

暑假专题——相似三角形

重点、难点：

1. 通过探索两个三角形相似的识别方法，加强合情推理能力的培养，感受发现的乐趣，逐步掌握说理的基本方法。
2. 通过相似三角形性质复习，丰富与角、面积等相关的知识方法，开阔研究角、面积等问题的视野。

【知识纵横】

1. 相似三角形

对应角相等，对应边成比例的三角形叫做相似三角形 (similar triangles)。

议一议：

- (1) 两个全等三角形一定相似吗？为什么？
- (2) 两个直角三角形一定相似吗？两个等腰直角三角形呢？为什么？
- (3) 两个等腰三角形一定相似吗？两个等边三角形呢？为什么？

2. 相似比

相似三角形对应边的比叫做相似比。

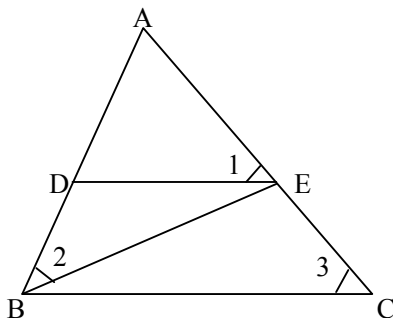
说明：相似比要注意顺序：如 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ 的相似比 $k_1 = \frac{AB}{A'B'}$ ，而 $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ 的相似比 $k_2 = \frac{A'B'}{AB}$ ，这时 $k_1 = \frac{1}{k_2}$ 。

3. 相似三角形的识别

- (1) 如果一个三角形的两角分别与另一个三角形的两角对应相等，那么这两个三角形相似。
- (2) 如果一个三角形的两条边与另一个三角形的两条边对应成比例，并且夹角相等，那么这两个三角形相似。
- (3) 如果一个三角形的三条边和另一个三角形的三条边对应成比例，那么这两个三角形相似。

【典型例题】

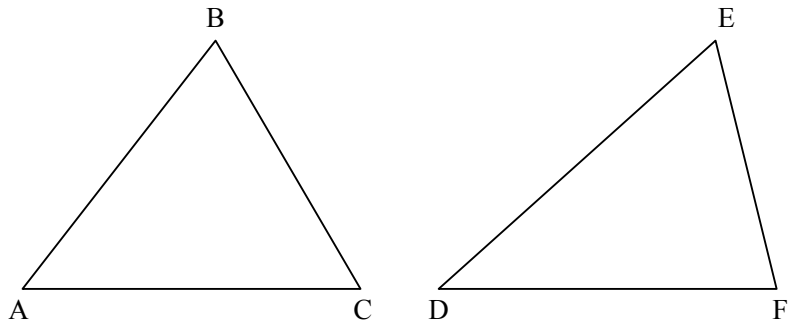
例 1. 如图， $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$ ，图中相似三角形有 () 对。



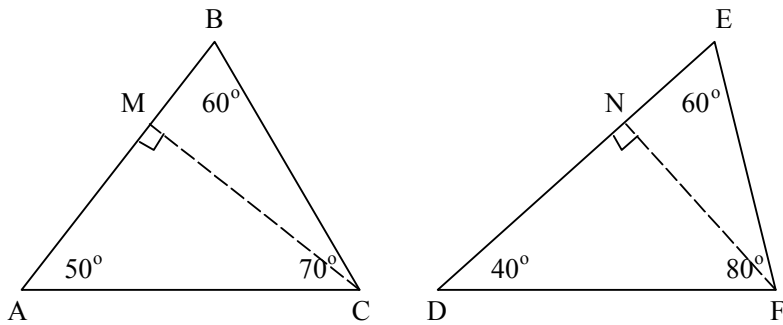
答：4对

例 2. 如图，已知： $\triangle ABC$ 、 $\triangle DEF$ ，其中 $\angle A = 50^\circ$ ， $\angle B = 60^\circ$ ， $\angle C = 70^\circ$ ， $\angle D = 40^\circ$ ， $\angle E = 60^\circ$ ， $\angle F = 80^\circ$ ，能否分别将两个三角形分割成两个小三角形，使 $\triangle ABC$ 所分成的每个三角形与 $\triangle DEF$ 所分成的每个三角形分别对应相似？

如果可能,请设计一种分割方案;若不能,说明理由。

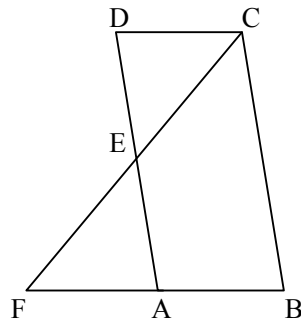


解:



例 3. (2004·广东省) 如图所示, 四边形 ABCD 是平行四边形, 点 F 在 BA 的延长线上, 连结 CF 交 AD 于点 E。

- (1) 求证: $\triangle CDE \sim \triangle FAE$;
- (2) 当 E 是 AD 的中点, 且 $BC = 2CD$ 时, 求证: $\angle F = \angle BCF$ 。



命题意图: 相似三角形的识别、特征在解题中的应用。

解析: 由 $AB \parallel DC$ 得: $\angle F = \angle DCE$, $\angle EAF = \angle D$

$\therefore \triangle CDE \sim \triangle FAE$

$\therefore \frac{CD}{FA} = \frac{DE}{AE}$, 又 E 为 AD 中点

$\therefore DE = AE$, 从而 $CD = FA$, 结合已知条件, 易证

$BF = BC$, $\angle F = \angle BCF$

解: (1) \because 四边形 ABCD 是平行四边形

$\therefore AB \parallel CD$

$\therefore \angle F = \angle DCE$, $\angle EAF = \angle D$

$\therefore \triangle CDE \sim \triangle FAE$

(2) \because E 是 AD 中点, $\therefore DE = AE$

由 (1) 得: $\frac{CD}{AF} = \frac{DE}{AE}$

$\therefore CD = AF$

\therefore 四边形 ABCD 是平行四边形

$\therefore AB = CD$

$\therefore AB = CD = AF$

$\therefore BF = 2CD$, 又 $BC = 2CD$

$\therefore BC = BF$

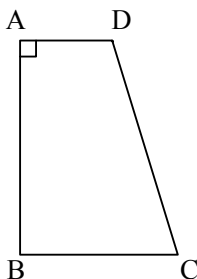
$\therefore \angle F = \angle BCF$

思路探究: 平行往往是证两个三角形相似的重要条件, 利用比例线段也可证明两线段相等。

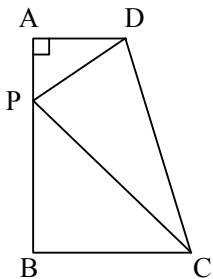
例 4. 在梯形 ABCD 中, $\angle A = 90^\circ$, $AD \parallel BC$, 点 P 在线段 AB 上从 A 向 B 运动,

(1) 是否存在一个时刻使 $\triangle ADP \sim \triangle BCP$;

(2) 若 $AD = 4$, $BC = 6$, $AB = 10$, 使 $\triangle ADP \sim \triangle BCP$, 则 AP 的长度为多少?



解: (1) 存在



(2) 若 $\triangle ADP \sim \triangle BCP$, 则 $\frac{AD}{BC} = \frac{AP}{BP}$

设 $AP = x$

$\therefore \frac{4}{6} = \frac{x}{10-x}$, $\therefore x = 4$, $\therefore AP = 4$

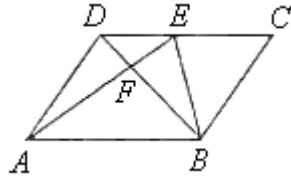
或 $\frac{AD}{BP} = \frac{AP}{BC}$

$\therefore \frac{4}{10-x} = \frac{x}{6}$, $\therefore x = 4$ 或 $x = 6$

$\therefore AP = 4$ 或 $AP = 6$

\therefore AP 长度为 4 或 6

例 5. 如图, 在平行四边形 ABCD 中, E 为 CD 上一点, $DE : CE = 2 : 3$, 连结 AE、BE、BD, 且 AE、BD 交于点 F, 则 $S_{\triangle DEF} : S_{\triangle EBF} : S_{\triangle ABF} = ()$



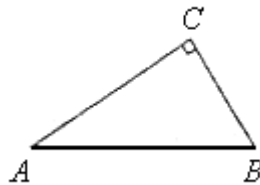
- A. 4 : 10 : 25 B. 4 : 9 : 25
 C. 2 : 3 : 5 D. 2 : 5 : 25

(2001年黑龙江省中考题)

思路点拨：运用与面积相关知识，把面积比转化为线段比。

∴选A

例6. 如图，有一批形状大小相同的不锈钢片，呈直角三角形，已知 $\angle C = 90^\circ$ ， $AB = 5\text{cm}$ ， $BC = 3\text{cm}$ ，试设计一种方案，用这批不锈钢片裁出面积达最大的正方形不锈钢片，并求出这种正方形不锈钢片的边长。



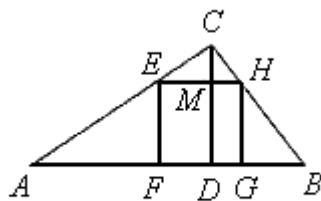
思路点拨：要在三角形内裁出面积最大的正方形，那么这正方形所有顶点应落在 $\triangle ABC$ 的边上，先画出不同方案，把每种方案中的正方形边长求出。

解：如图甲，设正方形EFGH边长为 x ，则 $AC = 4$

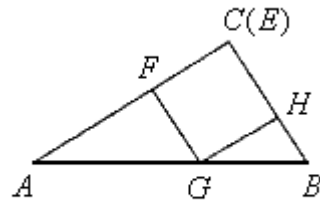
而 $CD \times AB = AC \times BC = 2S_{\triangle ABC}$ ，得 $CD = \frac{12}{5}$

又 $\triangle CEH \sim \triangle CAB$ ，得 $\frac{CM}{CD} = \frac{EH}{AB}$

于是 $\frac{\frac{12}{5} - x}{\frac{12}{5}} = \frac{x}{5}$ ，解得： $x = \frac{60}{37}$



图甲



图乙

如图乙，设正方形CFGH的边长为 $y\text{cm}$

由 $GH \parallel AC$ ，得： $\frac{GH}{AC} = \frac{BH}{BC}$

即 $\frac{y}{4} = \frac{3-y}{3}$ ，解得： $y = \frac{12}{7}$

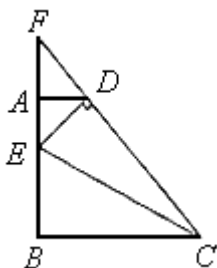
∴ $x = \frac{60}{37}$ ， $y = \frac{12}{7} = \frac{60}{35}$ ，∴ $y > x$

即应如图乙那样裁剪，这时正方形面积达最大，它的边长为 $\frac{12}{7} \text{ cm}$

例 7. 如图，已知直角梯形 ABCD 中， $\angle A = \angle B = 90^\circ$ ，设 $AB = a$ ， $AD = b$ ， $BC = 2b$ ($a > b$)，作 $DE \perp DC$ ，DE 交 AB 于点 E，连结 EC。

(1) 试判断 $\triangle DCE$ 与 $\triangle ADE$ 、 $\triangle DCE$ 与 $\triangle BCE$ 是否分别一定相似？若相似，请加以证明。

(2) 如果不一定相似，请指出 a、b 满足什么关系时，它们就能相似？



解： (1) $\triangle DCE$ 与 $\triangle ADE$ 一定相似， $\triangle DCE$ 与 $\triangle BCE$ 不一定相似，分别延长 BA、CD 交于 F 点

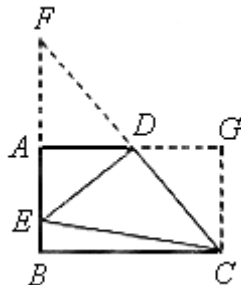
$$\text{由 } \triangle FAD \sim \triangle FBC, \text{ 得: } \frac{FD}{FC} = \frac{AD}{BC} = \frac{b}{2b} = \frac{1}{2}$$

于是 $FD = DC$ ，从而可证 $\triangle FED \cong \triangle CED$

得 $\angle AED = \angle DEC$

所以 $\triangle DEC \sim \triangle AED$

(2) 作 $CG \perp AD$ 交 AD 延长线于 G， $CD = \sqrt{a^2 + b^2}$



由 $\triangle AED \sim \triangle GDC$ ，有 $\frac{AE}{GD} = \frac{AD}{GC}$ ，得

$$AE = \frac{b^2}{a}$$

$$DE = \sqrt{AE^2 + AD^2} = \sqrt{b^2 + \left(\frac{b^2}{a}\right)^2} = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$BE = AB - AE = a - \frac{b^2}{a} = \frac{a^2 - b^2}{a}$$

$$\frac{BE}{DE} = \frac{\frac{a^2 - b^2}{a}}{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a^2 - b^2}{b \sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\frac{BC}{DC} = \frac{2b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

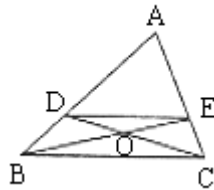
要使 $\triangle DCE$ 与 $\triangle BCE$ 相似，那么 $\frac{BE}{DE} = \frac{BC}{DC}$ 一定成立

即 $\frac{a^2 - b^2}{b} = 2b$ ，得 $a^2 = 3b^2$

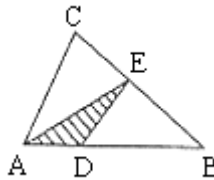
也就是当 $a = \sqrt{3}b$ 时， $\triangle DCE$ 与 $\triangle BCE$ 一定相似。

【模拟试题】（答题时间：40分钟）

1. 如图，已知 $DE \parallel BC$ ， CD 和 BE 相交于 O ，若 $S_{\triangle DOE} : S_{\triangle COB} = 9 : 16$ ，则 $AD : DB =$ _____。



2. 如图， $\triangle ABC$ 中， $CE : EB = 1 : 2$ ， $DE \parallel AC$ ，若 $\triangle ABC$ 的面积为 S ，则 $\triangle ADE$ 的面积为_____。



3. 若正方形的4个顶点分别在直角三角形的3条边上，直角三角形的两直角边的长分别为3cm和4cm，则此正方形的边长为_____。

(2000年武汉市中考题)

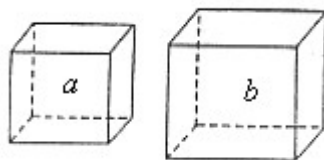
4. 阅读下面的短文，并解答下列问题：

我们把相似形的概念推广到空间：如果两个几何体大小不一定相等，但形状完全相同，就把它叫做相似体。

如图，甲、乙是两个不同的正方体，正方体都是相似体，它们的一切对应线段之比都等于相似比： $a : b$ ，设 $S_{甲} : S_{乙}$ 分别表示这两个正方体的表面积，则

$\frac{S_{甲}}{S_{乙}} = \frac{6a^2}{6b^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$ ，又设 $V_{甲}$ 、 $V_{乙}$ 分别表示这两个正方体的体积，则

$\frac{V_{甲}}{V_{乙}} = \frac{a^3}{b^3} = \left(\frac{a}{b}\right)^3$ 。



(1) 下列几何体中，一定属于相似体的是 ()

- A. 两个球体
- B. 两个圆锥体
- C. 两个圆柱体
- D. 两个长方体

(2) 请归纳出相似体的3条主要性质：

① 相似体的一切对应线段（或弧）长的比等于_____；

- ② 相似体表面积的比等于_____；
 ③ 相似体体积的比等于_____。

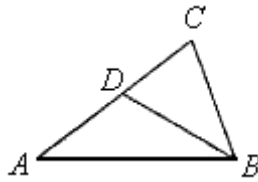
(2001年江苏省泰州市中考题)

5. 如图，铁道口的栏杆短臂长 1 m，长臂长 16 m，当短臂端点下降 0.5 m 时，长臂端点升高 ()



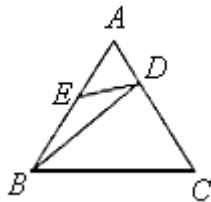
- A. 11.25 m B. 6.6 m C. 8 m D. 10.5 m

6. 如图，D 为 $\triangle ABC$ 的边 AC 上的一点， $\angle DBC = \angle A$ ，已知 $BC = \sqrt{2}$ ， $\triangle BCD$ 与 $\triangle ABC$ 的面积之比是 2 : 3，则 CD 的长是 ()



- A. $\frac{4}{3}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ D. $\frac{4}{3}\sqrt{3}$

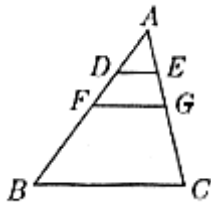
7. 如图，在正三角形 ABC 中，D、E 分别在 AC、AB 上，且 $\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$ ，AE = BE，则有 ()



- A. $\triangle AED \sim \triangle BED$ B. $\triangle AED \sim \triangle CBD$
 C. $\triangle AED \sim \triangle ABD$ D. $\triangle BAD \sim \triangle BCD$

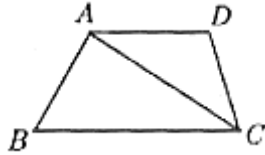
(2001年杭州市中考题)

8. 如图，已知 $\triangle ABC$ 中， $DE \parallel FG \parallel BC$ ，且 $AD : FD : FB = 1 : 2 : 3$ ，则 $S_{\triangle ADE} : S_{\text{四边形DFGE}} : S_{\text{四边形FBCG}}$ 等于 ()



- A. 1 : 9 : 36 B. 1 : 4 : 9
 C. 1 : 8 : 27 D. 1 : 8 : 36

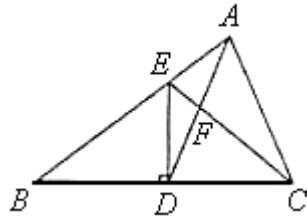
9. 如图，已知梯形 ABCD 中， $AD \parallel BC$ ， $\angle ACD = \angle B$ ，求证： $\frac{AB^2}{CD^2} = \frac{BC}{AD}$



10. 如图， $\triangle ABC$ 中，D 是 BC 边上的中点，且 $AD = AC$ ， $DE \perp BC$ ，DE 与 AB 相交于点 E，EC 与 AD 相交于点 F。

- (1) 求证： $\triangle ABC \sim \triangle FCD$ ；
- (2) 若 $S_{\triangle FCD} = 5$ ， $BC = 10$ ，求 DE 的长。

(2000 年河北省中考题)



11. 阅读并解答问题。

在给定的锐角 $\triangle ABC$ 中，求作一个正方形 DEFG，使 D、E 落在 BC 上，F、G 分别落在 AC、AB 边上，作法如下：

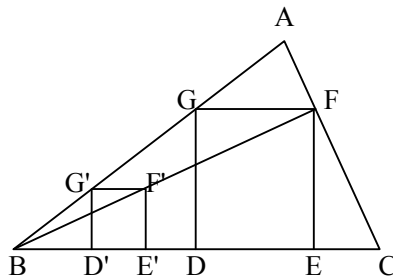
- 第一步：画一个有 3 个顶点落在 $\triangle ABC$ 两边上的正方形 $D'E'F'G'$ 。
- 第二步：连结 BF' ，并延长交 AC 于点 F；
- 第三步：过 F 点作 $FE \perp BC$ 于 E；
- 第四步：过 F 点作 $FG \parallel BC$ 交 AB 于点 G；
- 第五步：过 G 点作 $GD \perp BC$ 于点 D。

四边形 DEFG 即为所求作的四边形 DEFG，为正方形。

问题：

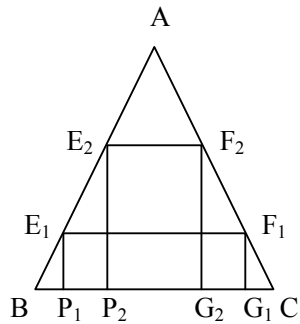
- (1) 证明上述所求作的四边形 DEFG 为正方形；
- (2) 在 $\triangle ABC$ 中，如果 $BC = 6 + \sqrt{3}$ ， $\angle ABC = 45^\circ$ ， $\angle BAC = 75^\circ$ ，求上述正方形 DEFG 的边长。

(江苏省扬州市中考题)

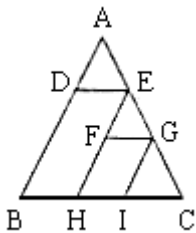


12. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = \sqrt{5}$ ， $BC = 2$ ，在 BC 上有 100 个不同的点 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{100}$ ，过这 100 个点分别作 $\triangle ABC$ 的内接矩形 $P_1E_1F_1G_1, P_2E_2F_2G_2, \dots, P_{100}E_{100}F_{100}G_{100}$ ，设每个内接矩形的周长分别为 L_1, L_2, \dots, L_{100} ，则 $L_1 + L_2 + \dots + L_{100} =$ _____。

(安徽省竞赛题)

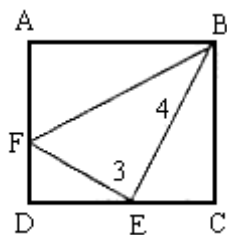


13. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $DE \parallel FG \parallel BC$ ， $GI \parallel EF \parallel AB$ ，若 $\triangle ADE$ 、 $\triangle EFG$ 、 $\triangle GIC$ 的面积分别为 20cm^2 、 45cm^2 、 80cm^2 ，则 $\triangle ABC$ 的面积为_____。

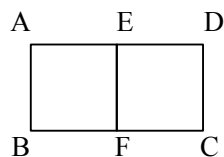


14. 如图，一个边长为 3、4、5 厘米的直角三角形的一个顶点与正方形的顶点 B 重合，另两个顶点分别在正方形的两条边 AD、DC 上，那么这个正方形的面积是_____厘米²。

(第 11 届“希望杯”邀请赛试题)

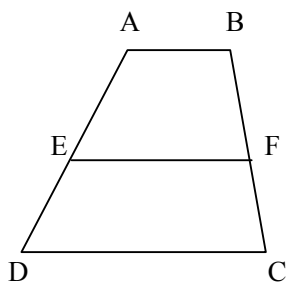


15. 如图，将一个矩形纸片 ABCD 沿 AD 和 BC 的中点连线对折，要使矩形 AEFB 与原矩形相似，则原矩形的长与宽的比为 ()



- A. 2 : 1 B. $\sqrt{3} : 1$ C. $\sqrt{2} : 1$ D. 1 : 1

16. 如图，梯形 ABCD 中， $AB \parallel CD$ ，且 $CD = 3AB$ ， $EF \parallel CD$ ，EF 将梯形 ABCD 分成面积相等的两部分，则 AE : ED 等于 ()



- A. 2 B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

【试题答案】

1. 3 : 1

2. $\frac{2}{9}S$

3. $\frac{12}{7}$ 或 $\frac{60}{37}$

4. (1) A ; (2) 相似比 ; 相似比的平方 ; 相似比的立方

5. C 6. C 7. B 8. C

9. 由 $\triangle ABC \sim \triangle DCA$, 得 $\frac{AB^2}{CD^2} = \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{BC}{AD}$

10. (1) 略

(2) 过 A 作 $AM \perp BC$ 于 M

由 $\triangle ABC \sim \triangle FCD$, 得 :

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle FCD}} = \left(\frac{BC}{CD}\right)^2 = \left(\frac{2CD}{CD}\right)^2 = 4$$

$$S_{\triangle ABC} = 4S_{\triangle FCD} = 20$$

$$\text{又 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AM, BC = 10, \text{ 得 } MA = 4$$

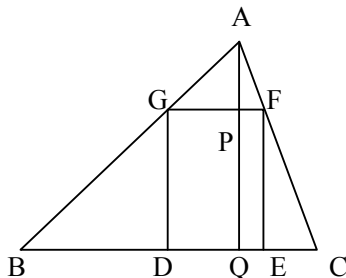
$\because DE \parallel AM,$

$$\therefore \frac{DE}{AM} = \frac{BD}{BM}, DM = \frac{1}{2} DC = \frac{5}{2}, BM = BD + DM, BD = \frac{1}{2} BC = 5$$

$$\therefore \frac{DE}{4} = \frac{5}{5 + \frac{5}{2}}, \text{ 得 } DE = \frac{8}{3}$$

11. (1) 易证明四边形 EFGD 为矩形, 由 $\frac{E'F'}{EF} = \frac{BF'}{BF} = \frac{F'G'}{FG}$, 而 $E'F' = G'F'$, 得 $EF = GF$, 故四边形 EFGD 为正方形。

(2) 过 A 作 $AQ \perp BC$ 于 Q 交 GF 于 P, 且 $AQ = BQ$, $\angle BCA = 60^\circ$, $\angle QAC = 30^\circ$, $QC = \frac{\sqrt{3}}{3}QA$, 又 $BC = 6 + \sqrt{3}$



$$\text{即 } AQ + \frac{\sqrt{3}}{3}AQ = 6 + \sqrt{3}, \text{ 解得 } AQ = \frac{15 - 3\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{由 } \frac{GF}{BC} = \frac{AP}{AQ}, \text{ 得 } GF = \frac{BC \cdot AQ}{BC + AQ} = \frac{81 - 3\sqrt{3}}{27 - \sqrt{3}} = 3$$

12. 400

提示 : 从内接一个矩形入手, 探求内接 $\triangle ABC$ 中任一矩形的长与宽的关系。

13. 405cm^2

提示： $\frac{DE}{BC} + \frac{FG}{BC} + \frac{IC}{BC} = 1$

14. $\frac{16^2}{17}$

解： 设 $BC = a$ ，则 $CE = \sqrt{16 - a^2}$

由 $\triangle BCE \sim \triangle EDF$ ，得 $DE = \frac{3}{4}a$

又 $DE + EC = DC$ ，即 $\frac{3}{4}a + \sqrt{16 - a^2} = a$

15. C

16. C

提示： 延长 DA、CB 相交于 G， $\frac{S_{\triangle GAB}}{S_{\triangle GDC}} = \left(\frac{AB}{CD}\right)^2 = \frac{1}{9}$

设 $S_{\triangle GAB} = S$ ，则

$$S_{\triangle GDC} = 9S$$

$$S_{\text{梯形}ABCD} = 8S$$

$$GA^2 : GE^2 : GD^2 = S_{\triangle GAB} : S_{\triangle GEF} : S_{\triangle GDC} = 1 : 5 : 9$$

$$\text{即 } GA : GE : GD = 1 : \sqrt{5} : 3, \quad \frac{AE}{ED} = \frac{\sqrt{5} - 1}{3 - \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$