绝密★使用完毕前

2011年普通高等学校招生全国统一考试

数　学（文）（北京卷）

本试卷共5页，150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题　共40分）

一、选择题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知全集$U=\mathbf{R}$，集合$P=\left\{x\mid x^2\leqslant 1\right\}$，那么$\complement_U P=$

（A）$(-\infty,\ -1)$　（B）$(1,\ +\infty)$　（C）$(-1,\ 1)$　（D）$(-\infty,\ -1)\cup(1,\ +\infty)$

（2）复数$\dfrac{\mathrm{i}-2}{1+2\mathrm{i}}=$

（A）i　（B）$-\mathrm{i}$　（C）$-\dfrac{4}{5}-\dfrac{3}{5}\mathrm{i}$　（D）$-\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}\mathrm{i}$

（3）如果$\log_{\frac{1}{2}}x<\log_{\frac{1}{2}}y<0$，那么

（A）$y<x<1$　（B）$x<y<1$

（C）$1<x<y$　（D）$1<y<x$

（4）若p是真命题，q是假命题，则

（A）$p\wedge q$是真命题　（B）$p\vee q$是假命题

（C）$\neg p$是真命题　（D）$\neg q$是真命题

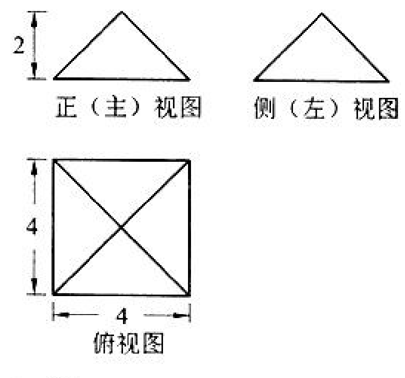
（5）某四棱锥的三视图如图所示，该四棱锥的表面积是

（A）32

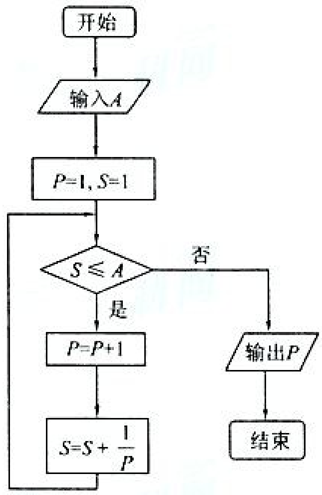
（B）$16+16\sqrt{2}$

（C）48

（D）$16+32\sqrt{2}$



（6）执行如图所示的程序框图，若输入 A 的值为 2，则输出的 P 值为



（A）2

（B）3

（C）4

（D）5

（7）某车间分批生产某种产品，每批的生产准备费用为 800 元. 若每批生产 x 件，则平均仓储时间为 $\frac{x}{8}$ 天，且每件产品每天的仓储费用为 1 元. 为使平均到每件产品的生产准备费用与仓储费用之和最小，每批应生产产品

（A）60 件　　（B）80 件　　（C）100 件　　（D）120 件

（8）已知点 $A(0,\ 2)$，$B(2,\ 0)$. 若点 C 在函数 $y=x^2$ 的图象上，则使得 $\triangle ABC$ 的面积为 2 的点 C 的个数为

（A）4　　（B）3　　（C）2　　（D）1

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

（9）在$\triangle ABC$中，若$b=5$，$\angle B=\dfrac{\pi}{4}$，$\sin A=\dfrac{1}{3}$，则$a=$__________.

（10）已知双曲线$x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(b>0)$的一条渐近线的方程为$y=2x$，则$b=$__________.

（11）已知向量$\boldsymbol{a}=(\sqrt{3},1)$，$\boldsymbol{b}=(0,-1)$，$\boldsymbol{c}=(k,\sqrt{3})$．若$\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{c}$共线，则$k=$__________.

（12）在等比数列$\{a_n\}$中，若$a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_4=4$，则公比$q=$__________；

$a_1+a_2+\cdots+a_n=$__________.

（13）已知函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x}, & x\geqslant 2,\\ (x-1)^3, & x<2.\end{cases}$若关于$x$的方程$f(x)=k$有两个不同的实根，则实数$k$的取值范围是__________.

（14）设$A(0,0)$，$B(4,0)$，$C(t+4,3)$，$D(t,3)$ $(t\in\mathbf{R})$．记$N(t)$为平行四边形$ABCD$内部（不含边界）的整点的个数，其中整点是指横、纵坐标都是整数的点，则$N(0)=$__________；$N(t)$的所有可能取值为__________.

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（15）（本小题共 13 分）

已知函数 $f(x)=4\cos x\sin(x+\frac{\pi}{6})-1$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的最小正周期；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}]$ 上的最大值和最小值.

（16）（本小题共 13 分）

以下茎叶图记录了甲、乙两组各四名同学的植树棵数. 乙组记录中有一个数据模糊，无法确认，在图中以 X 表示.

甲组			乙组		
9	9	0	X	8	9
1	1	1	0		

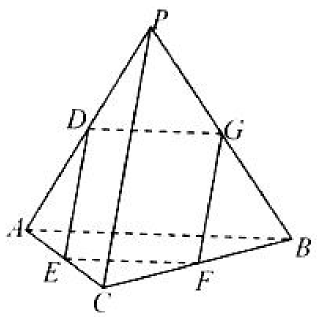
（Ⅰ）如果 $X=8$，求乙组同学植树棵数的平均数和方差；

（Ⅱ）如果 $X=9$，分别从甲、乙两组中随机选取一名同学，求这两名同学的植树总棵数为 19 的概率.

（**注**：方差 $s^2=\frac{1}{n}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2]$，其中 $\overline{x}$ 为 x_1, x_2, …, x_n 的平均数）

（17）（本小题共 14 分）

如图，在四面体 $PABC$ 中，$PC\perp AB$，$PA\perp BC$，点 D, E, F, G 分别是棱 AP, AC, BC, PB 的中点.



（Ⅰ）求证：$DE\ /\!/$ 平面 BCP；

（Ⅱ）求证：四边形 $DEFG$ 为矩形；

（Ⅲ）是否存在点 Q，到四面体 $PABC$ 六条棱的中点的距离相等？说明理由.

（18）（本小题共 13 分）

已知函数 $f(x)=(x-k)\mathrm{e}^x$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的单调区间;

（Ⅱ）求 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最小值.

（19）（本小题共 14 分）

已知椭圆 $G:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，右焦点为 $(2\sqrt{2}, 0)$. 斜率为 1 的直线 l 与椭圆 G 交于 A, B 两点，以 AB 为底边作等腰三角形，顶点为 $P(-3, 2)$.

（Ⅰ）求椭圆 G 的方程;

（Ⅱ）求 $\triangle PAB$ 的面积.

（20）（本小题共 13 分）

若数列 $A_n: a_1, a_2, \cdots, a_n\ (n\geqslant 2)$ 满足 $|a_{k+1}-a_k|=1\ (k=1, 2, \cdots, n-1)$，则称 A_n 为 E 数列. 记 $S(A_n)=a_1+a_2+\cdots+a_n$.

（Ⅰ）写出一个 E 数列 A_5 满足 $a_1=a_3=0$；

（Ⅱ）若 $a_1=12$，$n=2000$，证明：E 数列 A_n 是递增数列的充要条件是 $a_n=2011$；

（Ⅲ）在 $a_1=4$ 的 E 数列 A_n 中，求使得 $S(A_n)=0$ 成立的 n 的最小值.

（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）

绝密★考试结束前

2011年普通高等学校招生全国统一考试

数学（文）（北京卷）参考答案

一、选择题（共8小题，每小题5分，共40分）

（1）D　（2）A　（3）D　（4）D

（5）B　（6）C　（7）B　（8）A

二、填空题（共6小题，每小题5分，共30分）

（9）$\frac{5\sqrt{2}}{3}$　（10）2

（11）1　（12）2　$2^{n-1}-\frac{1}{2}$

（13）(0, 1)　（14）6　6, 7, 8

三、解答题（共6小题，共80分）

（15）（共13分）

解：（Ⅰ）因为 $f(x)=4\cos x\sin(x+\frac{\pi}{6})-1$

$$=4\cos x(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x)-1$$

$$=\sqrt{3}\sin 2x+2\cos^2 x-1$$

$$=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x$$

$$=2\sin(2x+\frac{\pi}{6}),$$

所以$f(x)$的最小正周期为π.

（Ⅱ）因为$-\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{4}$，所以$-\frac{\pi}{6}\le 2x+\frac{\pi}{6}\le\frac{2\pi}{3}$.

于是，当$2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即$x=\frac{\pi}{6}$时，$f(x)$取得最大值2；

当$2x+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}$，即$x=-\frac{\pi}{6}$时，$f(x)$取得最小值$-1$.

(16)(共13分)

解:(Ⅰ)当 $X=8$ 时,由茎叶图可知,乙组同学的植树棵数是:8, 8, 9, 10,

所以平均数为

$$\bar{x}=\frac{8+8+9+10}{4}=\frac{35}{4};$$

方差为

$$s^2=\frac{1}{4}[(8-\frac{35}{4})^2+(8-\frac{35}{4})^2+(9-\frac{35}{4})^2+(10-\frac{35}{4})^2]=\frac{11}{16}.$$

(Ⅱ)记甲组四名同学为 A_1、A_2、A_3、A_4,他们植树的棵数依次为9, 9, 11, 11;乙组四名同学为 B_1、B_2、B_3、B_4,他们植树的棵数依次为9, 8, 9, 10. 分别从甲、乙两组中随机选取一名同学,所有可能的结果有16个,它们是:

(A_1, B_1), (A_1, B_2), (A_1, B_3), (A_1, B_4),
(A_2, B_1), (A_2, B_2), (A_2, B_3), (A_2, B_4),
(A_3, B_1), (A_3, B_2), (A_3, B_3), (A_3, B_4),
(A_4, B_1), (A_4, B_2), (A_4, B_3), (A_4, B_4).

用 C 表示:"选出的两名同学的植树总棵数为19"这一事件,则 C 中的结果有4个,它们是:(A_1, B_4),(A_2, B_4),(A_3, B_2),(A_4, B_2),故所求概率为

$$P(C)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}.$$

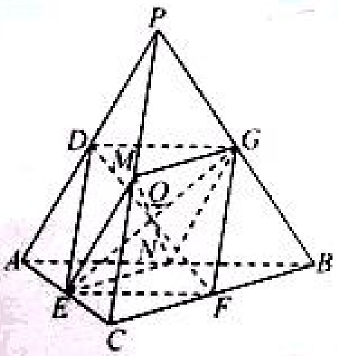
(17)(共14分)

证明:(Ⅰ)因为 D, E 分别为 AP, AC 的中点,

所以 $DE /\!/ PC$.

又因为 $DE \not\subset$ 平面 BCP,

所以 $DE /\!/$ 平面 BCP.



(Ⅱ)因为 D、E、F、G 分别为 AP、AC、BC、PB 的中点,

所以 $DE /\!/ PC /\!/ FG$,$DG /\!/ AB /\!/ EF$.

所以四边形 $DEFG$ 为平行四边形.

又因为 $PC \perp AB$,

所以 $DE \perp DG$.

所以四边形 $DEFG$ 为矩形.

（Ⅲ）存在点 Q 满足条件，理由如下：

连接 DF，EG，设 Q 为 EG 的中点.

由（Ⅱ）知，$DF \cap EG = Q$，且 $QD = QE = QF = QG = \frac{1}{2}EG$.

分别取 PC、AB 的中点 M、N，连接 ME、EN、NG、MG、MN.

与（Ⅱ）同理，可证四边形 $MENG$ 为矩形，其对角线交点为 EG 的中点 Q，

且 $QM = QN = \frac{1}{2}EG$.

所以 Q 为满足条件的点.

（18）（共13分）

解：（Ⅰ）$f'(x) = (x - k + 1)e^x$.

令 $f'(x) = 0$，得 $x = k - 1$.

$f(x)$ 与 $f'(x)$ 的情况如下：

x	$(-\infty, k-1)$	$k-1$	$(k-1, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-e^{k-1}$	↗

所以，$f(x)$ 的单调递减区间是 $(-\infty, k-1)$；单调递增区间是 $(k-1, +\infty)$.

（Ⅱ）当 $k - 1 \leq 0$，即 $k \leq 1$ 时，函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增，

所以 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最小值为 $f(0) = -k$；

当 $0 < k - 1 < 1$，即 $1 < k < 2$ 时，

由（Ⅰ）知 $f(x)$ 在 $[0, k-1)$ 上单调递减，在 $(k-1, 1]$ 上单调递增，所以 $f(x)$ 在

区间 $[0, 1]$ 上的最小值为 $f(k-1) = -e^{k-1}$；

当 $k - 1 \geq 1$，即 $k \geq 2$ 时，函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递减，

所以 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最小值为 $f(1) = (1 - k)e$.

（19）（共14分）

解：（Ⅰ）由已知得，$c=2\sqrt{2}$，$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$．

解得 $a=2\sqrt{3}$

又 $b^2=a^2-c^2=4$．

所以椭圆 G 的方程为 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$

（Ⅱ）设直线 l 的方程为 $y=x+m$．

由 $\begin{cases} y=x+m, \\ \frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1 \end{cases}$ 得

$4x^2+6mx+3m^2-12=0$．　①

设 A，B 的坐标分别为 (x_1,y_1)，$(x_2,y_2)(x_1<x_2)$，AB 中点为 $E(x_0,y_0)$，则

$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{3m}{4}$，

$y_0=x_0+m=\frac{m}{4}$．

因为 AB 是等腰 $\triangle PAB$ 的底边，

所以 $PE\perp AB$．

所以 PE 的斜率 $k=\dfrac{2-\frac{m}{4}}{-3+\frac{3m}{4}}=-1$，

解得 $m=2$．

此时方程①为 $4x^2+12x=0$．

解得 $x_1=-3$，$x_2=0$．

所以 $y_1=-1$，$y_2=2$．

所以 $|AB|=3\sqrt{2}$．

此时，点 $P(-3,2)$ 到直线 AB：$x-y+2=0$ 的距离 $d=\frac{|-3-2+2|}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，

所以 $\triangle PAB$ 的面积 $S=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\frac{9}{2}$．

（20）（共 13 分）

解：（Ⅰ）0，1，0，1，0 是一个满足条件的 E 数列 A_5.

（答案不唯一，0，−1，0，1，0；0，±1，0，1，2；0，±1，0，−1，−2；0，±1，0，−1，0 都是满足条件的 E 数列 A_5）

（Ⅱ）必要性：因为 E 数列 A_n 是递增数列，

所以 $a_{k+1}-a_k=1\ (k=1,2,\cdots,1999)$.

所以 A_n 是首项为 12，公差为 1 的等差数列.

所以 $a_{2000}=12+(2000-1)\times 1=2011$.

充分性：由于 $a_{2000}-a_{1999}\leqslant 1$,

$a_{1999}-a_{1998}\leqslant 1$,

……

$a_2-a_1\leqslant 1$,

所以 $a_{2000}-a_1\leqslant 1999$，即 $a_{2000}\leqslant a_1+1999$.

又因为 $a_1=12$，$a_{2000}=2011$，

所以 $a_{2000}=a_1+1999$.

故 $a_{k+1}-a_k=1>0\ (k=1,2,\cdots,1999)$，即 A_n 是递增数列.

综上，结论得证.

（Ⅲ）对首项为 4 的 E 数列 A_n，由于

$a_2\geqslant a_1-1=3$，

$a_3\geqslant a_2-1\geqslant 2$，

……

$a_8\geqslant a_7-1\geqslant -3$，

……

所以 $a_1+a_2+\cdots+a_k>0\ (k=2,3,\cdots,8)$

所以对任意的首项为 4 的 E 数列 A_n，若 $S(A_n)=0$，则必有 $n\geqslant 9$.

又 $a_1=4$ 的 E 数列 A_9：4，3，2，1，0，−1，−2，−3，−4 满足 $S(A_9)=0$，

所以 n 的最小值是 9.