暑假专题——函数解题中的数学思想应用

重点、难点

数学思想的应用

【典型例题】

一. 方程思想的应用

例 1. 已知点 P（x，x+y）与点 Q（y+5，x-7）关于 x 轴对称，则点 Q 坐标为______。

分析：P 点关于 x 轴对称时，横坐标不变，纵坐标相反

构造方程组 $\begin{cases} x=y+5 \\ x+y+x-7=0 \end{cases}$

解得：$\begin{cases} x=4 \\ y=-1 \end{cases}$

∴Q 点坐标为（4，-3）

例 2. 已知一次函数 $y=2x^{m^2-2m-2}+m-2$ 的图像经过第一、二、三象限，求 m 的值。

分析：一次函数条件：x 的次数为 1

即：$m^2-2m-2=1$

得：$m^2-2m-3=0$

解得：$m_1=-1$，$m_2=3$

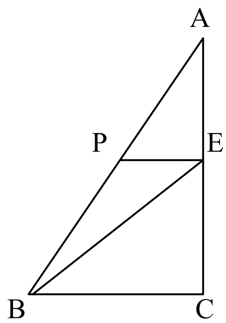
而当 $m_1=-1$时，$m-2=-3$

此时 $y=2x^{m^2-2m-2}$ 图像经过一、三、四象限

不符合题意，舍去

故 m=3

例 3. 已知：在△ABC 中，$\angle C=90°$，$AB=10$，$BC=6$，P 为 AB 上一动点（P 不与 A、B 重合），过点 P 作 PE//BC 交 AC 于 E，连结 BE，设 AP=x，△BPE 的面积为 y，求 y 与 x 之间的函数关系，并求自变量 x 的取值范围。



分析：$\because S_{\Delta BPE}=\frac{1}{2}PE\cdot EC$

∴知道 PE 的长、EC 的长是关键，而 PE、EC 与三角形相似有关。

所以此题借助比例式找出 PE、EC 与 x 之间的等量关系。

即：用含 x 的式子表示 PE、EC，进而得到函数关系式。

解：$\because PE//BC$

$\therefore \frac{PE}{BC}=\frac{AP}{AB}$，$AB=10$，$AP=x$

$\therefore PE=\frac{3}{5}x$

又 $\because \frac{AP}{AB}=\frac{AE}{AC}$，$AC=\sqrt{AB^2-}$

$\therefore AE=\frac{4}{5}x$

$\therefore EC=8-\frac{4}{5}x$

$\therefore S_{\Delta PEB}=\frac{1}{2}PE\cdot EC$

$y=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}x\cdot\left(8-\frac{4}{5}x\right)$

$=\frac{12}{5}x-\frac{6}{25}x^2$

$=-\frac{6}{25}x^2+\frac{12}{5}x$

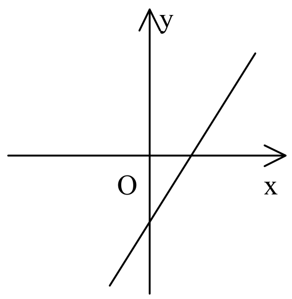
二. 数形结合思想的应用

例 1. 一次函数 $y=k^2x-|k|$ 的图像经过第_______象限。

分析： k^2 充当 $y=kx+b$ 中的 k，此时大于 0

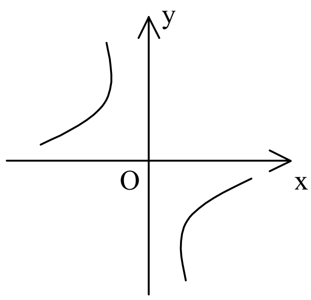
$-|k|$ 充当 $y=kx+b$ 中的 b，此时小于 0

则依据直线 $y=kx+b$，当 $k>0$，$b<0$ 的图象示意图：可知图像经过一、三、四象限。



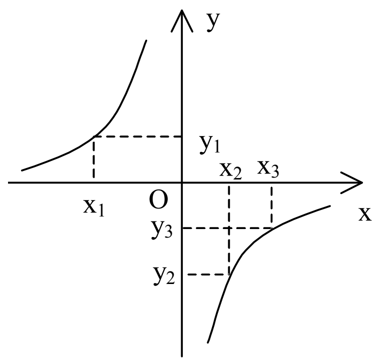
例 2. 已知反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k<0)$，(x_1, y_1)，(x_2, y_2)，(x_3, y_3) 是反比例函数图象上的三个点，若 $x_1<0<x_2<x_3$，试判断 y_1，y_2，y_3 的大小关系。

分析： 反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k<0)$ 的图像位于二、四象限



只需将 x_1，x_2，x_3 在图像上找到相对应的点，则可确定相应的函数值 y_1，y_2，y_3。从而根据位置判断大小。

y 轴上，越往上数越大，所以 $y_1>0>y_3>y_2$。

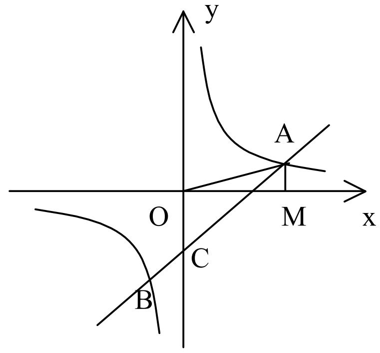


例 3. 如图所示，一次函数 $y=k_1x+b$ 的图像过第一、三、四象限，且与双曲线 $y=\frac{k_2}{x}$ 的图像交于 A、B 两点，与 y 轴交于 C，$A(x，y)$ 是 $\angle xOA$ 终边上的一点，若 $\tan\angle xOA=\frac{1}{5}$，原点 O 到 A 点的距离为 $\sqrt{26}$

（1）求 A 点坐标；

（2）求反比例函数的解析式；

（3）若 $S_{\Delta AOC}=b^2-6$，求一次函数的解析式。



分析：此题关键是在平面直角坐标系中借助 $\tan\angle xOA=\frac{1}{5}$ 及 $OA=\sqrt{26}$，在 Rt△中求 A 点坐标。从而进一步借助 $\frac{1}{2}OC\times A$ 到 y 轴距离等于 $S_{\Delta AOC}=b^2-6$，求出 b，确定一次函数的解析式。

解：（1）设点 A 坐标为（a，b），且 $a>0$，$b>0$

过 A 作 $AM\perp x$ 轴交 x 轴于 M

则 $OM=|a|$，$AM=|b|$

在 $Rt\Delta AOM$ 中，$\tan\angle xOA=\frac{1}{5}$，且 $OA=\sqrt{26}$

则 $a=5$，$b=1$

所以点 A 坐标为（5，1）

（2）此反比例函数解析式为 $y=\frac{5}{x}$

（3）$\because S_{\Delta AOC}=b^2-6$，且 $b<0$（OC=|b|，C 在 x 轴下方）

$\therefore \frac{1}{2}|b|\cdot 5 = b^2 - 6$
$\therefore -\frac{5}{2}b = b^2 - 6$
$\therefore 2b^2 + 5b - 12 = 0$
解得：$b_1 = \frac{3}{2}$（舍去），$b_2 = -4$

∴一次函数解析式为：$y = k_1x - 4$

又∵直线 $y = k_1x - 4$ 过点 $A(5, 1)$

$\therefore 1 = 5k_1 - 4$，$k_1 = 1$

∴一次函数解析式为 $y = x - 4$

三. 分类讨论思想的应用

例 1. 已知点 N 在 x 轴下方，且到 x 轴距离为 2，到 y 轴距离为 $\sqrt{3}$，则点 N 的坐标为__________。

分析：设点 N 坐标为（x，y）

由题意得：$|x| = \sqrt{3}$，$|y| = 2$

则 $x = \pm\sqrt{3}$，$y = \pm 2$

又∵点 N 在 x 轴下方，y<0

$\therefore x = \pm\sqrt{3}$，$y = -2$

$\therefore N(\sqrt{3}, -2)$ 或 $N(-\sqrt{3}, -2)$

例 2. 已知直线 $y = kx - 3$ 与直角坐标系的两坐标轴围成的三角形的面积为 9，则直线解析式为__________。

分析：设直线 $y = kx - 3$ 与 x 轴交点为 A，与 y 轴交点为 B

则 $A\left(\frac{3}{k}, 0\right)$，$B(0, -3)$

$\because S_{\Delta AOB} = 9$，$\frac{1}{2}AO\cdot BO = 9$，$\frac{1}{2}\left|\frac{3}{k}\right| \times 3 = 9$

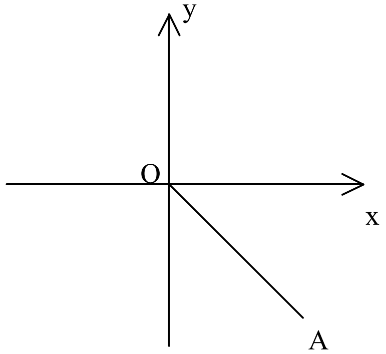
$\left|\frac{3}{k}\right| = 6$，$\frac{3}{k} = \pm 6$，$k = \pm\frac{1}{2}$

∴直线解析式为 $y = \frac{1}{2}x - 3$ 或 $y = -\frac{1}{2}x - 3$

例 3. 已知点 A 为平面直角坐标系内第四象限夹角平分线上一点，且 OA=5，试在坐标轴上找一点 C，使得△AOC 为等腰三角形，并写出 C 点坐标。

分析：首先应分别在 x 轴和 y 轴上找点 C

其次，△AOC 应分类找：（1）OA 为腰；（2）OA 为底



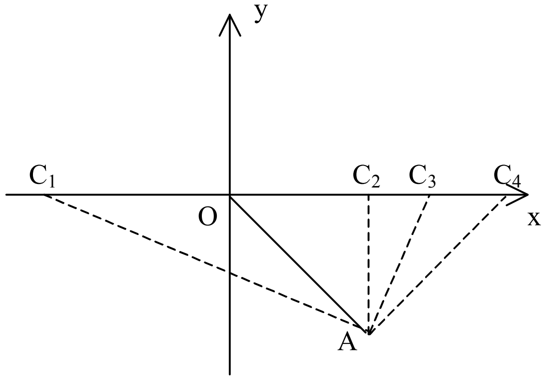
当 C 点在 x 轴上时

$C_1(-5,0)$、$(OC_1=OA)$

$C_2\left(\frac{5}{2}\sqrt{2},0\right)$、$(OC_2=AC_2)$

$C_3(5,0)$、$(OC_3=OA)$

$C_4(5\sqrt{2},0)$、$(OA=AC_4)$



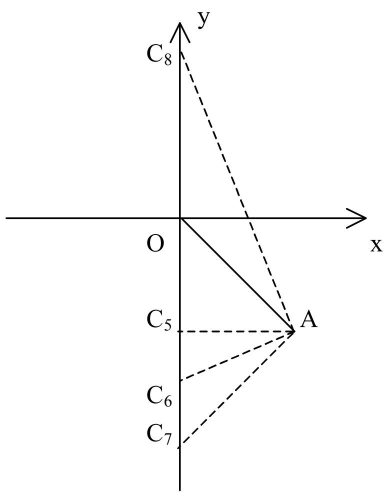
当 C 点在 y 轴上时

$C_5\left(0,-\frac{5}{2}\sqrt{2}\right)$、$(OC_5=AC_5)$

$C_6(0,-5)$、$(OA=OC_6)$

$C_7(0,-5\sqrt{2})$、$(OA=AC_7)$

$C_8(0,5)$、$(OA=OC_8)$



四. 转化思想的应用

例 1. 已知一次函数 $y=(k-1)x+(-k-5)$ 的图像经过二、三、四象限，求 k 的取值范围。

分析：直线经过二、三、四象限

则 $\begin{cases}k-1<0\\-k-5<0\end{cases}$

得：$\begin{cases}k<1\\k>-5\end{cases}$

所以 $-5<k<1$

例 2. 待定系数解题（转化为方程组）

如：已知 $y+n$ 与 $x+m$ 成正比例，其中 m，n 是常数，当 $x=1$ 时，$y=-1$；当

$x=-1$时，$y=-7$，求y与x的函数关系。

分析：设$y+n=k(x+m)$

当$x=1$时，$y=-1$得：$-1+n=k(1+m)$

当$x=-1$时，$y=-7$得：$-7+n=k(-1+m)$

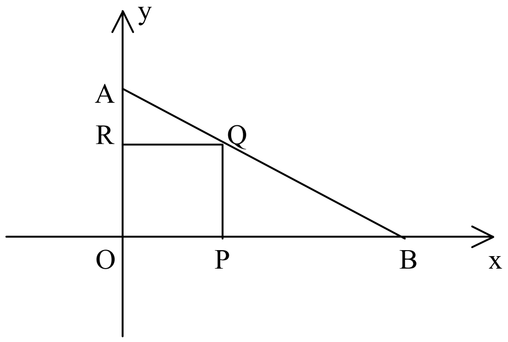
解方程组$\begin{cases}-1+n=k(1+m)\\-7+n=k(-1+m)\end{cases}$

$\begin{cases}-1=k+km-n\\-7=-k+km-n\end{cases}$

解得：$\begin{cases}k=3\\km-n=-4\end{cases}$

所求函数关系式为：$y+n=k(x+m)$，$y=kx+km-n=3x-4$

例3. 如图所示，直线$y=kx+b$与y轴交于点A（0，3）与x轴交于点B，正方形OPQR的两边在坐标轴上，Q在直线AB上，OP：PB=1：2，求直线的解析式。



分析：求直线AB解析式，需要知道A、B坐标。而A点（0，3），则OA=3，求B点即可，即求OB长，此问题转化为几何问题。

$\because \Delta AOB$中，$RQ//OB$

$\therefore \frac{AR}{AO}=\frac{RQ}{OB}$

又知PQRO为正方形，设正方形边长为x，则$RQ=OR=OP=x$

$\because OP:PB=1:2$

$\therefore PB=2x$

则$OB=3x$，$AR=3-x$

$\therefore \frac{3-x}{3}=\frac{x}{3x}$，$x=2$

$\therefore OB=6$

∴B点坐标为（6，0）

∴直线解析式为$y=-\frac{1}{2}x+3$

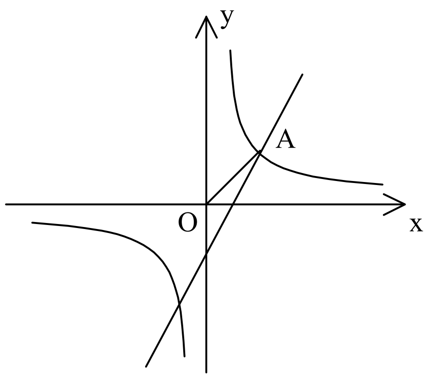
五. 几何解题思想的综合应用

例：已知反比例函数$y=\frac{k}{2x}$和一次函数$y=2x-1$，其中一次函数的图象经过（a，b），（a+1，b+k）两点。

（1）求反比例函数的解析式；

（2）如图所示，已知点A是上述两个函数的图象在第一象限的交点，求点A的坐标；

（3）利用（2）的结果，回答：在x轴上是否存在点P，使△AOP为等腰三角形？若存在，把符合条件的P点坐标都求出来；若不存在，请说明理由。



分析：（1）由一次函数 $y=2x-1$ 的图象经过两点（a，b），（a+1，b+k），代入消去 a，b，可得 k=2，进而可确定反比例函数的关系式。

（2）将 $y=2x-1$ 与 $y=\frac{1}{x}$ 联立成方程组，易求出点 A 的坐标；

（3）应根据 OA 为腰和底进行分类，结合（2）探求出点 P 的存在性。

解：（1）依题意可得：$\begin{cases} b=2a-1 \\ b+k=2(a+1)-1 \end{cases}$

两式相减，得 $k=2$

所以反比例函数的解析式为 $y=\frac{1}{x}$

（2）由 $\begin{cases} y=2x-1 \\ y=\frac{1}{x} \end{cases}$，得 $\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=1 \end{cases}$，$\begin{cases} x_2=-\frac{1}{2} \\ y_2=-2 \end{cases}$

经检验 $\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=1 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} x_2=-\frac{1}{2} \\ y_2=-2 \end{cases}$ 都是原方程组的解。

因为 A 点在第一象限，所以 A 点坐标为（1，1）

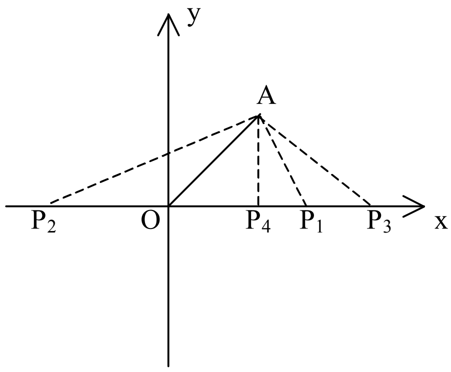
（3）$OA=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，OA 与 x 轴所夹锐角为 45°

如图下所示①，当 OA 为腰时，由 OA=OP，得 $P_1(\sqrt{2},0)$，$P_2(-\sqrt{2},0)$

由 $OA=AP$，得 $P_3(2,0)$

② 当 OA 为底时，得 $P_4(1,0)$

所以这样的点有 4 个，分别是 $(\sqrt{2},0)$、$(-\sqrt{2},0)$、$(2,0)$、$(1,0)$



【模拟试题】（答题时间：30 分钟）

1. 反比例函数 $y=\frac{1-2m}{x}$ 的图象上两点 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，当 $x_1<0<x_2$ 时，有 $y_1<y_2$，则 m 的取值范围是______________。

2. 已知反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象在第一、三象限，则一次函数 $y=-kx+2$ 的图象不经过第____________象限。

3. 直线 $y=(m-2)x+3m-5$ 与 y 轴的交点在 x 轴上方，且 y 随 x 的增大而减小，则 m 的取值范围是__________。

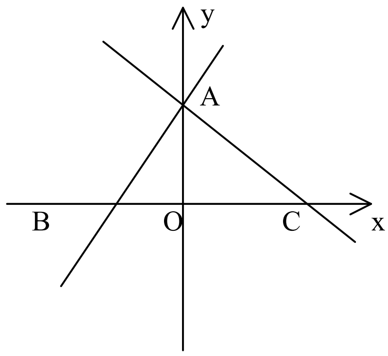
4. 三角形三边长为 3cm，5cm，xcm，则三角形的周长为 $y(cm)$ 与 $x(cm)$ 的函数关系式是______________，自变量 x 的取值范围是___________。

5. 当 m 取何值时，函数 $y=(m-2)x^{m^2-3}+2+m$ 是 x 的一次函数？它是否是正比例函数？

6. 已知一次函数 $y=(m-2)x+m-3$ 的图象经过第一、三、四象限，求 m 的取值范围。

7. 直线 $y=2x-2$ 和直线 $y=x-5$ 的交点在第__________象限。

8. 两个一次函数的图象交于 y 轴上一点 A，分别交 x 轴于点 B、C，如图所示，若已知|OB|：|OA|：|OC|=1：2：3，且△ABC 的面积是 16，求两函数的解析式。



9. 在平面直角坐标系中，已知点 $A(7-2m，5-m)$ 在第二象限，且 m 为整数，则过点 A 的反比例函数的解析式为________________。

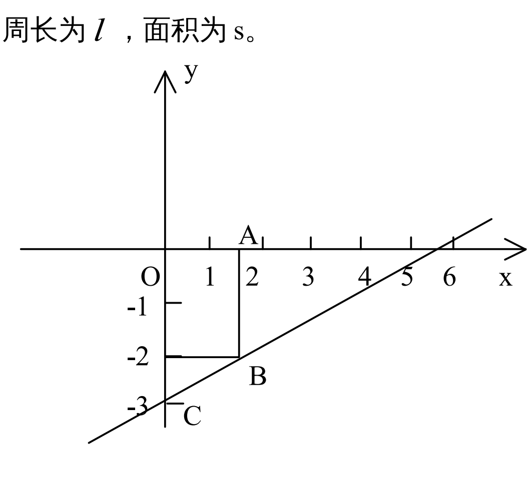
10. 如果一次函数 $y=kx-2$ 的图象与两坐标轴所围成的三角形的面积为 10，则此一次函数为_________________。

11. 已知点 A 是正比例函数 $y=2x$ 和反比例函数 $y=\frac{8}{x}$ 在第一象限的交点

（1）求点 A 的坐标；

（2）如果直线 $y=\frac{4}{3}x+b$ 经过点 A 且与 x 轴交于点 C，求 b 及点 C 的坐标。

12. 如图所示，在第四象限内的矩形 OABC，两边在坐标轴上，一个顶点在一次函数 $y=\frac{1}{2}x-3$ 的图象上，当点 A 从左向右移动时，矩形的周长与面积也随之发生变化，设线段 OA 长 m，矩形的周长为 l ，面积为 s。



（1）试分别写出 l、s 与 m 的函数关系；

（2）能否求出当 m 取何值时，矩形的周长 l 最大？为什么？

（3）你能否估计矩形的面积是否有最大值，简单说一下你的想法？

【试题答案】

1. $m<\frac{1}{2}$

2. 三

3. $\frac{5}{3}<m<2$

4. $y=8+x$；$2<x<8$

5. **解：** $\begin{cases} m^2-3=1 \\ m-2\neq 0 \end{cases}$，$\begin{cases} m=\pm 2 \\ m\neq 2 \end{cases}$

则 $m=-2$

$\therefore y=-4x$，它是一次函数也是正比例函数。

6. **解：** $\because \begin{cases} m-2>0 \\ m-3<0 \end{cases}$，$\therefore \begin{cases} m>2 \\ m<3 \end{cases}$

$\therefore 2<m<3$

7. 三

8. **解：** 设 $OB=x$，$OA=2x$，$OC=3x$

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\times OA=\frac{1}{2}\cdot 4x\cdot 2x$

$16=4x^2$，$x^2=4$，$x=2$

$\therefore OB=2$，$OA=4$，$OC=6$

$\therefore A(0, 4)$，$B(-2, 0)$，$C(6, 0)$

∴直线 AB 解析式为 $y=2x+4$，直线 AC 解析式为 $y=-\frac{2}{3}x+4$

9. $y=-\frac{1}{x}$

10. $y=\frac{1}{5}x-2$ 或 $y=-\frac{1}{5}x-2$

11. **解：**（1）$\begin{cases} y=2x \\ y=\frac{8}{x} \end{cases}$，解得：$\begin{cases} x_1=2 \\ y_1=4 \end{cases}$，$\begin{cases} x_2=-2 \\ y_2=-4 \end{cases}$（不合题意，舍去）

$\therefore A(2, 4)$

（2）$y=\frac{4}{3}x+b$ 经过点 $A(2, 4)$

则 $4=\frac{4}{3}\times 2+b$，即 $4=\frac{8}{3}+b$，$b=\frac{4}{3}$

$\therefore y=\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}$

$\therefore C(-1, 0)$

12. **解：**（1）①由题意得 $B\left(m, \frac{1}{2}m-3\right)$，$AB=\left|\frac{1}{2}m-3\right|=-\frac{1}{2}m+3$

$l=2\left(m-\frac{1}{2}m+3\right)$，即 $l=m+6$(一次函数)

② $s=OA\cdot OB=m\left(-\frac{1}{2}m+3\right)$

$\therefore s=-\frac{1}{2}m^2+3m$

（2）周长 l 是 m 的一次函数，且 l 随 m 的增大而增大。是否有最大值，关键在于 m 的取值范围。$y=\frac{1}{2}x-3$ 与 x 轴交点为（6，0），所以 $0<m<6$，m 越接近 6，周长越大。但不能等于 6，所以周长无最大值。

（3）当点 A 接近于（0，0）时，面积接近于 0，随着点 A 逐渐右移，面积逐渐增大。而当点 A 接近于（6，0），面积也接近于 0，随着点 A 位置变化，可知面积先随 m 的增大

而增大，到一定程度时，开始随 x 的增大而减小，估计在 m 取某一值时，面积为最大值。