全国初中（初二）数学竞赛辅导

第二十六讲 含参数的一元二次方程的整数根问题

对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$的实根情况，可以用判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 来判别，但是对于一个含参数的一元二次方程来说，要判断它是否有整数根或有理根，那么就没有统一的方法了，只能具体问题具体分析求解，当然，经常要用到一些整除性的性质．本讲结合例题来讲解一些主要的方法．

例 1 m 是什么整数时，方程

$$(m^2-1)x^2-6(3m-1)x+72=0$$

有两个不相等的正整数根．

解法 1 首先，$m^2-1\neq 0$，$m\neq\pm 1$．$\Delta=36(m-3)^2>0$，所以 $m\neq 3$．用求根公式可得

$$x_1=\frac{6}{m-1},\quad x_2=\frac{12}{m+1}.$$

由于 x_1，x_2是正整数，所以

$$m-1=1，2，3，6，m+1=1，2，3，4，6，12，$$

解得 $m=2$．这时 $x_1=6$，$x_2=4$．

解法 2 首先，$m^2-1\neq 0$，$m\neq\pm 1$．设两个不相等的正整数根为 x_1，x_2，则由根与系数的关系知

$$x_1+x_2=\frac{6(3m-1)}{m^2-1},\quad x_1x_2=\frac{72}{m^2-1}\geqslant 2,$$

所以 $m^2-1=2，3，4，6，8，9，12，18，24，36，72$，即

$$m^2=3，4，5，7，9，10，13，19，25，37，73，$$

只有 $m^2=4，9，25$ 才有可能，即 $m=\pm 2，\pm 3，\pm 5$．

经检验，只有 $m=2$ 时方程才有两个不同的正整数根．

说明 一般来说，可以先把方程的根求出来(如果比较容易求的话)，然后利用整数的性质以及整除性理论，就比较容易求解问题，解法 1 就

是这样做的．有时候也可以利用韦达定理，得到两个整数，再利用整除性质求解，解法2就是如此，这些都是最自然的做法．

例2 已知关于x的方程

$$a^2x^2-(3a^2-8a)x+2a^2-13a+15=0$$

(其中a是非负整数)至少有一个整数根，求a的值．

分析 “至少有一个整数根”应分两种情况：一是两个都是整数根，另一种是一个是整数根，一个不是整数根．我们也可以像上题一样，把它的两个根解出来．

解 因为a≠0，所以

$$x_{1,2}=\frac{(3a^2-8a)\pm\sqrt{(3a^2-8a)^2-4a^2(2a^2-13a+15)}}{2a^2}=\frac{(3a^2-8a)\pm(a^2+2a)}{2a^2},$$

所以

$$x_1=\frac{3a^2-8a+(a^2+2a)}{2a^2}=2-\frac{3}{a},$$
$$x_2=\frac{3a^2-8a-(a^2+2a)}{2a^2}=1-\frac{5}{a}.$$

所以只要a是3或5的约数即可，即a=1，3，5．

例3 设m是不为零的整数，关于x的二次方程

$$mx^2-(m-1)x+1=0$$

有有理根，求m的值．

解 一个整系数的一元二次方程有有理根，那么它的判别式一定是完全平方数．令

$$\Delta=(m-1)^2-4m=n^2,$$

其中n是非负整数，于是

$$m^2-6m+1=n^2,$$

所以 (m-3)2-n2=8，

$$(m-3+n)(m-3-n)=8.$$

由于 m-3＋n≥m-3-n，并且

$$(m-3+n)+(m-3-n)=2(m-3)$$

是偶数，所以 m-3＋n 与 m-3-n 同奇偶，所以

$$\begin{cases} m-3+n=4, \\ m-3-n=2; \end{cases} \qquad \begin{cases} m-3+n=-2, \\ m-3-n=-4. \end{cases}$$

所以 $\begin{cases} m=6, \\ n=1, \end{cases}$ $\begin{cases} m=0, \\ n=1 \end{cases}$（舍去）.

所以 $m=6$，这时方程的两个根为 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$.

说明 一个整系数的一元二次方程如果有整数根或有理根，那么它的判别式一定是完全平方数，然后利用平方数的性质、解不定方程等手段可以将问题解决．

例 4 关于 x 的方程

$$ax^2+2(a-3)x+(a-2)=0$$

至少有一个整数解，且 a 是整数，求 a 的值．

解 当 a=0 时，原方程变成-6x-2=0，无整数解．

当 a≠0 时，方程是一元二次方程，它至少有一个整数根，说明判别式

$$\Delta=4(a-3)^2-4a(a-2)=4(9-4a)$$

为完全平方数，从而 9-4a 是完全平方数．令 $9-4a=n^2$，则 n 是正奇数，

且 $n\neq 3$（否则 $a=0$），所以 $a=\frac{9-n^2}{4}$. 由求根公式得

$$x_{1,2}=\frac{-2(a-3)\pm 2n}{2a}=-1+\frac{3\pm n}{a}$$
$$=-1+\frac{4(3\pm n)}{9-n^2}$$

所以 $$x_1=-1+\frac{4}{3+n},\ x_2=-1+\frac{4}{3-n}.$$

要使 x_1 为整数，而 n 为正奇数，只能 n=1，从而 a=2．要使 x_2 为整数，即 n-3｜4，n 可取 1，5，7，从而 a=2，-4，-10．

综上所述，a 的值为 2，-4，-10．

说明 本题是前面两种方法的“综合”．既要用判别式是平方数，又要用直接求根．有时候，往往是几种方法一同使用．

例 5 已知关于 x 的方程

$$x^2+(a-6)x+a=0$$

的两根都是整数，求 a 的值．

解 设两个根为 $x_1\geq x_2$，由韦达定理得

$$\begin{cases}x_1+x_2=6-a,\\ x_1x_2=a.\end{cases}$$

从上面两式中消去 a 得

$$x_1x_2+x_1+x_2=6,$$

所以 $(x_1+1)(x_2+1)=7$，

所以 $$\begin{cases}x_1+1=7,\\ x_2+1=1;\end{cases}\quad \begin{cases}x_1+1=-1,\\ x_2+1=-7,\end{cases}$$

所以 $$\begin{cases}x_1=6,\\ x_2=0;\end{cases}\quad \begin{cases}x_1=-2,\\ x_2=-8,\end{cases}$$

所以 $a=x_1x_2=0$ 或 16．

说明 利用韦达定理，然后把参数消去，得到的是关于 x_1，x_2 的不定方程，而求解这个对称的不定方程往往是容易入手的．

例 6 求所有有理数 r，使得方程

$$rx^2+(r+1)x+(r-1)=0$$

的所有根是整数．

分析 首先对 r=0 和 r≠0 进行讨论．r=0 时，是关于 x 的一次方程；r≠0 时，是关于 x 的二次方程，由于 r 是有理数，处理起来有些困难，这时用直接求根或用判别式来做，均不能奏效．可用韦达定理，先把这个有理数 r 消去．

解 当 r=0 时，原方程为 x-1=0，所以 x=1．

$$\begin{cases} x_1+x_2=-1-\dfrac{1}{r}, \\ x_1x_2=1-\dfrac{1}{r}. \end{cases}$$

当 r≠0 时，原方程是关于 x 的一元二次方程，设它的两个整数根为 x_1，x_2，且 $x_1 \geq x_2$，则

消去 r 得

$$x_1x_2-x_1-x_2=2,$$

所以 $(x_1-1)(x_2-1)=3$．

所以 $\begin{cases} x_1-1=3, \\ x_2-1=1; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1-1=-1, \\ x_2-1=-3, \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1=4, \\ x_2=2; \end{cases} \begin{cases} x_1=0, \\ x_2=-1; \end{cases}$$

所以 $r=\dfrac{1}{1+x_1x_2}=-\dfrac{1}{7}$ 或 1.

综上所述，当 $r=-\dfrac{1}{7}$，0，1时，方程的所有根都是整数.

例 7 已知 a 是正整数，且使得关于 x 的一元二次方程

$$ax^2+2(2a-1)x+4(a-3)=0$$

至少有一个整数根，求 a 的值．

解 将原方程变形为

$$(x+2)^2a=2(x+6).$$

显然 $x+2\neq 0$，于是

$$a=\frac{2(x+6)}{(x+2)^2}.$$

由于 a 是正整数，所以 $a\geq 1$，即

$$\frac{2(x+6)}{(x+2)^2}\geqslant 1,$$

所以 $x^2+2x-8\leq 0$，

$$(x+4)(x-2)\leq 0,$$

所以 $-4\leq x\leq 2(x\neq -2)$．

当 x=-4，-3，-1，0，1，2 时，得 a 的值为 1，6，10，3，$\frac{14}{9}$，1．所以a的值为1，3，6，10．

说明 从解题过程中知，当 a=1 时，有两个整数根-4，2；当 a=3，6，10 时，方程只有一个整数根．有时候，在关于 x 的一元二次方程中，如果参数是一次的，可以先对这个参数来求解．

例 8 已知方程 $x^2+bx+c=0$ 与 $x^2+cx+b=0$ 各有两个整数根 x_1，x_2 和x_1'，x_2'，且$x_1x_2>0$，$x_1'x_2'>0$．

(1) 求证：$x_1<0$，$x_2<0$，$x_1'<0$，$x_2'<0$；

(2)求证：$b-1\leq c\leq b+1$；

(3)求 b，c 的所有可能的值．

解 (1)由 $x_1x_2>0$ 知，x_1与 x_2同号．若 $x_1>0$，则 $x_2>0$，

这时 $-b=x_1+x_2>0$，所以$b<0$．与$b=x_1'x_2'>0$矛盾，所以，$x_1<0$，$x_2<0$．同理可证$x_1'<0$，$x_2'<0$．

(2)由(1)知，$x_1<0$，$x_2<0$，所以 $x_1\leq -1$，$x_2\leq -1$．由韦达定理

$c-(b-1)=x_1x_2+x_1+x_2+1$

$=(x1+1)(x2+1)\geq 0$，

所以 $c\geq b-1$．

同理有

$$\begin{aligned} b-(c-1) &= x_1'x_2'+x_1'+x_2'+1 \\ &= (x_1'+1)(x_2'+1)\geqslant 0, \end{aligned}$$

所以 $c\leq b+1$，

所以 $b-1\leq c\leq b+1$．

(3)由(2)可知，b 与 c 的关系有如下三种情况：

(i)$c=b+1$．由韦达定理知

$$x_1x_2=-(x_1+x_2)+1，$$

所以 $(x_1+1)(x_2+1)=2$，

所以 $\begin{cases} x_1+1=-1, \\ x_2+1=-2; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1+1=-2, \\ x_2+1=-1. \end{cases}$

解得 $x_1+x_2=-5$，$x_1x_2=6$，所以 $b=5$，$c=6$．

(ii)$c=b$．由韦达定理知

$$x_1x_2=-(x_1+x_2)，$$

所以 $(x_1+1)(x_2+1)=1$，

所以 $x_1=x_2=-2$，从而 $b=4$，$c=4$．

(iii)$c=b-1$．由韦达定理知

$$-(x_1'+x_2')=x_1'\cdot x_2'-1,$$

所以

$$(x_1'+1)(x_2'+1)=2,$$

解得 $x_1'+x_2'=-5$，$x_1'x_2'=6$，所以 $b=6$，$c=5$.

综上所述，共有三组解：$(b,c)=(5,6)$，$(4,4)$，$(6,5)$．

练习二十六

1．填空：

(1)方程 $x^2+px+1997=0$ 恰有两个正整数根 x_1，x_2，则 $\frac{p}{(x_1+1)(x_2+1)}$ 的值是________.

(2)已知 k 为整数，且关于 x 的方程

$$(k^2-1)x^2-3(3k-1)x+18=0$$

有两个不相同的正整数根，则 k=_____．

(3)两个质数 a，b 恰好是关于 x 的方程 $x^2-21x+t=0$ 的两个根，则 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=$_______.

(4)方程 $x^2+px+q=0$ 的两个根都是正整数，并且 $p+q=1992$，则方程较大根与较小根的比等于_____．

(5)已知方程 $(a^2-1)x^2-2(5a+1)x+24=0$ 有两个不相等的负整数根，则整数 a 的值是_____．

2．设 m 为整数，且 $4<m<40$，又方程

$$(x^2-2(2m-3)x+4m^2-14m+8=0$$

有两个整数根，求 m 的值及方程的根．

3．已知关于 x 的一元二次方程

$$x^2+(m-17)x+m-2=0$$

的两个根都是正整数，求整数 m 的值．

4．求使关于 x 的方程 $a^2x^2+ax+1-7a^2=0$ 的两根都是整数的所有正数 a．

5．求所有的整数 a，使得关于 x 的二次方程

$$ax^2+2ax+a-9=0$$

至少有一个整数根．