暑假专题——一元二次方程根与系数的关系；四边形

重点、难点

重点：一元二次方程根与系数的关系；四边形的内角和、外角和定理；多边形的内角和、外角和定理。

难点：一元二次方程根与系数的关系；四边形内角和、外角和定理的应用；多边形内、外角和定理的应用。

知识要点：

代数：

1. 韦达定理

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$，如果有实数根（即 $\Delta=b^2-4ac\geq 0$），设两实数根为 x_1，x_2，则 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$

引申 1：$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$

$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}$

$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$

$\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}$

引申 2：由 $x_1x_2=\frac{c}{a}$ 可判断两根符号之间的关系：

若 $x_1x_2=\frac{c}{a}>0$，则 x_1，x_2 同号

若 $x_1x_2=\frac{c}{a}<0$，则 x_1，x_2 异号，即一正一负

再由 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ 可判断两根大小的关系。

2. 由 x_1，x_2 两根可构造的一元二次方程

以 x_1，x_2 为根的一个一元二次方程为 $x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$。

几何：

四边形 $\begin{cases}\text{内角和定理：四边形的四个内角之和为 } 360^\circ \\ \text{外角和定理：四边形的外角和为 } 360^\circ \\ \text{引申：四边形的4个内角中可能有几个锐角}\end{cases}$

多边形 $\begin{cases}\text{内角和定理：多边形的内角和等于 } (n-2)\cdot 18 \\ \text{外角和：任意多边形的外角和等于 } 360^\circ \\ n\text{边形的对角线条数：} \frac{n(n-3)}{2}\end{cases}$

【典型例题】

例 1. （1）若 x_1，x_2 是方程 $3x^2-5x=7$ 的两个根，求 x_1+x_2，x_1x_2；

（2）若方程 $2x^2+3x=1$ 的两个根是 x_1，x_2，求 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$。

解：（1）由韦达定理，得 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{-5}{3}=\frac{5}{3}$

$x_1x_2=\frac{c}{a}=\frac{-7}{3}=-\frac{7}{3}$

（2）把原方程化为一般式 $2x^2+3x-1=0$

由韦达定理，得 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{3}{2}$

$x_1x_2=\frac{c}{a}=\frac{-1}{2}=-\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{-\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}}=3$$

即 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=3$

例 2.（江西 2004 中考题）

已知关于 x 的方程 $x^2-2(m+1)x+m^2=0$

（1）当 m 取什么值时，原方程没有实数根？

（2）对 m 选取一个合适的非零整数，使原方程有两个实数根，并求这两个实数根的平方和。

解：（1）$\Delta=b^2-4ac=[-2(m+1)]^2-4\times1\times m^2=4(m+1)^2-4m^2=4(2m+1)$

当 $\Delta<0$ 时，原方程无实数根

$\therefore 4(2m+1)<0$

$\therefore m<-\frac{1}{2}$ 时，原方程无实数根

（2）当 $\Delta\geq0$ 时，即 $4(2m+1)\geq0$，$m\geq-\frac{1}{2}$ 时，原方程有两个实数根

设方程的两根为 x_1，x_2，则两根的平方和为：

$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=[2(m+1)]^2-2m^2=2m^2+8m+4$

在 $m\geq-\frac{1}{2}$ 范围内取 m＝1，则

$x_1^2+x_2^2=2m^2+8m+1=2\times1^2+8\times1+1=11$

例 3.（2004 海淀中考）

已知，关于 x 的一元二次方程 $ax^2+2ax+c=0$ 的两个实数根之差的平方为 m，若对于任意一个非零的实数 a，$m\geq4$ 总成立，求实数 c 及 m 的值。

解：设原方程的根为 x_1，x_2，由题意，知 $(x_1-x_2)^2=m$

又 $(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$

由韦达定理 $x_1+x_2=-\frac{2a}{a}=-2$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$

$\therefore m=(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=(-2)^2-4\times\frac{c}{a}=4-4\times\frac{c}{a}$

要使对于任意一个非零的实数 a，$m\geq4$ 总成立，需 $m=4-4\times\frac{c}{a}$ 中的 c＝0

这时 $m=4-4\times\frac{0}{a}=4$

即 c = 0 时，m = 4

例 4. （1）如果四边形的四个内角的度数之比为 1：2：4：5，求这个四边形各内角的度数。

（2）一个多边形的内角和与某一个外角的度数总和为 1350°，求这个多边形的边数。

解：（1）根据题意，设这个四边形的四内角分别为 x，2x，4x，5x，根据四边形内角和定理，则 $x+2x+4x+5x=360^\circ$

$\therefore 12x=360^\circ$，$\therefore x=30^\circ$

$\therefore 2x=60^\circ$，$4x=120^\circ$，$5x=150^\circ$

∴ 该四边形的四个内角分别为 30°，60°，120°，150°。

（2）设这个多边形的边数为 n，则其内角和为 $(n-2)\times 180^\circ$，设这个外角为 x，则 $0^\circ<x<180^\circ$，由题意，知

$(n-2)\times 180^\circ+x=1350^\circ$

又 $1350^\circ=7\times 180^\circ+90^\circ$

$\therefore x=90^\circ$，$n-2=7$，$\therefore n=9$

∴ 这个多边形的边数为 9。

【模拟试题】（答题时间：25 分钟）

1. 如果方程 $x^2+6x+k=0$ 的一根为 1，求 k 及另一根。

2. 设方程 $x^2-7x+2=0$ 的两根分别为 x_1，x_2，求① $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$；② $x_1^2-x_2^2$（$x_1>x_2$）

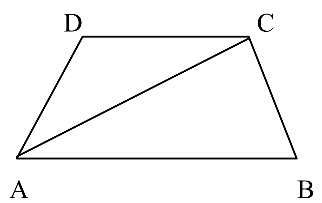
3. 求以 3，－1 为根的方程。

4. 如果两数之和为 7，两数之积为 12，求这两数。

5. （1）内角和等于外角和的多边形是几边形？

（2）若一个多边形的每一个内角都相等，且内角和为 2340°，求每一个外角。

6. 四边形 ABCD 中，对角线 AC 平分 $\angle BAD$，且 AB = 21，AD = 9，BC = DC = 10，求 AC 的长。如图：



【试题答案】

1. k = －7，另一根也为－7

2. ① $\frac{7}{2}$；② $7\sqrt{41}$

3. $x^2-2x-3=0$

4. 两数为 3，4

5. （1）4；（2）24°

6. 提示：过 C 向 AB、AD 的延长线作垂线，AC = 17