

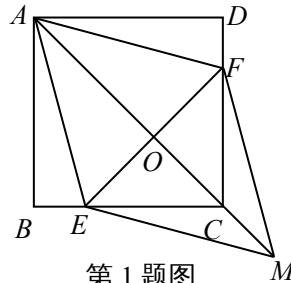
四边形证明题

1、已知：如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 E 、 F 分别在边 BC 和 CD 上， $\angle BAE = \angle DAF$ 。

(1) 求证： $BE = DF$ ；

(2) 联结 AC 交 EF 于点 O ，延长 OC 至点 M ，使 $OM = OA$ ，联结 EM 、 FM 。

求证：四边形 $AEMF$ 是菱形。



第 1 题图

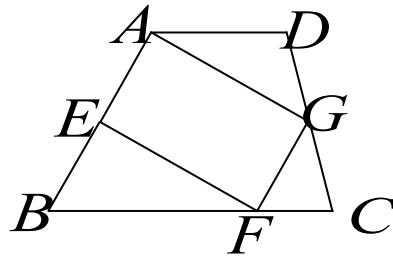
2、如图 8，已知梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， E 、 G 分别是 AB 、 CD 的中点，点 F 在

边 BC 上，且 $BF = \frac{1}{2}(AD + BC)$ 。

(1) 求证：四边形 $AEFG$ 是平行四边形；

(2) 联结 AF ，若 AG 平分 $\angle FAD$ ，

求证：四边形 $AEFG$ 是矩形。

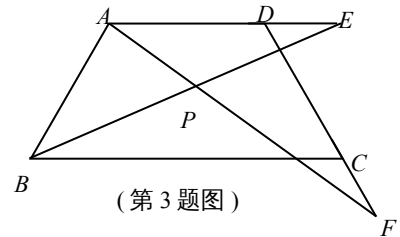


(第 2 题图)

3、如图，在等腰梯形 $ABCD$ 中， $\angle C = 60^\circ$ ， $AD \parallel BC$ ，且 $AD = AB = DC$ ， E 、 F 分别在 AD 、 DC 的延长线上，且 $DE = CF$ ， AF 、 BE 交于点 P 。

(1) 求证： $AF = BE$ ；

(2) 请猜测 $\angle BPF$ 的度数，并证明你的结论。

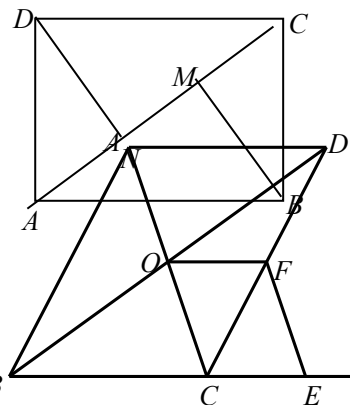


(第 3 题图)

4、如图，在矩形 $ABCD$ 中， $BM \perp AC$ ， $DN \perp AC$ ， M 、 N 是垂足。

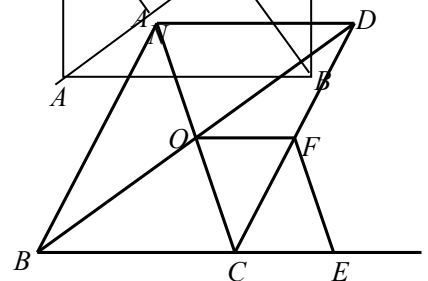
(1) 求证： $AN = CM$ ；

(2) 如果 $AN = MN = 2$ ，求矩形 $ABCD$ 的面积。



(图 5)

5.如图.在平行四边形 $ABCD$ 中， O 为对角线的交点，



点 E 为线段 BC 延长线上的一点，且 $CE = \frac{1}{2}BC$. 过点 E 作 $EF \parallel CA$ ，交 CD 于

点 F ，联结 OF .

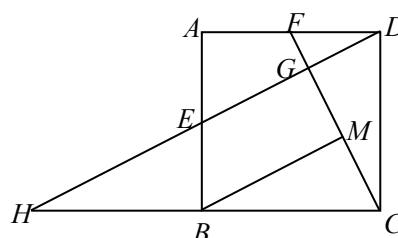
(1) 求证： $OF \parallel BC$ ；

(2) 如果梯形 $OBEF$ 是等腰梯形，判断四边形 $ABCD$ 的形状，并给出证明.

6、如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 E 、 F 分别是边 AB 、 AD 的中点， DE 与 CF 相交于 G ， DE 、 CB 的延长线相交于点 H ，点 M 是 CG 的中点 .

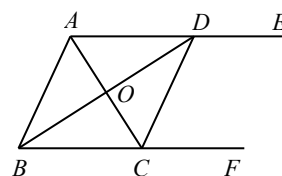
求证：(1) $BM \parallel GH$ ；

(2) $BM \perp CF$.



(第6题)

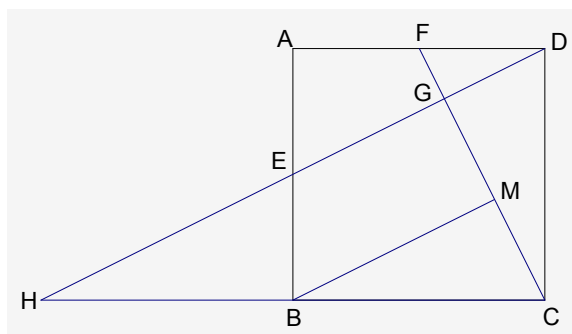
7. 已知：如图， $AE \parallel BF$ ， AC 平分 $\angle BAD$ ，交 BF 于点 C ， BD 平分 $\angle ABC$ ，交 AE 于点 D ，联结 CD . 求证：四边形 $ABCD$ 是菱形 .



第21题图

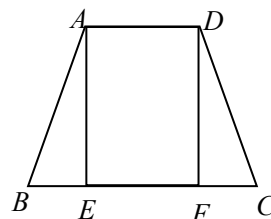
8 . 如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 E 、 F 分别是边 AB 、 AD 的中点， DE 与 CF 相交于 G ， DE 、 CB 的延长线相交于点 H ，点 M 是 CG 的中点 .

求证：(1) $BM \parallel GH$ (2) $BM \perp CF$



9. 已知：如图，在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AB = CD$ ，点 E 、 F 在边 BC 上， $BE = CF$ ， $EF = AD$ 。

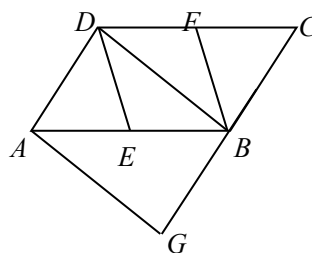
求证：四边形 $AEFD$ 是矩形。



(第9题)

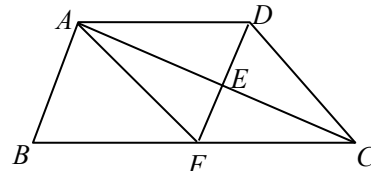
10. 如图，在 $\square ABCD$ 中， E 、 F 分别为边 AB 、 CD 的中点， BD 是对角线，过 A 点作 $AG \parallel DB$ 交 CB 的延长线于点 G 。

- (1) 求证： $DE \parallel BF$ ；
 (2) 若 $\angle G = 90^\circ$ ，求证：四边形 $DEBF$ 是菱形。



11. 已知：如图，在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $BC = 2AD$ ， $AC \perp AB$ ，点 E 是 AC 的中点， DE 的延长线与边 BC 相交于点 F 。

求证：四边形 $AFCD$ 是菱形。



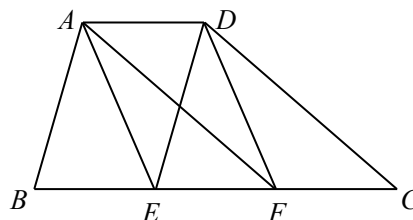
(第11题图)

12. (本题共2小题，每小题6分，满分12分)

已知：如图，在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ，点 E 、 F 在边 BC 上， $DE \parallel AB$ ， $AF \parallel CD$ ，且四边形 $AEFD$ 是平行四边形。

(1) 试判断线段 AD 与 BC 的长度之间有怎样的数量关系？并证明你的结论；

(2) 现有三个论断：① $AD = AB$ ；② $\angle B + \angle C = 90^\circ$ ；③ $\angle B = 2\angle C$ 。请从上述三个论断中选择一个论断作为条件，证明四边形 $AEFD$ 是菱形。



(第12题图)

四边形证明题答案

1. 证明：(1) \because 正方形 $ABCD$, $\therefore AB=AD$, $\angle B=\angle D=90^\circ$ (2分)
 $\therefore \angle BAE = \angle DAF$
 $\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADF$ (1分)
 $\therefore BE = DF$ (2分)
- (2) \because 正方形 $ABCD$, $\therefore \angle BAC = \angle DAC$ (1分)
 $\therefore \angle BAE = \angle DAF \therefore \angle EAO = \angle FAO$ (1分)
 $\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADF \therefore AE = AF$ (1分)
 $\therefore EO = FO$, $AO \perp EF$ (2分)
- 分)
 $\therefore OM = OA \therefore$ 四边形 $AEMF$ 是平行四边形 (1分)
 $\therefore AO \perp EF \therefore$ 四边形 $AEMF$ 是菱形 (1分)
2. (1) 证明：联结 EG ,
 \because 梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, 且 E 、 G 分别是 AB 、 CD 的中点,
 $\therefore EG \parallel BC$, 且 $EG = \frac{1}{2}(AD + BC)$, (2分)
- 又 $\because BF = \frac{1}{2}(AD + BC)$
 $\therefore EG = BF$ (1分)
 \therefore 四边形 $AEFG$ 是平行四边形. (2分)
- (2) 证明：设 AF 与 EG 交于点 O ,
 $\because EG \parallel AD$, $\therefore \angle DAG = \angle AGE$
 $\because AG$ 平分 $\angle FAD$, $\therefore \angle DAG = \angle GAO$
 $\therefore \angle GAO = \angle AGE$
 $\therefore AO = GO$ (2分)
- \because 四边形 $AEFG$ 是平行四边形,
 $\therefore AF = EG$, 四边形 $AEFG$ 是矩形 (2分)
3. 证明：(1) \because 梯形 $ABCD$ 是等腰梯形, $AD \parallel BC$
 $\therefore \angle BAE = \angle ADF$ (1分)
 $\because AD = DC \therefore AE = DF$ (1分)
 $\therefore BA = AD \therefore \triangle BAE \cong \triangle ADF$, (1分)
 $\therefore BE = AF$ (1分)
- (2) 猜想 $\angle BPF = 120^\circ$ (1分)
 \because 由 (1) 知 $\triangle BAE \cong \triangle ADF$, $\therefore \angle ABE = \angle DAF$ (1分)
 $\therefore \angle BPF = \angle ABE + \angle BAP = \angle BAE$ (1分)
 而 $AD \parallel BC$, $\angle C = \angle ABC = 60^\circ$, $\therefore \angle BAE = 120^\circ$.
 $\therefore \angle BPF = \angle BAE = 120^\circ$ (1分)
- 4、证：(1) \because 四边形 $ABCD$ 是矩形,
 $\therefore AD \parallel BC$, $AD = BC$.
 $\therefore \angle DAC = \angle BCA$.

又 $\because DN \perp AC, BM \perp AC,$

$\therefore \angle DNA = \angle BMC.$

$\therefore \triangle DAN \cong \triangle BCM,$ (3分)

$\therefore AN = CM.$ (1分)

(2) 联结 BD 交 AC 于点 $O,$

$\therefore AN = NM = 2,$

$\therefore AC = BD = 6,$

又 \because 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore AO = DO = 3,$

在 $\triangle ODN$ 中, $OD = 3, ON = 1, \angle OND = 90^\circ,$

$\therefore DN = \sqrt{OD^2 - ON^2} = 2\sqrt{2},$ (2分)

\therefore 矩形 $ABCD$ 的面积 $= AC \times DN = 12\sqrt{2}.$ (1分)

5.解: (1) 方法1: 延长 EF 交 AD 于 G (如图1)1分

在平行四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC, AD = BC.$

$\because EF \parallel CA, EG \parallel CA,$

\therefore 四边形 $ACEG$ 是平行四边形.

$\therefore AG = CE$ 1分

又 $\because CE = \frac{1}{2}BC, AD = BC,$

$\therefore AG = CE = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AD = GD$ 1分

$\because AD \parallel BC, \therefore \angle ADC = \angle ECF.$

在 $\triangle CEF$ 和 $\triangle DGF$ 中,

$\because \angle CFE = \angle DFG, \angle ADC = \angle ECF, CE = DG,$

$\therefore \triangle CEF \cong \triangle DGF$ (A.A.S) $\therefore CE = DF$ 1分

\because 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $\therefore OB = OD.$

$\therefore OF \parallel BE.$ 1分

方法2: 将线段 BC 的中点记为 G , 联结 OG (如图2)1分

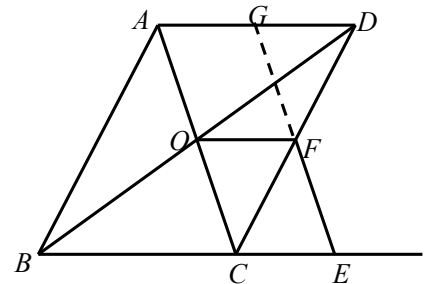
\because 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $\therefore OB = OD.$

$\therefore OG \parallel CD.$ 1分

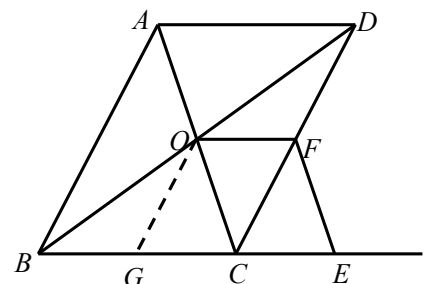
$\therefore \angle OGC = \angle FCE.$

$\because EF \parallel CA, \therefore \angle OCG = \angle FEC.$

$\because GC = \frac{1}{2}BC, CE = \frac{1}{2}BC,$



(第5题图1)



(第5题图2)

$\therefore GC = CE.$

在 $\triangle OGC$ 和 $\triangle FCE$ 中,

$\because \angle OCG = \angle FEC, GC = CE, \angle OGC = \angle FCE,$

$\therefore \triangle OGC \cong \triangle FCE$ (A.S.A)1分

$\therefore OG = FC.$

又 $\because OG \parallel CF,$

\therefore 四边形 $OGCF$ 是平行四边形.1分

$\therefore OF \parallel GC.$ 1分

其他方法, 请参照上述标准酌情评分.

(2) 如果梯形 $OBEF$ 是等腰梯形, 那么四边形 $ABCD$ 是矩形.1分

$\because OF \parallel CE, EF \parallel CO, \therefore$ 四边形 $OCEF$ 是平行四边形.

$\therefore EF = OC$ 1分

又 \because 梯形 $OBEF$ 是等腰梯形, $\therefore BO = EF.$

$\therefore OB = OC.$

(备注: 使用方法 2 的同学也可能由 $\triangle OGC \cong \triangle FCE$ 找到解题方法; 使用方法 1 的同学也可能由四边形 $ACEG$ 是平行四边形找到解题方法) .

\because 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $\therefore AC = 2OC, BD = 2BO.$

$\therefore AC = BD$ 1分

\therefore 平行四边形 $ABCD$ 是矩形.1分

6. 证明: (1) \because 在正方形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC, \therefore \angle A = \angle HBE, \angle ADE = \angle H, \dots$ (1分)

$\because AE = BE, \therefore \triangle ADE \cong \triangle BHE.$ (1分)

$\therefore BH = AD = BC.$ (1分)

$\because CM = GM, \therefore BM \parallel GH.$ (1分)

(2) \because 在正方形 $ABCD$ 中, $AB = AD = CD, \angle A = \angle ADC = 90^\circ,$

又 $\because DF = \frac{1}{2} AD, AE = \frac{1}{2} AB, \therefore AE = DF. \therefore \triangle AED \cong \triangle DFC.$ (1分)

$\therefore \angle ADE = \angle DCF.$ (1分)

$\because \angle ADE + \angle GDC = 90^\circ, \therefore \angle DCF + \angle GDC = 90^\circ. \therefore \angle DGC = 90^\circ. \dots$ (1分)

$\because BM \parallel GH, \therefore \angle BMG = \angle DGC = 90^\circ,$ 即 $BM \perp CF.$ (1分)

7、证明: $\because AC$ 平分 $\angle BAD, \therefore \angle BAC = \angle CAD.$

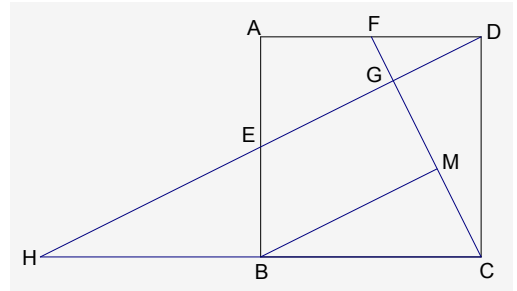
又 $\because AE \parallel BF, \therefore \angle BCA = \angle CAD.$ -----1分

$\therefore \angle BAC = \angle BCA.$

$\therefore AB=BC$. -----1分
 同理可证 $AB=AD$.
 $\therefore AD=BC$. -----1分
 又 $AD\parallel BC$,
 \therefore 四边形 $ABCD$ 是平行四边形. -----1分
 又 $AB=BC$, $\therefore \square ABCD$ 是菱形. -----1分

8. 证明：(1) \therefore 正方形 $ABCD$

$\therefore \angle A = \angle EBH = 90^\circ$ $AD = BC$ 1'
 $\therefore E$ 是 AB 的中点 $\therefore AB = BE$ 1'
 $\therefore \angle AED = \angle BEH$
 $\therefore \triangle AED \cong \triangle BEH$ 1'
 $\therefore AD = BH$ $\therefore BC = BH$ 1'
 $\therefore M$ 是 CG 的中点 $\therefore BM \parallel GH$ 1'



(2) 证 $\triangle AED \cong \triangle CDF$ 1' $\therefore \angle ADE = \angle DCF$
 $\therefore \angle DCF + \angle CDE = 90^\circ$ $\therefore \angle CGH = 90^\circ$ 1'
 $\therefore BM \parallel GH$ $\therefore \angle CMB = \angle CGH = 90^\circ$
 $\therefore BM \perp CF$ 1'

9. 证法一： \therefore 在梯形 $ABCD$ 中， $AD\parallel BC$ ，又 $\therefore EF=AD$

\therefore 四边形 $AEFD$ 是平行四边形 (1分)
 $\therefore AD\parallel DF$ ， $\therefore \angle AEF = \angle DFC$ (1分)
 $\therefore AB=CD$ ， $\therefore \angle B = \angle C$ (1分)
 又 $\therefore BE=CF$ ， $\therefore \triangle ABE \cong \triangle DCF$ (1分)
 $\therefore \angle AEB = \angle DFC$ ，..... (1分)
 $\therefore \angle AEB = \angle AEF$ (1分)
 $\therefore \angle AEB + \angle AEF = 180^\circ$ ， $\therefore \angle AEF = 90^\circ$ (1分)
 \therefore 四边形 $AEFD$ 是矩形 (1分)

证法二： 联结 AF 、 DE (1分)

\therefore 在梯形 $ABCD$ 中， $AD\parallel BC$ ，又 $\therefore EF=AD$ ，
 \therefore 四边形 $AEFD$ 是平行四边形 (1分)
 $\therefore AB=CD$ ， $\therefore \angle B = \angle C$ (1分)
 $\therefore BE=CF$ ， $\therefore BE+EF=CF+EF$ ，即 $BF=CE$ ，..... (1分)
 $\therefore \triangle ABF \cong \triangle DCE$ (1分)
 $\therefore AF=DE$ ，..... (2分)
 \therefore 四边形 $AEFD$ 是矩形 (1分)

10、证明：(1) $\therefore \square ABCD$ ， $\therefore AB\parallel CD$ ， $AB=CD$ -----1分

$\therefore E$ 、 F 分别为 AB 、 CD 的中点， $\therefore DF=DC$ ， $BE=AB$

$\therefore DF\parallel BE$ ， $DF=BE$ -----1分

\therefore 四边形 $DEBF$ 为平行四边形

$\therefore DE \parallel BF$ -----1分

(2)证明： $\because AG \parallel BD$ ， $\therefore \angle G = \angle DBC = 90^\circ$ ， $\therefore \triangle DBC$ 为直角三角形---1分

又 $\because F$ 为边 CD 的中点 $\therefore BF = DC = DF$ -----1分

又 \because 四边形 $DEBF$ 为平行四边形， \therefore 四边形 $DEBF$ 是菱形-----1分

11. 证明： \because 在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $\therefore \angle DAE = \angle FAE$ ， $\angle ADE = \angle CFE$ 。…… (1分)
又 $\because AE = EC$ ， $\therefore \triangle ADE \cong \triangle CFE$ 。…… (1分)
 $\therefore AD = FC$ ，…… (1分)
 \therefore 四边形 $AFCD$ 是平行四边形。…… (1分)
 $\because BC = 2AD$ ， $\therefore FC = AD = \frac{1}{2}BC$ 。…… (1分)
 $\because AC \perp AB$ ， $\therefore AF = \frac{1}{2}BC$ 。…… (1分)
 $\therefore AF = FC$ ，…… (1分)
 \therefore 四边形 $AFCD$ 是菱形。…… (1分)
12. (1) 解：线段 AD 与 BC 的长度之间的数量为： $BC = 3AD$ 。…… (1分)
证明： $\because AD \parallel BC$ ， $DE \parallel AB$ ， \therefore 四边形 $ABED$ 是平行四边形。
 $\therefore AD = BE$ 。…… (2分)
同理可证，四边形 $AFCD$ 是平行四边形。即得 $AD = FC$ 。…… (1分)
又 \because 四边形 $AEFD$ 是平行四边形， $\therefore AD = EF$ 。…… (1分)
 $\therefore AD = BE = EF = FC$ 。
 $\therefore BC = 3AD$ 。…… (1分)
- (2) 解：选择论断②作为条件。…… (1分)
证明： $\because DE \parallel AB$ ， $\therefore \angle B = \angle DEC$ 。…… (1分)
 $\because \angle B + \angle C = 90^\circ$ ， $\therefore \angle DEC + \angle C = 90^\circ$ 。
即得 $\angle EDC = 90^\circ$ 。…… (2分)
又 $\because EF = FC$ ， $\therefore DF = EF$ 。…… (1分)
 \therefore 四边形 $AEFD$ 是平行四边形，
 \therefore 四边形 $AEFD$ 是菱形。…… (1分)