrt{3\frac{3}{8}}=3\sqrt{\frac{3}{8}}$ ；（3） $\sqrt{4\frac{4}{15}}=4\sqrt{\frac{4}{15}}$ ．

探究 1：判断上面各式是否成立．（1）________；（2）________；（3）________．

探究 2：猜想 $\sqrt{5\frac{5}{24}}$ = ________ ．

探究 3：用含有 n 的式子将规律表示出来，说明 n 的取值范围，并用数学知识说明你所写式子的正确性．

拓展: $\sqrt[3]{2\frac{2}{7}}=2\sqrt[3]{\frac{2}{7}}$ ，$\sqrt[3]{3\frac{3}{26}}=3\sqrt[3]{\frac{3}{26}}$ ，$\sqrt[3]{4\frac{4}{63}}=4\sqrt[3]{\frac{4}{63}}$,…

根据观察上面各式的结构特点，归纳一个猜想，并验证你的猜想．

答案：

1.**解：**（1）直接开立方依次填入：0.01；0.1；1；10；100．

（2）从表中发现被开方数小数点向右移动三位，立方根向右移动一位．

（3）① 14.42 ②7.696

2.**解：**探究 1：（1）成立 （2）成立 （3）成立

探究 2：$5\sqrt{\frac{5}{24}}$

探究 3：$\sqrt{n\frac{n}{n^2-1}}=n\sqrt{\frac{n}{n^2-1}}$ （n≥2,且 n 为整数）．理由如下：

$$\sqrt{n\frac{n}{n^2-1}}=\sqrt{\frac{n^3-n+n}{n^2-1}}=\sqrt{n^2\times\frac{n}{n^2-1}}=n\sqrt{\frac{n}{n^2-1}}.$$

拓展：$\sqrt[3]{n\frac{n}{n^3-1}}=n\sqrt[3]{\frac{n}{n^3-1}}$．理由如下：

$$\sqrt[3]{n\frac{n}{n^3-1}}=\sqrt[3]{\frac{n^4-n+n}{n^3-1}}=\sqrt[3]{n^3\times\frac{n}{n^3-1}}=n\sqrt[3]{\frac{n}{n^3-1}}.$$

2.4 估算

专题 比较无理数大小

1. 设 a= $\sqrt{1003}+\sqrt{997}$ ，b= $\sqrt{1001}+\sqrt{999}$ ，c=2 $\sqrt{1001}$ ，则 a，b，c 之间的大小关系是（　　）

A．a＞b＞c　　B．a＞c＞b　　C．b＞a＞c　　D．c＞b＞a

2. 观察下列一组等式，然后解答后面的问题：

$(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=1$，$(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})=1$，$(\sqrt{4}+\sqrt{3})(\sqrt{4}-\sqrt{3})=1$，$(\sqrt{5}+\sqrt{4})(\sqrt{5}-\sqrt{4})=1$…

（1）观察上面的规律，计算下列式子的值．

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2013}+\sqrt{2012}}\right)\bullet(\sqrt{2013}+1)$.

（2）利用上面的规律，试比较 $\sqrt{12}-\sqrt{11}$ 与 $\sqrt{13}-\sqrt{12}$ 的大小．

3. 先填写下表，通过观察后再回答问题．

a	…	0.000001	0.0001	0.01	1	100	10000	1000000	…
$\sqrt{a}$	…								…

问：

（1）被开方数 a 的小数点位置移动和它的算术平方根 $\sqrt{a}$ 的小数点位置移动有无规律？若有规律，请写出它的移动规律；

（2）已知：$\sqrt{a}$ =1800，- $\sqrt{3.24}$ =-1.8，你能求出 a 的值吗？

（3）试比较 $\sqrt{a}$ 与 a 的大小．

答案：

1．D　【解析】∵ $a^2=2000+2\sqrt{1003\times997}$，$b^2=2000+2\sqrt{1001\times999}$，$c^2=4004=2000+2\times1002$，

$1003\times997=1\ 000\ 000-9=999\ 991$，$1001\times999=1\ 000\ 000-1=999\ 999$，$1002^2=1\ 004\ 004$．

∴c＞b＞a．故选 D．

2．**解：**（1）由上面的解题规律可直接写出 $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$，

则$\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2013}+\sqrt{2012}}\right)\bullet(\sqrt{2013}+1)$

$=[(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\ldots+(\sqrt{2013}-\sqrt{2012})](\sqrt{2013}+1)$

$=(\sqrt{2013}-1)(\sqrt{2013}+1)$

$=2012.$

（2）∵ $\frac{1}{\sqrt{12}-\sqrt{11}}=\sqrt{12}+\sqrt{11}$，$\frac{1}{\sqrt{13}-\sqrt{12}}=\sqrt{13}+\sqrt{12}$，

又 $\sqrt{12}+\sqrt{11}<\sqrt{13}+\sqrt{12}$，

∴ $\frac{1}{\sqrt{12}-\sqrt{11}}<\frac{1}{\sqrt{13}-\sqrt{12}}$，　∴ $\sqrt{12}-\sqrt{11}>\sqrt{13}-\sqrt{12}$．

3．**解：**依次填:0.001，0.01，0.1，1，10，100，1000．

（1）有规律，当被开方数的小数点每向左（或向右）移动 2 位，算术平方根的小数点向左（或向右）移动 1 位.

（2）观察 1.8 和 1800，小数点向右移动了 3 位，则 a 的值为 3.24 的小数点向右移动 6 位,即 a=3240000；

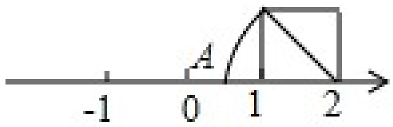
（3）当 0＜a＜1 时，$\sqrt{a}$＞a；当 a=1 或 0 时，$\sqrt{a}$=a；当 a＞1 时，$\sqrt{a}$＜a．

2.6 实数

专题 实数与数轴

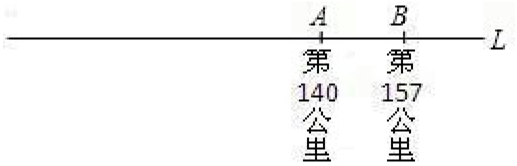
1.如图，以数轴的单位长度线段为边作一个正方形，以表示数 2 的点为圆心，正方形对角线长为半径画弧，交数轴于点 A，则点 A 表示的数是（　　）

A．$-\sqrt{2}$　　B．$2-\sqrt{2}$　　C．$1-\sqrt{2}$　　D．$1+\sqrt{2}$

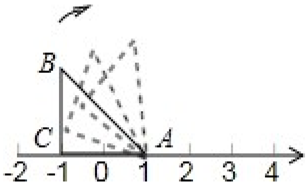


2.如图所示，直线 L 表示地图上的一条直线型公路，其中 A、B 两点分别表示公路上第 140 公里处及第 157 公里处．若将直尺放在此地图上，使得刻度 15，18 的位置分别对准 A，B 两点，则此时刻度 0 的位置对准地图上公路的第（　　）公里处

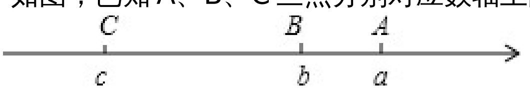
A．17　　B．55　　C．72　　D．85



3. 一个等腰直角三角形三角板沿着数轴正方向向前滚动，起始位置如图，顶点 C 和 A 在数轴上的位置表示的实数为-1 和 1．那么当顶点 C 下一次落在数轴上时，所在的位置表示的实数是___________．



4. 如图，已知 A、B、C 三点分别对应数轴上的数 a、b、c．



（1）化简：|a-b|+|c-b|+|c-a|；

（2）若 a=$\frac{x+y}{4}$，b=$-z^2$，c=-4mn．且满足 x 与 y 互为相反数，z 是绝对值最小的负整数，m、n 互为倒数，试求 98a+99b+100c 的值；

（3）在（2）的条件下，在数轴上找一点 D，满足 D 点表示的整数 d 到点 A，C 的距离之和为 10，并求出所有这些整数的和．

答案：

1．B 【解析】 由勾股定理得：正方形的对角线为$\sqrt{2}$，设点 A 表示的数为 x，则 2-x=$\sqrt{2}$，解得 x=2-$\sqrt{2}$．故选 B．

2．B 【解析】 根据题意，数轴上刻度 15，18 的位置分别对准 A，B 两点，而 AB 两点间距离 157-140=17（公里），即数轴上的 3 个刻度对应实际 17 公里的距离.又有数轴上刻度 0 与 15 之间有 15 个刻度，故刻度 0 的位置对准地图上公路的位置距 A 点有 $15\times\frac{17}{3}$=85(公里)，140-85=55,故刻度 0 的位置对准地图上公路的 55 公里处.故选 B．

3．3+2$\sqrt{2}$ 【解析】 在直角△ABC 中，AC=CB=2，

根据勾股定理可以得到 AB=2$\sqrt{2}$，

则当顶点 C 下一次落在数轴上时，
所在的位置表示的实数是 4+2$\sqrt{2}$-1=3+2$\sqrt{2}$．

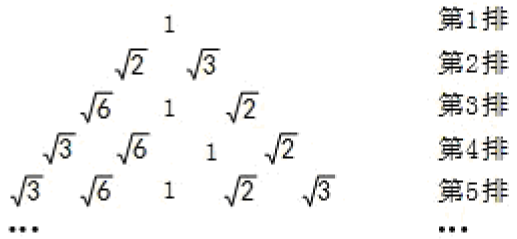
故答案为：3+2$\sqrt{2}$．

4．**解：**（1）由数轴可知：a-b＞0，c-b＜0，c-a＜0，
所以原式=（a-b）-（c-b）-（c-a）
=a-b-c+b-c+a=2a-2c.
（2）由题意可知：x+y=0，z=-1，mn=1，
所以 a=0，b=-（-1）^{2}=-1，c=-4，
∴98a+99b+100c=-99-400=-499.
（3）满足条件的 D 点表示的整数为-7、3，它们的和为-4．

2.7 二次根式

专题一 与二次根式有关的规律探究题

1.将 1、$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、$\sqrt{6}$ 按如图所示的方式排列.



若规定（m，n）表示第 m 排从左到右第 n 个数，则（4,2）与（21,2）表示的两数之积是（ ）

A.1　　B.2　　C. $2\sqrt{3}$　　D.6

2. 观察下列各式及其验证过程：

$\sqrt{2+\frac{2}{3}}=2\sqrt{\frac{2}{3}}$，验证：$\sqrt{2+\frac{2}{3}}=\sqrt{\frac{8}{3}}=\sqrt{\frac{2^2\times 2}{3}}=2\sqrt{\frac{2}{3}}$．

$\sqrt{3+\frac{3}{8}}=3\sqrt{\frac{3}{8}}$，验证：$\sqrt{3+\frac{3}{8}}=\sqrt{\frac{27}{8}}=\sqrt{\frac{3^2\times 3}{8}}=3\sqrt{\frac{3}{8}}$．

（1）按照上述两个等式及其验证过程，猜想 $\sqrt{4+\frac{4}{15}}$ 的变形结果并进行验证；

（2）针对上述各式反映的规律，写出用 a（a 为任意自然数，且 $a\geq 2$）表示的等式，并给出验证；

（3）针对三次根式及 n 次根式（n 为任意自然数，且 $n\geq 2$），有无上述类似的变形，如果有，写出用 a（a 为任意自然数，且 $a\geq 2$）表示的等式，并给出验证．

3. 阅读材料：

小明在学习二次根式后，发现一些含根号的式子可以写成另一个式子的平方，如 $3+2\sqrt{2}=(1+\sqrt{2})^2$，善于思考的小明进行了以下探索：

设 $a+b\sqrt{2}=(m+n\sqrt{2})^2$（其中 a、b、m、n 均为正整数），则有 $a+b\sqrt{2}=m^2+2n^2+2mn\sqrt{2}$，

∴$a=m^2+2n^2$，$b=2mn$.这样小明就找到了一种把部分 $a+b\sqrt{2}$ 的式子化为平方式的方法.

请你仿照小明的方法探索并解决下列问题：

（1）当 a、b、m、n 均为正整数时，若 $a+b\sqrt{3}=(m+n\sqrt{3})^2$，用含 m、n 的式子分别表示 a、b，得：a=______，b= ________；

（2）利用所探索的结论，找一组正整数 a、b、m、n 填空：_____+_____$\sqrt{3}$ =（__+ ____$\sqrt{3}$）^{2}；

（3）若 $a+4\sqrt{3}=(m+n\sqrt{3})^2$，且 a、m、n 均为正整数，求 a 的值.

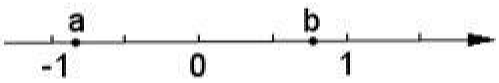
专题二 利用二次根式的性质将代数式化简

4. 化简二次根式 $a\sqrt{-\frac{a+2}{a^2}}$ 的结果是（　　）

A. $\sqrt{-a-2}$　　B. $-\sqrt{-a-2}$　　C. $\sqrt{a-2}$　　D. $-\sqrt{a-2}$

5.如图，实数 a．b 在数轴上的位置，

化简：$\sqrt{a^2}-\sqrt{b^2}+\sqrt{(a-b)^2}$．



答案：

1.D 【解析】从图示中知道，（4，2）所表示的数是 $\sqrt{6}$.∵前 20 排共有 1+2+3+4+…+20=210 个数，∴（21，2）表示的是第 210+2=212 个数.∵这些数字按照 1、$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、$\sqrt{6}$ 的顺序循环出现，212÷4=53，∴（21，2）表示的数是 $\sqrt{6}$.∴（4，2）与（21，2）表示的两数之积是 $\sqrt{6}\times\sqrt{6}=6$.

2.**解：**（1）$\sqrt{4+\frac{4}{15}}=4\sqrt{\frac{4}{15}}$. 验证：$\sqrt{4+\frac{4}{15}}=\sqrt{\frac{64}{15}}=\sqrt{\frac{4^2\times4}{15}}=4\sqrt{\frac{4}{15}}$.

（2）$\sqrt{a+\frac{a}{a^2-1}}=a\sqrt{\frac{a}{a^2-1}}$ （a 为任意自然数，且 $a\geq 2$）.

验证：$\sqrt{a+\frac{a}{a^2-1}}=\sqrt{\frac{a^3-a+a}{a^2-1}}=\sqrt{\frac{a^3}{a^2-1}}=a\sqrt{\frac{a}{a^2-1}}$.

（3）$\sqrt[3]{a+\frac{a}{a^3-1}}=a\sqrt[3]{\frac{a}{a^3-1}}$ （a 为任意自然数，且 $a\geq 2$）.

验证：$\sqrt[3]{a+\frac{a}{a^3-1}}=\sqrt[3]{\frac{a^4-a+a}{a^3-1}}=\sqrt[3]{\frac{a^4}{a^3-1}}=a\sqrt[3]{\frac{a}{a^3-1}}$.

$\sqrt[n]{a+\frac{a}{a^n-1}}=a\sqrt[n]{\frac{a}{a^n-1}}$ （a 为任意自然数，且 $a\geq 2$）.

验证：$\sqrt[n]{a+\frac{a}{a^n-1}}=\sqrt[n]{\frac{a^{n+1}-a+a}{a^n-1}}=\sqrt[n]{\frac{a^{n+1}}{a^n-1}}=a\sqrt[n]{\frac{a}{a^n-1}}$.

3. **解：**(1) m^2+3n^2 2mn (2)21 12 3 2
(3) ∵ $a=m^2+3n^2$,4=2mn, ∴mn=2. ∵ m,n 为正整数，∴m=1,n=2 或 m=2,n=1,
∴a=13 或 a=7.

4.B 【解析】若二次根式有意义，则 $-\frac{a+2}{a^2}\geq0$，-a-2≥0，解得 a≤-2，∴原式= $\frac{a}{-a}\sqrt{-a-2}=-\sqrt{-a-2}$. 故选 B .

5.**解：**由图知，$a<0$，$b>0$，∴$a-b<0$，
∴ $\sqrt{a^2}-\sqrt{b^2}+\sqrt{(a-b)^2}=|a|-|b|+|a-b|=(-a)-b+(b-a)=-2a$.