绝密★启用前

2010年普通高等学校招生全国统一考试（上海卷）

数学试卷（理工农医类）

（满分150分，考试时间120分钟）

考生注意

1.本场考试时间120分钟，试卷共4页，满分150分，答题纸共2页.

2.作答前，在答题纸正面填写姓名、准考证号，反面填写姓名，将核对后的条形码贴在答题纸指定位置.

3.所有作答务必填涂或书写在答题纸上与试卷题号对应的区域，不得错位.在试卷上作答一律不得分.

4.用2B铅笔作答选择题，用黑色字迹钢笔、水笔或圆珠笔作答非选择题.

一、填空题（本大题满分56分）本大题共有14题，考生必须在答题纸相应编号的空格内直接填写结果，每个空格填对得4分，否则一律得零分。

1.不等式$\dfrac{2-x}{x+4}>0$的解集是________。

2.若复数$z=1-2i$（i为虚数单位），则$z\cdot\bar{z}+z=$__________。

解析：考查复数基本运算$z\cdot\bar{z}+z=(1-2i)(1+2i)+1-2i=6-2i$

3. 动点P到点$F(2,0)$的距离与它到直线$x+2=0$的距离相等，则P的轨迹方程为_____。

4.行列式$\begin{vmatrix}\cos\frac{\pi}{3} & \sin\frac{\pi}{6}\\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{6}\end{vmatrix}$**的值是_______。**

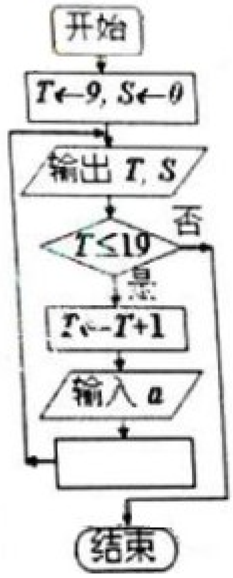
5. 圆$C:x^2+y^2-2x-4y+4=0$**的圆心到直线l:**$3x+4y+4=0$**的距离**$d=$_____。

6. 随机变量ξ的概率分布率由下图给出：

x	7	8	9	10
P($\xi=x$)	0.3	0.35	0.2	0.15

则随机变量ξ的均值是_______

7. 2010 年上海世博会园区每天 9:00 开园，20:00 停止入园。在右边的框图中，S 表示上海世博会官方网站在每个整点报道的入园总人数，a 表示整点报道前 1 个小时内入园人数，



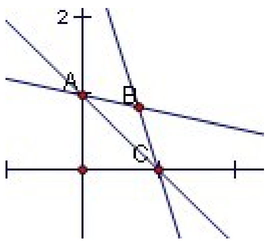
则空白的执行框内应填入_________。

8.对任意不等于 1 的正数 a，函数 f(x)= $\log_a(x+3)$ 的反函数的图像都经过点 P，则点 P 的坐标是_________

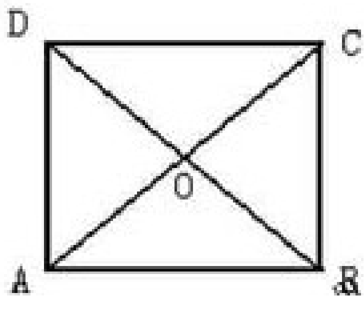
9．从一副混合后的扑克牌（52 张）中随机抽取 1 张，事件 A 为“抽得红桃 K”，事件 B 为“抽得为黑桃”，则概率 P（A∪B）=______（结果用最简分数表示）

10．在 n 行 n 列矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & 1 & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-3 & n-2 & n-1 \end{pmatrix}$ 中，记位于第 i 行第 j 列的数为 $a_{ij}(i,j=1,2\cdots,n)$。当 $n=9$ 时，$a_{11}+a_{22}+a_{33}+\cdots+a_{99}=$ 。

11. 将直线 $l_2: nx+y-n=0$、$l_3: x+ny-n=0$（$n\in N^*$，$n\ge 2$）x 轴、y 轴围成的封闭图形的面积记为 S_n，则 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=$_______。



12．如图所示，在边长为 4 的正方形纸片 ABCD 中，AC 与 BD 相交于 O,剪去 $\triangle AOB$,将剩余部分沿 OC、OD 折叠，使 OA、OB 重合，则以 A、（B）、C、D、O 为顶点的四面体的体积为________



13。如图所示，直线 x=2 与双曲线 $\Gamma:\frac{\lambda^2}{4}-y^2=1$ 的渐近线交于 E_1，E_2 两点，记 $OE_1=e_1,OE_2=e_2$，任取双曲线 Γ 上的点 P，若 $OP=ae_1,+be_2(a、b\in R)$，则 a、b 满足的一个等式是__________

14.以集合 U=$\{a,b,c,d\}$ 的子集中选出 2 个不同的子集，需同时满足以下两个条件：

（1）a、b 都要选出；
（2）对选出的任意两个子集 A 和 B，必有 $A\subseteq B$或$B\subseteq A$，那么共有___ 种不同的选法。

二．选择题（本大题满分 20 分）本大题共有 4 题，每题有且只有一个正确答案。考生必须在答题纸的相应编号上，将代表答案的小方格涂黑，选对得 5 分，否则一律得零分。

15．“$x=2k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in Z)$”是“$\tan x=1$”成立的　　【答】(　)

（A）充分不必要条件.　　（B）必要不充分条件.
（C）充分条件.　　（D）既不充分也不必要条件.

16.直线 l 的参数方程是 $\begin{cases}x=1+2t\\ y=2-t\end{cases}(t\in R)$，则 l 的方向向量是 $\overline{d}$ 可以是 【答】( )

(A)(1,2)　(B)(2,1)　(C)(-2,1)　(D)(1,-2)

17.若 x_0 是方程 $(\frac{1}{2})^x=x^{\frac{1}{3}}$ 的解，则 x_0 属于区间　【答】( )

(A)$(\frac{2}{3},1)$　(B)$(\frac{1}{2},\frac{2}{3})$　(C)$(\frac{1}{3},\frac{1}{2})$　(D)$(0,\frac{1}{3})$

18. 某人要制作一个三角形，要求它的三条高的长度分别为 $\frac{1}{13},\frac{1}{11},\frac{1}{5}$，则此人能　【答】(　)

（A）不能作出这样的三角形　　（B）作出一个锐角三角形
（C）作出一个直角三角形　　（D）作出一个钝角三角形

三、解答题（本大题满分 74 分）本大题共有 5 题，解答下列各题必须在答题纸相应编号的规定区域内写出必要的步骤。

19.（本题满分 12 分）

已知 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ **，化简：**

$\lg(\cos x \cdot \tan x + 1 - 2\sin^2\dfrac{x}{2}) + \lg[\sqrt{2}\cos(x - \dfrac{\pi}{4})] - \lg(1 + \sin 2x)$ **.**

20. (本题满分 13 分)本题共有 2 个小题，第一个小题满分 5 分，第 2 个小题满分 8 分。

已知数列 $\{a_n\}$ **的前** n **项和为** S_n **，且** $S_n = n - 5a_n - 85$ **，** $n \in N^*$

（1）证明：$\{a_n - 1\}$ 是等比数列；

（2）求数列 $\{S_n\}$ 的通项公式，并求出 n 为何值时，S_n 取得最小值，并说明理由。

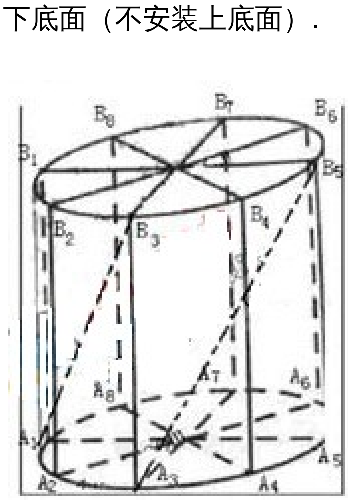
（2）$S_n = n + 75(\dfrac{5}{6})^{n-1} - 90$　n=15 取得最小值

21、（本大题满分 13 分）本题共有 2 个小题，第 1 小题满分 5 分，第 2 小题满分 8 分.

如图所示，为了制作一个圆柱形灯笼，先要制作 4 个全等的矩形骨架，总计耗用 9.6 米铁丝，骨架把圆柱底面 8 等份，再用 S 平方米塑料片制成圆柱的侧面和下底面（不安装上底面）.

(1)当圆柱底面半径 r 取何值时，S 取得最大值？并求出该最大值（结果精确到 0.01 平方米）；

（2）在灯笼内，以矩形骨架的顶点为点，安装一些霓虹灯，当灯笼的底面半径为 0.3 米时，求图中两根直线 A_1B_3 与 A_3B_5 所在异面直线所成角的大小（结果用反三角函数表示）



22.（本题满分 18 分）本题共有 3 个小题，第 1 小题满分 3 分，第 2 小题满分 5 分，第 3 小题满分 10 分。

若实数x、y、m满足$|x-m|>|y-m|$，则称x比y远离m.

（1）若x^2-1比 1 远离 0，求x的取值范围；

（2）对任意两个不相等的正数a、b，证明：a^3+b^3比a^2b+ab^2远离$2ab\sqrt{ab}$；

（3）已知函数$f(x)$的定义域 D=$\{x|x\neq\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$，$k\in Z$，$x\in R\}$.任取$x\in D$，$f(x)$等于$\sin x$和$\cos x$中远离 0 的那个值.写出函数$f(x)$的解析式，并指出它的基本性质（结论不要求证明）.

23（本题满分 18 分）本题共有 3 个小题，第 1 小题满分 3 分，第 2 小题满分 6 分，第 3 小题满分 9 分.

已知椭圆Γ的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，点 P 的坐标为（-a，b）.

（1）若直角坐标平面上的点M、A(0,-b)，B(a，0)满足$\overrightarrow{PM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})$,求点$M$的坐标；

（2）设直线$l_1: y=k_1x+p$交椭圆Γ于C、D两点，交直线$l_2: y=k_2x$于点E.若$k_1 \cdot k_2=-\frac{b^2}{a^2}$，证明：$E$为$CD$的中点；

（3）对于椭圆Γ上的点Q（a cosθ，b sinθ）（ 0 < θ < π），如果椭圆 Γ上存在不同的两个交点P_1、P_2满足$\overrightarrow{PP_1}+\overrightarrow{PP_2}=\overrightarrow{PQ}$,写出求作点$P_1$、$P_2$的步骤，并求出使$P_1$、$P_2$存在的θ的取值范围.

2010年普通高等学校招生全国统一考试（上海卷）

数学（理科）

一、填空题（本大题满分56分）本大题共有14题，考生必须在答题纸相应编号的空格内直接填写结果，每个空格填对得4分，否则一律得零分。

1.不等式$\frac{2-x}{x+4}>0$的解集是<u>（-4,2）</u>。

解析：考查分式不等式的解法$\frac{2-x}{x+4}>0$等价于（x-2）(x+4)<0,所以-4<x<2

2.若复数$z=1-2i$（i为虚数单位），则$z\cdot\bar{z}+z=$<u>6-2i</u>。

解析：考查复数基本运算$z\cdot\bar{z}+z=(1-2i)(1+2i)+1-2i=6-2i$

3. 动点P到点$F(2,0)$的距离与它到直线$x+2=0$的距离相等，则P的轨迹方程为

$y^2=8x$。

解析：考查抛物线定义及标准方程

定义知P的轨迹是以$F(2,0)$为焦点的抛物线，p=2 所以其方程为$y^2=8x$

4.行列式$\begin{vmatrix}\cos\frac{\pi}{3} & \sin\frac{\pi}{6}\\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{6}\end{vmatrix}$的值是<u>0</u>。

解析：考查行列式运算法则$\begin{vmatrix}\cos\frac{\pi}{3} & \sin\frac{\pi}{6}\\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{6}\end{vmatrix}=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{6}=\cos\frac{\pi}{2}=0$

5. 圆$C:x^2+y^2-2x-4y+4=0$的圆心到直线l:$3x+4y+4=0$的距离$d=$<u>3</u>。

解析：考查点到直线距离公式

圆心（1,2）到直线$3x+4y+4=0$距离为$\frac{|3\times1+4\times2+4|}{5}=3$

6. 随机变量ξ的概率分布率由下图给出：

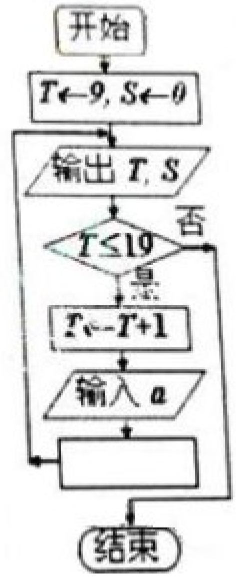
x	7	8	9	10
P($\xi=x$)	0.3	0.35	0.2	0.15

则随机变量 ξ 的均值是 8.2

解析：考查期望定义式 E_{ξ}=7×0.3+8×0.35+9×0.2+10×0.15=8.2

7. 2010 年上海世博会园区每天 9:00 开园，20:00 停止入园。在右边的框图中，S 表示上海世博会官方网站在每个整点报道的入园总人数，a 表示整点报道前 1 个小时内入园人数，

←



则空白的执行框内应填入 S　S+a 。

8.对任意不等于 1 的正数 a，函数 f(x)= $\log_a(x+3)$ 的反函数的图像都经过点 P，则点 P 的坐标是 （0，-2）

解析：f(x)= $\log_a(x+3)$ 的图像过定点（-2,0），所以其反函数的图像过定点（ 0，-2）

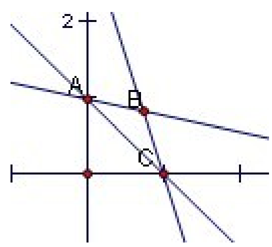
9．从一副混合后的扑克牌（52 张）中随机抽取 1 张，事件 A 为“抽得红桃 K”，事件 B 为“抽得为黑桃”，则概率 P（A∪B）== $\frac{7}{26}$ （结果用最简分数表示）

解析：考查互斥事件概率公式 P（A∪B）= $\frac{1}{52}+\frac{13}{52}=\frac{7}{26}$

10．在 n 行 n 列矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & 1 & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-3 & n-2 & n-1 \end{pmatrix}$ 中，

记位于第 i 行第 j 列的数为 $a_{ij}(i,j=1,2\cdots,n)$。当 $n=9$ 时，$a_{11}+a_{22}+a_{33}+\cdots+a_{99}=$ 45 。

解析：$a_{11}+a_{22}+a_{33}+\cdots+a_{99}=1+3+5+7+9+2+4+6+8$=45



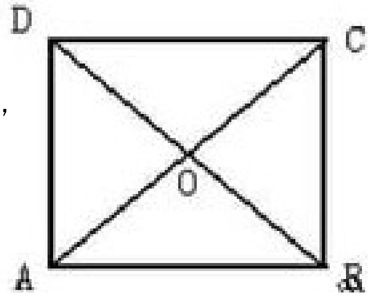
11. 将直线 $l_2: nx+y-n=0$、$l_3: x+ny-n=0$（$n\in N^*$，$n\geq 2$）x 轴、y 轴围成的封闭图形的面积记为 S_n，则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=$ 1

。

解析：$B(\frac{n}{n+1},\frac{n}{n+1})$ 所以 BO⊥AC，

$S_n=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{n}{n+1}\sqrt{2}=\frac{n}{n+1}$　所以 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}$

12．如图所示，在边长为 4 的正方形纸片 ABCD 中，AC 与 BD 相交于 O,剪去 $\triangle AOB$,将剩余部分沿 OC、OD 折叠，使 OA、OB 重合，则以 A、（ B）、 C、D、O 为顶点的四面体的体积为 $\frac{8\sqrt{2}}{3}$



解析：翻折后的几何体为底面边长为 4，侧棱长为 $2\sqrt{2}$ 的正三棱锥，

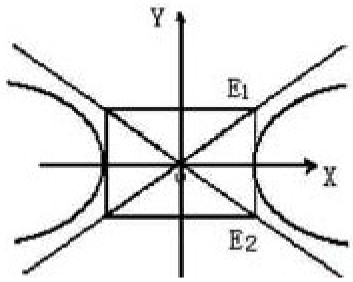
高为 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ 所以该四面体的体积为 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times16\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2\sqrt{6}}{3}=\frac{8\sqrt{2}}{3}$

13。如图所示，直线 x=2 与双曲线 $\Gamma:\frac{\lambda^2}{4}-y^2=1$ 的渐近线交于 E_1，E_2 两点，记 $OE_1=e_1,OE_2=e_2$ ，任取双曲线 Γ 上的点 P，若 $OP=ae_1,+be_2(a、b\in R)$ ，则 a、b 满足的一个等式是__4ab=1__

解析：$E_1(2,1),E_2(2,-1)$

$OP=ae_1+be_2=(2a+2b,a-b)$，点 P 在双曲线上

$\therefore\frac{(2a+2b)^2}{4}-(a-b)^2=1$，化简得 $4ab=1$



14.以集合 U=$\{a,b,c,d\}$ 的子集中选出 2 个不同的子集，

需同时满足以下两个条件：

（1）a、b 都要选出；

（2）对选出的任意两个子集 A 和 B，必有 $A\subseteq B$ 或 $B\subseteq A$，那么共有_36_种不同的选法。

解析：列举法 共有 36 种

二．选择题（本大题满分 20 分）本大题共有 4 题，每题有且只有一个正确答案。考生必须在答题纸的相应编号上，将代表答案的小方格涂黑，选对得 5 分，否则一律得零分。

15．“$x=2k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in Z)$”是“$\tan x=1$”成立的　　[答]（A）

（A）充分不必要条件.　　（B）必要不充分条件.

（C）充分条件.　　（D）既不充分也不必要条件.

解析：$\tan(2k\pi+\frac{\pi}{4})=\tan\frac{\pi}{4}=1$，所以充分；

但反之不成立，如 $\tan\frac{5\pi}{4}=1$，所以不必要

16.直线l的参数方程是 $\begin{cases}x=1+2t\\y=2-t\end{cases}(t\in R)$，则l的方向向量是 $\vec{d}$　可以是　【答】（C）

(A)(1,2)　　(B)(2,1)　　(C)(-2,1)　　(D)(1,-2)

解析：直线l的一般方程是 $x+2y-5=0$，$k=-\frac{1}{2}$，所以C正确

17.若 x_0 是方程 $(\frac{1}{2})^x=x^{\frac{1}{3}}$ 的解，则 x_0 属于区间　【答】（C）

(A)($\frac{2}{3}$,1)　(B)($\frac{1}{2}$,$\frac{2}{3}$)　(C)($\frac{1}{3}$,$\frac{1}{2}$)　(D)(0,$\frac{1}{3}$)

解析：结合图形 $\because\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}>\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}},\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$，$\therefore x_0$ 属于区间($\frac{1}{3}$,$\frac{1}{2}$)

18. 某人要制作一个三角形，要求它的三条高的长度分别为 $\frac{1}{13},\frac{1}{11},\frac{1}{5}$，则此人能　【答】（D）

（A）不能作出这样的三角形　　（B）作出一个锐角三角形

（C）作出一个直角三角形　　（D）作出一个钝角三角形

解析：设三边分别为a,b,c，利用面积相等可知

$$\frac{1}{13}a=\frac{1}{11}b=\frac{1}{5}c,\therefore a:b:c=13:11:5$$

由余弦定理得 $\cos A=\frac{5^2+11^2-13^2}{2\times5\times11}<0$，所以角A为钝角

三、解答题（本大题满分74分）本大题共有5题，解答下列各题必须在答题纸相应编号的规定区域内写出必要的步骤。

19.（本题满分12分）

已知 $0<x<\frac{\pi}{2}$，化简：

$$\lg(\cos x\cdot\tan x+1-2\sin^2\frac{x}{2})+\lg[\sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})]-\lg(1+\sin 2x).$$

=0

20.(本题满分13分)本题共有2个小题，第一个小题满分5分，第2个小题满分8分。

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_n=n-5a_n-85$，$n\in N^*$

（1）证明：$\{a_n-1\}$ 是等比数列；

（2）求数列$\{S_n\}$的通项公式，并求出 n 为何值时，S_n取得最小值，并说明理由。

（2）$S_n = n + 75(\frac{5}{6})^{n-1} - 90$ n=15 取得最小值

解析：(1) 当 $n=1$ 时，$a_1=-14$；当 $n\geq2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=-5a_n+5a_{n-1}+1$，所以$a_n - 1 = \frac{5}{6}(a_{n-1} - 1)$，

又 $a_1-1=-15\neq0$，所以数列$\{a_n-1\}$是等比数列；

(2) 由(1)知：$a_n - 1 = -15\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$，得$a_n = 1 - 15\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$，从而$S_n = 75\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} + n - 90$

($n\in\mathbf{N}^*$)；

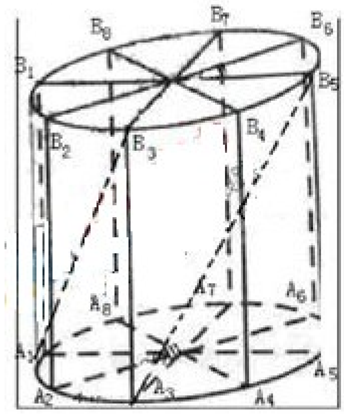
解不等式 $S_n<S_{n+1}$，得$\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} < \frac{2}{5}$，$n > \log_{\frac{5}{6}}\frac{2}{25} + 1 \approx 14.9$，当 $n\geq15$ 时，数列$\{S_n\}$单调递增；

同理可得，当 $n\leq15$ 时，数列$\{S_n\}$单调递减；故当 $n=15$ 时，S_n取得最小值．

21、（本大题满分 13 分）本题共有 2 个小题，第 1 小题满分 5 分，第 2 小题满分 8 分.

如图所示，为了制作一个圆柱形灯笼，先要制作 4 个全等的矩形骨架，总计耗用 9.6 米铁丝，骨架把圆柱底面 8 等份，再用 S 平方米塑料片制成圆柱的侧面和下底面（不安装上底面）.

(1)当圆柱底面半径r取何值时，S取得最大值？并求出该最大值（结果精确到 0.01 平方米）；



（2）在灯笼内，以矩形骨架的顶点为点，安装一些霓虹灯，当灯笼的底面半径为 0.3 米时，求图中两根直线A_1B_3与A_3B_5所在异面直线所成角的大小（结果用反三角函数表示）

解析：(1) 设圆柱形灯笼的母线长为 l，则 $l=1.2-2r(0<r<0.6)$，$S=-3\pi(r-0.4)^2+0.48\pi$，

所以当 $r=0.4$ 时，S取得最大值约为 1.51 平方米；

(2) 当 $r=0.3$ 时，$l=0.6$，建立空间直角坐标系，可得$\overrightarrow{A_1B_3} = (-0.3, 0.3, 0.6)$，$\overrightarrow{A_3B_5} = (-0.3, -0.3, 0.6)$，

设向量$\overrightarrow{A_1B_3}$与$\overrightarrow{A_3B_5}$的夹角为θ，则$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{A_1B_3}\cdot\overrightarrow{A_3B_5}}{|\overrightarrow{A_1B_3}|\cdot|\overrightarrow{A_3B_5}|} = \frac{2}{3}$，

所以A_1B_3、A_3B_5所在异面直线所成角的大小为$\arccos\frac{2}{3}$.

22.（本题满分 18 分）本题共有 3 个小题，第 1 小题满分 3 分，第 2 小题满分 5 分，第 3 小题满分 10 分。

若实数x、y、m满足$|x-m|>|y-m|$，则称x比y远离m.

（1）若x^2-1比 1 远离 0，求x的取值范围；

（2）对任意两个不相等的正数a、b，证明：a^3+b^3比a^2b+ab^2远离$2ab\sqrt{ab}$；

（3）已知函数$f(x)$的定义域 D= $\{x|x\neq \frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$，k∈Z，x∈R }.任取$x\in D$，$f(x)$等于$\sin x$和$\cos x$中远离 0 的那个值.写出函数$f(x)$的解析式，并指出它的基本性质（结论不要求证明）.

解析：(1) $x\in(-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2}.+\infty)$；

(2) 对任意两个不相等的正数a、b，有$a^3+b^3>2ab\sqrt{ab}$，$a^2b+ab^2>2ab\sqrt{ab}$，

因为$|a^3+b^3-2ab\sqrt{ab}|-|a^2b+ab^2-2ab\sqrt{ab}|=(a+b)(a-b)^2>0$，

所以$|a^3+b^3-2ab\sqrt{ab}|>|a^2b+ab^2-2ab\sqrt{ab}|$，即$a^3+b^3$比$a^2b+ab^2$远离$2ab\sqrt{ab}$；

(3) $f(x)=\begin{cases}|\sin x|, & x\in(k\pi+\frac{\pi}{4},k\pi+\frac{3\pi}{4}) \\ |\cos x|, & x\in(k\pi-\frac{\pi}{4},k\pi+\frac{\pi}{4})\end{cases}$，

性质：1°$f(x)$是偶函数，图像关于y轴对称，2°$f(x)$是周期函数，最小正周期$T=\frac{\pi}{2}$，

3°函数$f(x)$在区间$(\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{4},\frac{k\pi}{2}]$单调递增，在区间$[\frac{k\pi}{2},\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4})$单调递减，$k\in\mathbf{Z}$，

4°函数$f(x)$的值域为$(\frac{\sqrt{2}}{2},1]$.

23（本题满分 18 分）本题共有 3 个小题，第 1 小题满分 3 分，第 2 小题满分 6 分，第 3 小题满分 9 分.

已知椭圆 Γ 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ ，点 P 的坐标为（-a，b）.

（1）若直角坐标平面上的点 M、A(0,-b)，B(a，0)满足 $\overrightarrow{PM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})$,求点 M 的坐标；

（2）设直线 $l_1: y=k_1x+p$ 交椭圆 Γ 于 C、D 两点，交直线 $l_2: y=k_2x$ 于点 E. 若 $k_1\cdot k_2=-\frac{b^2}{a^2}$，证明：$E$ 为 CD 的中点；

（3）对于椭圆 Γ 上的点 Q（a cosθ，b sinθ）（ 0 < θ < π），如果椭圆 Γ 上存在不同的两个交点 P_1、P_2 满足 $\overrightarrow{PP_1}+\overrightarrow{PP_2}=\overrightarrow{PQ}$,写出求作点 P_1、P_2 的步骤，并求出使 P_1、P_2 存在的 θ 的取值范围.

解析：(1) $M(\frac{a}{2},-\frac{b}{2})$ ；

(2) 由方程组 $\begin{cases} y=k_1x+p \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \end{cases}$，消 y 得方程 $(a^2k_1^2+b^2)x^2+2a^2k_1px+a^2(p^2-b^2)=0$，

因为直线 $l_1: y=k_1x+p$ 交椭圆 Γ 于 C、D 两点，

所以 $\Delta>0$，即 $a^2k_1^2+b^2-p^2>0$，

设 $C(x_1,y_1)$、$D(x_2,y_2)$，CD 中点坐标为 (x_0,y_0)，

则 $\begin{cases} x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{a^2k_1p}{a^2k_1^2+b^2} \\ y_0=k_1x_0+p=\frac{b^2p}{a^2k_1^2+b^2} \end{cases}$，

由方程组 $\begin{cases} y=k_1x+p \\ y=k_2x \end{cases}$，消 y 得方程 $(k_2-k_1)x=p$，

又因为$k_2=-\dfrac{b^2}{a^2k_1}$，所以$\begin{cases}x=\dfrac{p}{k_2-k_1}=-\dfrac{a^2k_1p}{a^2k_1^2+b^2}=x_0\\ y=k_2x=\dfrac{b^2p}{a^2k_1^2+b^2}=y_0\end{cases}$，

故E为CD的中点；

(3) 求作点P_1、P_2的步骤：1°求出PQ的中点$E(-\dfrac{a(1-\cos\theta)}{2},\dfrac{b(1+\sin\theta)}{2})$，

2°求出直线OE的斜率$k_2=-\dfrac{b(1+\sin\theta)}{a(1-\cos\theta)}$，

3°由$PP_1+PP_2=PQ$知E为CD的中点，根据(2)可得CD的斜率$k_1=-\dfrac{b^2}{a^2k_2}=\dfrac{b(1-\cos\theta)}{a(1+\sin\theta)}$，

4°从而得直线CD的方程：$y-\dfrac{b(1+\sin\theta)}{2}=\dfrac{b(1-\cos\theta)}{a(1+\sin\theta)}(x+\dfrac{a(1-\cos\theta)}{2})$，

5°将直线CD与椭圆Γ的方程联立，方程组的解即为点P_1、P_2的坐标．

欲使P_1、P_2存在，必须点E在椭圆内，

所以$\dfrac{(1-\cos\theta)^2}{4}+\dfrac{(1+\sin\theta)^2}{4}<1$，化简得$\sin\theta-\cos\theta<\dfrac{1}{2}$，$\sin(\theta-\dfrac{\pi}{4})<\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，

又$0<\theta<\pi$，即$-\dfrac{\pi}{4}<\theta-\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{3\pi}{4}$，所以$-\dfrac{\pi}{4}<\theta-\dfrac{\pi}{4}<\arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，

故θ的取值范围是$(0,\dfrac{\pi}{4}+\arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{4})$．