# 2015－2016学年下期期末考试
# 高二数学(理)试题卷

**注意事项:**

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分. 考试时间120分钟,满分150分. 考生应首先阅读答题卡上的文字信息,然后在答题卡上作答,在试题卷上作答无效. 交卷时只交答题卡.

## 第Ⅰ卷(选择题,共60分)

一、选择题(本大题共12个小题,每小题5分,共60分. 在每小题所给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 已知复数$z$满足$z+3i-3=6-3i$,则$z=$

A. 9　　B. $3-6i$　　C. $-6i$　　D. $9-6i$

2. 函数$f(x)=2x+1$在$(1,2)$内的平均变化率

A. 3　　B. 2　　C. 1　　D. 0

3. 将5本不同的数学用书放在同一层书架上,则不同的放法有

A. 50　　B. 60　　C. 120　　D. 90

4. 2016年春节期间,某市物价部门对该市5家商场某商品一天的销售量及售价进行调查,5家商场的售价$x$(单位:元)和销售量$y$(单位:件)之间的一组数据如下表所示:

| 售价$x$ | 9 | 9.5 | 10 | 10.5 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|
| 销售量$y$ | 11 | 10 | 8 | 6 | 5 |

通过散点图可知,销售量$y$与售价$x$之间有较好的线性相关关系,其线性回归方程是$\hat{y}=-3.2x+\hat{a}$,则$\hat{a}$的值为

A. 30　　B. 35　　C. 40　　D. 45

5. 下列说法错误的是

A. 自变量取值一定时,因变量的取值带有一定随机性的两个变量之间的关系叫做相关关系

B. 在线性回归分析中,相关系数$r$的值越大,变量间的相关性越强

C. 在残差图中,残差点分布的带状区域的宽度越狭窄,其模型拟合的精度越高

D. 在回归分析中,$R^2$为0.98的模型比$R^2$为0.80的模型拟合的效果好

6. 设$(2-x)^6=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_6x^6$,则$|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_6|$的值是

A. 665　　B. 729　　C. 728　　D. 63

7. 若$x=2$是函数$f(x)=x(x-m)^2$的极大值点,则$m$的值为

A. 3　　B. 6　　C. 2或6　　D. 2

8. 由曲线$y^2=2x$和直线$y=x-4$所围成的图形的面积

A. 21　　　　B. 16　　　　C. 20　　　　D. 18

9. 对标有不同编号的 6 件正品和 4 件次品的产品进行检测，不放回地一次摸出两件. 在第一次摸出是正品条件下，第二次也摸到正品的概率

A. $\frac{3}{5}$　　　　B. $\frac{2}{5}$　　　　C. $\frac{1}{10}$　　　　D. $\frac{5}{9}$

10. 对于 $\mathbf{R}$ 上的可导函数 $f(x)$，若 $a>b>1$ 且有 $(x-1)f'(x)\geqslant 0$，则必有

A. $f(a)+f(b)<2f(1)$　　　　B. $f(a)+f(b)\leqslant 2f(1)$

C. $f(a)+f(b)\geqslant 2f(1)$　　　　D. $f(a)+f(b)>2f(1)$

11. 以下数表的构造思路源于我国南宋数学家杨辉所著的《详解九章算术》一书中的"杨辉三角形".

1　2　3　4　5 ………… 2013　2014　2015　2016<br>
3　5　7　9 ………… 4027　4029　4031<br>
8　12　16 ………… 8056　8060<br>
20　28 ………… 16116<br>
…………

该表由若干行数字组成，从第二行起，每一行中的数字均等于其"肩上"两数之和，表中最后一行仅有一个数，则这个数为

A. $2017\times 2^{2015}$　　B. $2017\times 2^{2014}$　　C. $2016\times 2^{2015}$　　D. $2016\times 2^{2014}$

12. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足：$f(x)+f'(x)>1$，$f(0)=4$，则不等式 $e^x f(x)>e^x+3$（其中 $e$ 为自然对数的底数）的解集为

A. $(0,+\infty)$　　　　B. $(-\infty,0)\cup(3,+\infty)$

C. $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$　　　　D. $(3,+\infty)$

## 第Ⅱ卷（非选择题，共 90 分）

**二、填空题**（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.）

13. 若随机变量 $X\sim N(2,1)$，且 $P(X>3)=0.1587$，则 $P(X>1)=$________.

14. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+x+1$ 有两个极值点，则实数 $a$ 的取值范围 (0,+4)

15. 把 5 件不同产品摆成一排，若产品 A 与产品 B 相邻，且产品 A 与产品 C 不相邻，则不同的摆法有 18 种.

16. 观察下列等式：

$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$；

$\frac{7}{3}+\frac{8}{3}+\frac{10}{3}+\frac{11}{3}=12$；

$\frac{16}{3}+\frac{17}{3}+\frac{19}{3}+\frac{20}{3}+\frac{22}{3}+\frac{23}{3}=39$；

……

猜想：当 $m<n$，且 $m,n\in\mathbf{N}$ 时，$\frac{3m+1}{3}+\frac{3m+2}{3}+\frac{3m+4}{3}+\frac{3m+5}{3}\cdots+\frac{3n-2}{3}+\frac{3n-1}{3}=$ ________.（最后结果用 $m,n$ 表示）

**三、解答题**（本大题共 6 小题，共 70 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

17. 已知 $(\sqrt[4]{x}+\sqrt{x^3})^n$ 展开式中的倒数第三项的系数为 45.

求：（Ⅰ）含 $x^5$ 的项；

（Ⅱ）系数最大的项.

18. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $S_n+a_n=2n+1$.

（Ⅰ）写出 $a_1,a_2,a_3$，推测 $a_n$ 的表达式；

（Ⅱ）用数学归纳法证明所得的结论.

19. 某超市举行有奖促销活动，顾客购买一定金额的商品后即可抽奖. 每次抽奖都是从装有 4 个红球，6 个白球的 1 号箱和装有 5 个红球、5 个白球的 2 号箱中，各随机摸出 1 个球，在摸出的 2 个球中，若都是红球，则获一等奖；若只有 1 个红球，则获二等奖；若没有红球，则不获奖.

（Ⅰ）求顾客抽奖 1 次能获奖的概率；

（Ⅱ）若某顾客有 3 次抽奖机会，记该顾客在 3 次抽奖中获一等奖的次数为 $X$，求 $X$ 的分布列.

20. 已知函数 $f(x)=x^3+(1-a)x^2-a(a+2)x+b$.（$a,b\in\mathbf{R}$）

（Ⅰ）若函数 $f(x)$ 的图象过原点，且在原点处的切线斜率是 $-3$，求 $a,b$ 的值；

（Ⅱ）若函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 上不单调，求 $a$ 的取值范围.

21. 近年空气质量逐步恶化，雾霾天气现象出现增多，大气污染危害加重，大气污染可引起心悸、呼吸困难等心肺疾病，为了解某市心肺疾病是否与性别有关，在某医院随机的对入院 50 人进行了问卷调查，得到如下的列联表.

| | 患心肺疾病 | 不患心肺疾病 | 合计 |
|---|---|---|---|
| 男 | | 5 | |
| 女 | 10 | | |
| 合计 | | | 50 |

已知在全部 50 人中随机抽取 1 人，抽到患心肺疾病的人的概率为 $\frac{3}{5}$.

(Ⅰ)请将上面的列联表补充完整；

(Ⅱ)是否有 99.5% 的把握认为患心肺疾病与性别有关？说明你的理由；

(Ⅲ)已知在患心肺疾病的 10 位女性中，有 3 位又患有胃病，现在从患心肺疾病的 10 位女性中，选出 3 名进行其它方面的排查，记选出患胃病的女性人数为 $\xi$，求 $\xi$ 的分布列、数学期望.

下面的临界值表仅供参考：

| $P(K^2\geq k)$ | 0.15 | 0.10 | 0.05 | 0.025 | 0.010 | 0.005 | 0.001 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $K$ | 2.072 | 2.706 | 3.841 | 5.024 | 6.635 | 7.879 | 10.828 |

$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

22. 已知 $f(x)=ax-\ln x$，$g(x)=\frac{\ln x}{x}$，$x\in(0,e]$，其中 $e$ 是自然对数的底数，$a\in\mathbf{R}$.

(Ⅰ)讨论当 $a=1$ 时，$f(x)$ 的单调性和极值；

(Ⅱ)求证：在(Ⅰ)的条件下，有 $f(x)>g(x)+\frac{1}{2}$；

(Ⅲ)是否存在实数 $a$，使 $f(x)$ 最小值是 3？若存在，求出 $a$ 的值；若不存在，请说明理由.

2016高二理科数学答案

一、选择题

1.D ; 2.B; 3.C ; 4.C ; 5.B ; 6.A ; 7.B; 8.D; 9.D ; 10.C; 11.B ; 12.A.

二、选择题

13. 0.8413； 14. $a>1$ 或 $a<-1$ ； 15. 36； 16. $n^2-m^2$.

三、解答题

17.解：(1) 由题意知 $C_n^{n-2}=45$，即 $C_n^2=45$，$\therefore n=10$，........................................2 分

$T_{K+1}=C_{10}^k\left(x^{\frac{1}{4}}\right)^{10-k}\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^k=C_{10}^k x^{\frac{10+5k}{4}}$，令 $\frac{10+5k}{4}=5$，得 $k=2$。.......6 分

所以含 $x^3$ 的项为 $T_3=C_{10}^2x^5=45x^5$。............................................................7 分

(2) 系数最大的项为即 $T_6=C_{10}^5x^{\frac{35}{4}}=252x^{\frac{35}{4}}$。......................................10 分

18.解：(1) 由 $S_n+a_n=2n+1$ 得

$a_1=\frac{3}{2},a_2=\frac{7}{4},a_3=\frac{15}{8},$ 推测 $a_n=\frac{2^{n+1}-1}{2^n}=2-\frac{1}{2^n},(n\in N^*)$。................5 分

(2) 证明：$a_n=2-\frac{1}{2^n},(n\in N^*)$，

①当 $n=1$ 时，$a_1=2-\frac{1}{2^1}=\frac{3}{2}$,结论成立.........................................................6 分

②假设当 $n=k(k\geq 1,k\in N^*)$ 时结论成立，即 $a_k=2-\frac{1}{2^k}$，.........................7 分

那么当 $n=k+1$ 时，$a_1+a_2+...+a_k+a_{k+1}+a_{k+1}=2(k+1)+1$，

$\because$ $a_1+a_2+...+a_k=2k+1-a_k$，$\therefore 2a_{k+1}=a_k+2$，$\therefore 2a_{k+1}=4-\frac{1}{2^k}$，

$\therefore a_{k+1}=2-\frac{1}{2^{k+1}}$，所以当 $n=k+1$ 时结论也成立.

由①②知对于任意的正整数 $n$，结论都成立...................................................12 分

19.解：(1) 设事件 $A_1$ 为“从 1 号箱中摸出的 1 个球是红球”，$A_2$ 为“从 2 号箱中摸出 1 个球是红球”，$B_1$ 为“顾客抽奖 1 次获一等奖”，$B_2$ 为“顾客抽奖 1 次获二等奖”，$C$ 为“顾客抽

奖 1 次能获奖”. .....................2 分

由已知得

$P(A_1)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}, P(A_2)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$，$\therefore P(B_1)=P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{5}$，

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}_2)=\mathrm{P}(\mathrm{A}_1\overline{\mathrm{A}_2}+\overline{\mathrm{A}_1}\mathrm{A}_2)=\mathrm{P}(\mathrm{A}_1\overline{\mathrm{A}_2})+\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}_1}\mathrm{A}_2)$$

$$=\mathrm{P}(\mathrm{A}_1)\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}_2})+\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}_1})\mathrm{P}(\mathrm{A}_2)$$

$$=\frac{2}{5}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{2}{5}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

$\therefore P(C)=P(B_1+B_2)=P(B_1)+P(B_2)=\frac{1}{5}+\frac{1}{2}=\frac{7}{10}$ 。 ..................6 分

（2）顾客抽奖 3 次可视为 3 次独立重复试验，由（1）知顾客抽奖 1 次获一等奖的概率为 $\frac{1}{5}$ ，

所以 $X\sim B\left(3,\frac{1}{5}\right)$,

（3）于是，$P(X=0)=C_3^0\left(\frac{1}{5}\right)^0\left(\frac{4}{5}\right)^3=\frac{64}{125}$， $\mathrm{P}(\mathrm{X}=1)=\mathrm{C}_3^1\left(\frac{1}{5}\right)^1\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{48}{125}$,

$P(X=2)=C_3^2\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)^1=\frac{12}{125}$， $\mathrm{P}(\mathrm{X}=3)=\mathrm{C}_3^3\left(\frac{1}{5}\right)^3\left(\frac{4}{5}\right)^0=\frac{1}{125}$,

故 $X$ 的分布列为

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{64}{125}$ | $\frac{48}{125}$ | $\frac{12}{125}$ | $\frac{1}{125}$ |

..................12 分

20.解：（1）因为函数 $f(x)$的图像过原点，则 $b=0$ ，

所以 $f(x)=x^3+(1-a)x^2-a(a+2)x$ ，又 $f'(x)=3x^2+2(1-a)x-a(a+2)$

由 $f'(0)=-3$ ，$\therefore -a(a+2)=-3,$ 即 $a=-3$ 或 $a=1$ ..............................5 分

（2）由 $f'(0)=0$ 得 $x_1=a, x_2=-\frac{a+2}{3}$ ，由题意知

若 $a=-\frac{a+2}{3}$ ，即 $a=-\frac{1}{2}$ ，此时 $f'(x)\geq 0$ 恒成立，不合题意.

若 $a \neq -\frac{a+2}{3}$，即 $a \neq -\frac{1}{2}$ 时，有 $-1 < a < 1$ 或 $-1 < -\frac{a+2}{3} < 1$。

解得 $-5 < a < 1$，又因为 $a \neq -\frac{1}{2}$。

所以 $a$ 的取值范围 $\left(-5,-\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2},1\right)$。..............................12 分

21.解：（1）根据在全部 50 人中随机抽取 1 人抽到患心肺疾病生的概率为 $\frac{3}{5}$，可得患心肺疾病的为 30 人，故可得。

列联表补充如下

| | 患心肺疾病 | 不患心肺疾病 | 合计 |
|---|---|---|---|
| 男 | 20 | 5 | 25 |
| 女 | 10 | 15 | 25 |
| 合计 | 30 | 20 | 50 |

. ..............................4 分

（2）因为 $K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，即 $K^2=\frac{50(20\times15-5\times10)^2}{25\times25\times30\times20}=\frac{25}{3}$，

所以 $K^2\approx8.333$。

又 P（$k^2\geq7.879$）=0.005=0.5%，

所以，我们有 99.5%的把握认为是否患心肺疾病是与性别有关系的．..............................8 分

（3）现在从患心肺疾病的 10 位女性中，选出 3 名进行胃病的排查，

记选出患胃病的女性人数为 ξ，则 ξ=0，1，2，3．

故 $P(\xi=0)=\frac{C_7^3}{C_{10}^3}=\frac{7}{24}$，$P(\xi=1)=\frac{C_7^2\cdot C_3^1}{C_{10}^3}=\frac{21}{40}$，$P(\xi=2)=\frac{C_7^1\cdot C_3^2}{C_{10}^3}=\frac{7}{40}$，$P(\xi=3)=\frac{C_3^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{120}$

，

则 ξ 的分布列：

| ξ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| P | $\frac{7}{24}$ | $\frac{21}{40}$ | $\frac{7}{40}$ | $\frac{1}{120}$ |

则 $E(\xi)=1\times\frac{21}{40}+2\times\frac{7}{40}+3\times\frac{1}{120}=0.9$。 ..............................12 分

22.解：（1）由题意知，当 $a=1$ 时，$f'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$，

易知当 $0 < x < 1$ 时，$f'(x) < 0$，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，

当 $1 < x \leq e$ 时，$f'(x) > 0$，$f(x)$ 在 $(1,e]$ 上单调递增，....................................3 分

所以 $f(x)$ 极小值 $f(1)=1$ ...............................................................................4 分

（2）证明：由（1）可知，当 $a=1$ 时，$f(x)$ 在 $(0,e]$ 上的最小值为 1.

令 $h(x)=g(x)+\frac{1}{2}=\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{2}$，则 $h'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，......................................................6 分

当 $0<x\le e$ 时 $h'(x)\ge 0$ $\therefore h(x)$ 在 $(0,e]$ 上单调递增，..................................................8 分

$\therefore h(x)_{\max}=h(e)=\frac{1}{e}+\frac{1}{2}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1=f(x)_{\min}$，

所以在（1）的条件下有 $f(x)>g(x)+\frac{1}{2}$ ..................................................................9 分

（3）存在。求解过程如下：

假设存在实数 $a$，使 $f(x)$ 最小值是 3，由题意

$f'(x)=a-\frac{1}{x}=\frac{ax-1}{x}$，

所以，① 当 $a\le 0$ 时，因为 $x\in(0,e]$，所以 $f'(x)<0$，从而 $f(x)$ 在 $(0,e]$ 上单调递减，

$\therefore f(x)_{\min}=f(e)=ae-1$，此时由 $f(x)_{\min}=3$ 解得 $a=\frac{4}{e}$（舍去）；

②当 $0<\frac{1}{a}<e$ 时，$f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 上单减。在 $\left(\frac{1}{a},e\right]$ 上单增，

$\therefore f(x)_{\min}=f\left(\frac{1}{a}\right)=1+\ln a$，此时由 $f(x)_{\min}=3$ 解得 $a=e^2$

③当 $\frac{1}{a}\ge e$ 时，$\because$ $x\in(0,e]$，$\therefore f'(x)<0$，从而 $f(x)$ 在 $(0,e]$ 上单调递减，

$\therefore f(x)_{\min}=f(e)=ae-1$，此时由 $f(x)_{\min}=3$ 解得 $a=\frac{4}{e}$（舍去）；

综上：存在实数 $a=e^2$ 使 $f(x)$ 最小值是 3. ..............................12 分