

## 高三自评试题

# 数学 (理科)

本试卷分第 I 卷 (选择题) 和第 II 卷 (非选择题) 两部分, 共 150 分, 考试时间 120 分钟.

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必用 2B 铅笔和 0.5 毫米黑色签字笔 (中性笔) 将姓名、准考证号、考试科目、试卷类型填涂在答题卡规定的位置上.

2. 第 I 卷每小题选出答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应的答案标号涂黑; 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号. 答案不能答在试题卷上.

3. 第 II 卷必须用 0.5 毫米黑色签字笔 (中性笔) 作答, 答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应的位置, 不能写在试题卷上; 如需改动, 先划掉原来的答案, 然后再写上新的答案; 不准使用涂改液、胶带纸、修正带. 不按以上要求作答的答案无效.

参考公式: 锥体的体积公式为:  $V = \frac{1}{3}Sh$ , 其中  $S$  为锥体的底面积,  $h$  为锥体的高.

### 第 I 卷 (选择题 共 60 分)

一、选择题: 本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合  $M = \{m, -3\}$ ,  $N = \{x | 2x^2 + 7x + 3 < 0, x \in \mathbf{Z}\}$ , 如果  $M \cap N \neq \emptyset$ , 则  $m$  等于

A. -1    B. -2    C. -2 或 -1    D.  $-\frac{3}{2}$

2. 设复数  $z = 1 + \frac{2}{i}$  (其中  $i$  为虚数单位), 则  $z^2 + 3\bar{z}$  的虚部为

A.  $2i$     B. 0    C. -10    D. 2

3. “ $a < 4$ ”是“对任意的实数  $x$ ,  $|2x - 1| + |2x + 3| \geq a$  成立”的

A. 充分必要条件    B. 充分不必要条件  
C. 必要不充分条件    D. 既非充分也非必要条件

4. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} \log_2 x, & x > 0 \\ 9^{-x} + 1, & x \leq 0 \end{cases}$ , 则  $f(f(1)) + f\left(\log_3 \frac{1}{2}\right)$  的值是

A. 7    B. 2    C. 5    D. 3

5. 设  $m, n$  是两条不同的直线,  $\alpha, \beta, \gamma$  是三个不同的平面. 有下列四个命题:

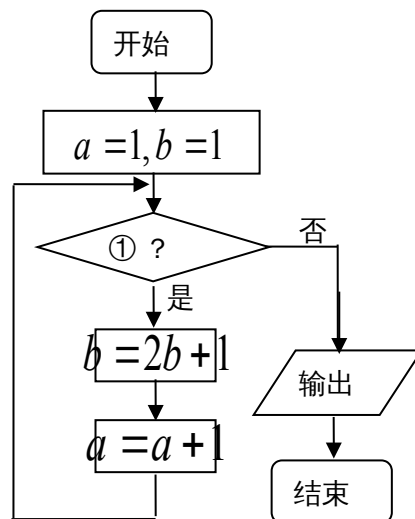
- ① 若  $\alpha // \beta, m \subset \alpha, n \subset \beta$ , 则  $m // n$ ;
- ② 若  $m \perp \alpha, m // \beta$ , 则  $\alpha \perp \beta$ ;
- ③ 若  $n \perp \alpha, n \perp \beta, m \perp \alpha$ , 则  $m \perp \beta$ ;
- ④ 若  $\alpha \perp \gamma, \beta \perp \gamma, m \perp \alpha$ , 则  $m \perp \beta$ .

其中错误命题的序号是

A. ①③    B. ①④    C. ②③④    D. ②③

6. 执行如图所示的程序框图, 若输出的  $b$  的值为 31, 则图中判断框内①处应填

A. 3    B. 4    C. 5    D. 6



7. 函数  $y = \sqrt{9 - (x - 5)^2}$  的图象上存在不同的三点到原点的距离构成等比数列, 则以下

不可能成为该等比数列的公比的数是

A.  $\frac{3}{4}$     B.  $\sqrt{2}$     C.  $\sqrt{3}$     D.  $\sqrt{5}$

8. 以下正确命题的个数为

① 命题“存在  $x \in \mathbb{R}, x^2 - x - 2 \geq 0$ ”的否定是: “不存在  $x \in \mathbb{R}, x^2 - x - 2 < 0$ ”;

② 函数  $f(x) = x^{\frac{1}{3}} - (\frac{1}{2})^x$  的零点在区间  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$  内;

③ 已知随机变量  $\xi$  服从正态分布  $N(1, \sigma^2)$ ,  $P(\xi \leq 4) = 0.79$ , 则  $P(\xi \leq -2) = 0.21$ ;

④ 函数  $f(x) = e^{-x} - e^x$  的图象的切线的斜率的最大值是  $-2$  ;

⑤ 线性回归直线  $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$  恒过样本中心  $(\bar{x}, \bar{y})$  , 且至少过一个样本点.

A . 1                      B . 2                      C . 3                      D . 4

9 . 设  $a = \int_0^2 (1 - 3x^2) dx + 4$  , 则二项式  $(x^2 + \frac{a}{x})^6$  展开式中不含  $x^3$  项的系数和是

A . -160      B . 160      C . 161      D . -161

10 . 已知函数  $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}x, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  ,  $\sin x_0 = \frac{1}{2}$  ,  $x_0 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  , 那么下面命题中真命题的序号是

①  $f(x)$  的最大值为  $f(x_0)$                       ②  $f(x)$  的最小值为  $f(x_0)$

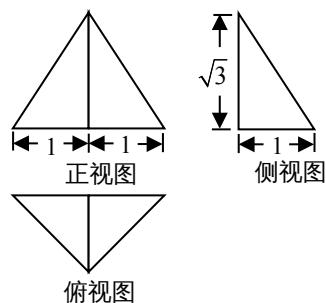
③  $f(x)$  在  $[-\frac{\pi}{2}, x_0]$  上是增函数      ④  $f(x)$  在  $[x_0, \frac{\pi}{2}]$  上是增函数

A . ①③      B . ①④      C . ②③      D . ②④

11 . 一个几何体的三视图如图所示, 其中正视图是一个正三角形, 则这个几何体的

A. 外接球的半径为  $\frac{\sqrt{3}}{3}$       B. 体积为  $\sqrt{3}$

C. 表面积为  $\sqrt{6} + \sqrt{3} + 1$       D. 外接球的表面积为  $\frac{16\pi}{3}$



12 . 已知直线  $y = k(x+1)$  与抛物线  $C: y^2 = 4x$  相交于

$A, B$  两点,  $F$  为抛物线  $C$  的焦点, 若  $|FA| = 2|FB|$ , 则  $k =$  A .  $\pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$       B .  $\pm \frac{\sqrt{2}}{3}$

C .  $\pm \frac{1}{3}$       D .  $\frac{2}{3}$

## 第 II 卷 (非选择题 共 90 分)

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分。

13. 若  $\tan \alpha = 2$ , 则  $\sin \alpha \cos \alpha =$ \_\_\_\_\_.

14. 已知直线  $y = x + a$  与圆  $x^2 + y^2 = 4$  交于  $A$ 、 $B$  两点, 且  $OA \cdot OB = 0$ , 其中  $O$  为坐标原点, 则正实数  $a$  的值为\_\_\_\_\_.

15. 设  $x$ 、 $y$  满足约束条件  $\begin{cases} 3x - y - 6 \leq 0 \\ x - y + 2 \geq 0 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$ , 则目标函数  $z = x^2 + y^2$  的最大值为\_\_\_\_\_.

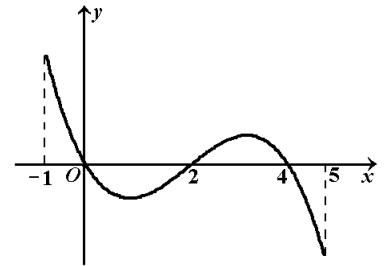
16. 已知函数  $f(x)$  的定义域为  $[-1, 5]$ , 部分对应值如下表,  $f(x)$  的导函数  $y = f'(x)$

的图象如图所示. 下列关于 

$x$	-1	0	4	5
$f(x)$	1	2	2	1

 $f(x)$  的命题:

- ① 函数  $f(x)$  的极大值点为  $0, 4$ ;
- ② 函数  $f(x)$  在  $[0, 2]$  上是减函数;
- ③ 如果当  $x \in [-1, t]$  时,  $f(x)$  的最大值是 2, 那么  $t$  的最大值为 4;
- ④ 当  $1 < a < 2$  时, 函数  $y = f(x) - a$  有 4 个零点;
- ⑤ 函数  $y = f(x) - a$  的零点个数可能为 0、1、2、3、4 个.



其中正确命题的序号是\_\_\_\_\_.

三、解答题：本大题共 6 小题, 共 74 分. 解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分) 已知向量  $\vec{m} = (\sin x, \sqrt{3} \sin x)$ ,  $\vec{n} = (\sin x, -\cos x)$ , 设函数

$f(x) = \vec{m} \cdot \vec{n}$ , 若函数  $g(x)$  的图象与  $f(x)$  的图象关于坐标原点对称.

(I) 求函数  $g(x)$  在区间  $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right]$  上的最大值, 并求出此时  $x$  的值;

(II) 在  $\triangle ABC$  中,  $a, b, c$  分别是角  $A, B, C$  的对边,  $A$  为锐角, 若  $f(A) - g(A) = \frac{3}{2}$ ,

$b + c = 7$ ,  $\triangle ABC$  的面积为  $2\sqrt{3}$ , 求边  $a$  的长.

18. (本小题满分 12 分)

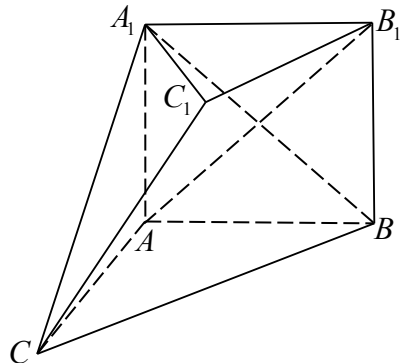
如图, 在多面体  $ABC - A_1B_1C_1$  中, 四边形  $ABB_1A_1$

是正方形,  $AC = AB = 1$ ,  $A_1C = A_1B = BC$ ,

$B_1C_1 \parallel BC$ ,  $B_1C_1 = \frac{1}{2} BC$ .

(I) 求证:  $AB_1 \parallel$  面  $A_1C_1C$ ;

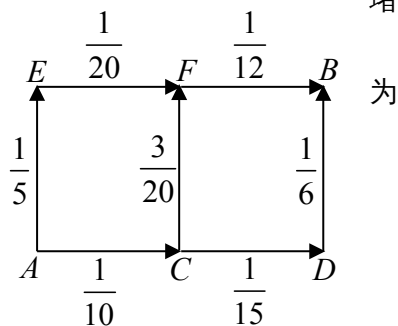
(II) 求二面角  $C - A_1C_1 - B$  的余弦值的大小.



19. (本小题满分 12 分) 甲居住在城镇的  $A$  处, 准备开车到单位  $B$  处上班, 若该地各路段发生堵车事件都是相互独立的, 且在同一路段发生堵车事件最多只有一次, 发生堵车事件的概率如图

(例如,  $A \rightarrow C \rightarrow D$  算作两个路段: 路段  $AC$  发生

堵车事件的概率为  $\frac{1}{10}$ , 路段  $CD$  发生堵车事件的概率



$\frac{1}{15}$ ，且甲在每个路段只能按箭头指的方向前进）。

(I) 请你为其选择一条由  $A$  到  $B$  的路线，使得途中发生堵车事件的概率最小；

(II) 若记路线  $A \rightarrow C \rightarrow F \rightarrow B$  中遇到堵车次数为随机变量  $\xi$ ，求  $\xi$  的分布列及  $E\xi$ 。

20. (本小题满分 12 分) 已知集合  $A = \{x | x = -2n - 1, n \in \mathbb{N}^*\}$ ,  $B = \{x | x = -6n + 3, n \in \mathbb{N}^*\}$ , 设  $S_n$  是等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 若  $\{a_n\}$  的任一项  $a_n \in A \cap B$ , 且首项  $a_1$  是  $A \cap B$  中的最大数,  $-750 < S_{10} < -300$ .

(I) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(II) 若数列  $\{b_n\}$  满足  $b_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{a_n + 13n - 9}$ , 令  $T_n = 24(b_2 + b_4 + b_6 + \dots + b_{2n})$ , 试比较  $T_n$  与  $\frac{48n}{2n+1}$  的大小.

21. (本小题满分 12 分) 已知函数  $f(x) = \ln(2+3x) - \frac{3}{2}x^2$ .

(I) 求函数  $y = f(x)$  的极大值;

(II) 令  $g(x) = f(x) + \frac{3}{2}x^2 + (m-1)x$  ( $m$  为实常数), 试判断函数  $g(x)$  的单调性;

(III) 若对任意  $x \in \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right]$ , 不等式  $|a - \ln x| + \ln[f'(x) + 3x] > 0$  均成立, 求实数  $a$  的

取值范围.

22. (本小题满分 14 分) 已知椭圆  $C_1$ 、抛物线  $C_2$  的焦点均在  $x$  轴上,  $C_1$  的中心和  $C_2$  的顶点均为坐标原点  $O$ , 从每条曲线上各取两个点, 将其坐标记录于表中:

(I) 求  
(II) 请  
同时满足  
点  $F$ ;

$x$	3	-2	4	$\sqrt{2}$
$y$	$-2\sqrt{3}$	0	-4	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

$C_1$ 、 $C_2$  的标准方程;  
问是否存在直线  $l$   
条件: (i) 过  $C_2$  的焦  
(ii) 与  $C_1$  交于不同两

点  $Q$ 、 $R$ ，且满足  $OQ \perp OR$ ？若存在，求出直线  $l$  的方程；若不存在，请说明理由。

(III) 已知椭圆  $C_1$  的左顶点为  $A$ ，过  $A$  作两条互相垂直的弦  $AM$ 、 $AN$  分别另交椭圆于  $M$ 、 $N$  两点。当直线  $AM$  的斜率变化时，直线  $MN$  是否过  $x$  轴上的一定点，若过定点，请给出证明，并求出该定点坐标；若不过定点，请说明理由。

## 高三自评试题

# 数学（理科）参考答案及评分标准

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。

C D B A B      B D C C A      D A

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分。

13.  $\frac{2}{5}$       14. 2      15. 52      16. ①②⑤

三、解答题：本大题共 6 小题，共 74 分，解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 12 分)

解：(1) 由题意得： $f(x) = \sin^2 x - \sqrt{3} \sin x \cos x = \frac{1 - \cos 2x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x$

$= \frac{1}{2} - \sin(2x + \frac{\pi}{6})$  .....2分

所以  $g(x) = -\frac{1}{2} - \sin(2x - \frac{\pi}{6})$  .....3分

因为  $x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}]$ ，所以  $2x - \frac{\pi}{6} \in [-\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6}]$

所以当  $2x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2}$  即  $x = -\frac{\pi}{6}$  时，函数  $g(x)$  在区间  $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}]$  上的最大值为  $\frac{1}{2}$ 。

.....6分

(II) 由  $f(A) - g(A) = \frac{3}{2}$  得： $1 - \sin(2A + \frac{\pi}{6}) + \sin(2A - \frac{\pi}{6}) = \frac{3}{2}$

化简得： $\cos 2A = -\frac{1}{2}$

又因为  $0 < A < \frac{\pi}{2}$ ，解得： $A = \frac{\pi}{3}$  .....9分

由题意知： $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A = 2\sqrt{3}$ ，解得  $bc = 8$ ，

又  $b + c = 7$ ，所以  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = (b + c)^2 - 2bc(1 + \cos A)$

$= 49 - 2 \times 8 \times (1 + \frac{1}{2}) = 25$

故所求边  $a$  的长为 5. ....12分

**18. (本小题满分 12 分)**

解：(1) 取  $BC$  的中点  $E$ ，连结  $AE$ ， $C_1E$ ， $B_1E$

$\because B_1C_1 \parallel BC, B_1C_1 = \frac{1}{2}BC, \therefore B_1C_1 \parallel EC, B_1C_1 = EC,$

$\therefore$  四边形  $CEB_1C_1$  为平行四边形, 从而  $B_1E \parallel C_1C,$

$\square C_1C \subset \text{面 } A_1C_1C, B_1E \not\subset \text{面 } A_1C_1C$

$\therefore B_1E \parallel \text{面 } A_1C_1C$  .....2分

$\square B_1C_1 \parallel BC, B_1C_1 = \frac{1}{2}BC, \therefore B_1C_1 \parallel BE, B_1C_1 = BE$

$\therefore$  四边形  $BB_1C_1E$  为平行四边形

$\therefore B_1B \parallel C_1E, \text{且 } B_1B = C_1E$

又  $\square ABB_1A_1$  是正方形,  $\therefore A_1A \parallel C_1E, \text{且 } A_1A = C_1E$

故  $AEC_1A_1$  为平行四边形,  $\therefore AE \parallel A_1C_1$

$\square A_1C_1 \subset \text{面 } A_1C_1C, AE \not\subset \text{面 } A_1C_1C$

$\therefore AE \parallel \text{面 } A_1C_1C$  .....4分

$\square AE \cap B_1E = E, \therefore \text{面 } B_1AE \parallel \text{面 } A_1C_1C$

$\square AB_1 \subset \text{面 } B_1AE, \therefore AB_1 \parallel \text{面 } A_1C_1C$  .....6分

(II)  $\square$  四边形  $ABB_1A_1$  为正方形,  $\therefore A_1A = AB = AC = 1, A_1A \perp AB$

$$\therefore A_1B = \sqrt{2}, \square A_1C = A_1B \therefore A_1C = \sqrt{2}$$

由勾股定理可得： $\angle A_1AC = 90^\circ$ ， $\therefore$

$$A_1A \perp AC$$

$\square AB \cap AC = A$ ， $\therefore A_1A \perp \text{面} ABC$ ，

$$\square A_1C = A_1B = BC$$
， $\therefore BC = \sqrt{2}$

由勾股定理可得： $\angle BAC = 90^\circ$ ， $\therefore$

$$AB \perp AC \quad \dots\dots\dots 8 \text{分}$$

故以  $A$  为原点，以  $AC$  为  $x$  轴建立坐标系如图，则  $C(1,0,0), A_1(0,0,1), C_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ ，

$B(0,1,0)$ ，所以  $CA_1 = (-1,0,1)$ ， $CC_1 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ ， $BA_1 = (0,-1,1)$ ，

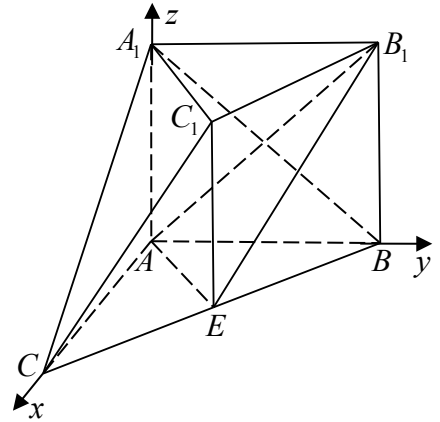
$$BC_1 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$$

设面  $A_1C_1C$  的法向量为  $n_1 = (x, y, z)$ ，由  $n_1 \cdot CA_1 = 0, n_1 \cdot CC_1 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x+z=0 \\ -\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y+z=0 \end{cases}, \text{令 } z=1, \text{则 } n_1 = (1, -1, 1)$$

设面  $A_1C_1B$  的法向量为  $n_2 = (m, n, k)$ ，则  $n_2 \cdot BA_1 = 0, n_2 \cdot BC_1 = 0$

$$\text{则 } \begin{cases} -n+k=0 \\ \frac{1}{2}m-\frac{1}{2}n+k=0 \end{cases}, \text{令 } k=1, \text{则 } n_2 = (-1, 1, 1) \quad \dots\dots\dots 10 \text{分}$$



$$\text{所以 } \cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{-1-1+1}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = -\frac{1}{3}$$

设二面角  $C - A_1C_1 - B$  的平面角为  $\alpha$  ,  $\langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = \theta$

$$\text{所以 } \cos \alpha = \cos(\pi - \theta) = \frac{1}{3} \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

**19 . (本小题满分 12 分)**

解：( I ) 记路段  $AC$  发生堵车事件为  $AC$  , 各路段发生堵车事件的记法与此类同. 因为各路段发生堵车事件都是独立的, 且在同一路段发生堵车事件最多只有一次, 所以路线  $A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow B$  中遇到堵车的概率为

$$\begin{aligned} P_1 &= 1 - P(\overline{AC} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{DB}) = 1 - P(\overline{AC})P(\overline{CD})P(\overline{DB}) \\ &= 1 - [1 - P(AC)] [1 - P(CD)] [1 - P(DB)] \\ &= 1 - \frac{9}{10} \cdot \frac{14}{15} \cdot \frac{5}{6} = \frac{3}{10} \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分} \end{aligned}$$

同理：路线  $A \rightarrow C \rightarrow F \rightarrow B$  中遇到堵车的概率为  $P_2 = 1 - P(\overline{AC} \cdot \overline{CF} \cdot \overline{FB}) = \frac{239}{800}$

$$\left( \text{小于 } \frac{3}{10} \right) \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

路线  $A \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow B$  中遇到堵车的概率为  $P_3 = 1 - P(\overline{AE} \cdot \overline{EF} \cdot \overline{FB}) = \frac{91}{300}$  (大于  $\frac{3}{10}$ )

显然要使得由  $A$  到  $B$  的路线途中发生堵车事件的概率最小, 只可能在以上三条路线中选择. 因此选择路线  $A \rightarrow C \rightarrow F \rightarrow B$  , 可使得途中发生堵车事件的概率最小  $\dots\dots\dots 6$  分

( II ) 路线  $A \rightarrow C \rightarrow F \rightarrow B$  中遇到堵车次数  $\xi$  可取值为 0 , 1 , 2 , 3 .

$$P(\xi = 0) = P(\overline{AC} \cdot \overline{CF} \cdot \overline{FB}) = \frac{561}{800} ,$$

$$P(\xi = 1) = P(AC \cdot \overline{CF} \cdot \overline{FB}) + P(\overline{AC} \cdot CF \cdot \overline{FB}) + P(\overline{AC} \cdot \overline{CF} \cdot FB)$$

$$= \frac{1}{10} \cdot \frac{17}{20} \cdot \frac{11}{12} + \frac{9}{10} \cdot \frac{3}{20} \cdot \frac{11}{12} + \frac{9}{10} \cdot \frac{17}{20} \cdot \frac{1}{12} = \frac{637}{2400}$$

$$P(\xi = 2) = P(AC \cdot CF \cdot \overline{FB}) + P(AC \cdot \overline{CF} \cdot FB) + P(\overline{AC} \cdot CF \cdot FB)$$

$$= \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{20} \cdot \frac{11}{12} + \frac{1}{10} \cdot \frac{17}{20} \cdot \frac{1}{12} + \frac{9}{10} \cdot \frac{3}{20} \cdot \frac{1}{12} = \frac{77}{2400}$$

$$P(\xi = 3) = P(AC \cdot CF \cdot FB) = \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{20} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{800}$$

所以  $\xi$  的分布列为

$\xi$	0	1	2	3
$P$	$\frac{561}{800}$	$\frac{637}{2400}$	$\frac{77}{2400}$	$\frac{1}{800}$

.....9 分

$$\therefore E\xi = 0 \times \frac{561}{800} + 1 \times \frac{637}{2400} + 2 \times \frac{77}{2400} + 3 \times \frac{1}{800} = \frac{1}{3} \quad \text{.....12 分}$$

## 20 . (本小题满分 12 分)

解: (1) 根据题设可得: 集合  $A$  中所有的元素可以组成以 - 3 为首项, - 2 为公差的递减等差数列; 集合  $B$  中所有的元素可以组成以 - 3 为首项, - 6 为公差的递减等差数列.

由此可得, 对任意的  $n \in N^*$ , 有  $A \cap B = B$

$A \cap B$  中的最大数为 - 3, 即  $a_1 = - 3$  .....2 分

设等差数列  $\{a_n\}$  的公差为  $d$ , 则  $a_n = - 3 + (n - 1)d$ ,  $S_{10} = \frac{10(a_1 + a_{10})}{2} = 45d - 30$

因为  $- 750 < S_{10} < - 300$ ,  $\therefore - 750 < 45d - 30 < - 300$ , 即  $- 16 < d < - 6$

由于  $B$  中所有的元素可以组成以 - 3 为首项, - 6 为公差的递减等差数列

所以  $d = - 6m (m \in Z, m \neq 0)$ , 由  $- 16 < - 6m < - 6 \Rightarrow m = 2$ , 所以  $d = - 12$  .....5 分

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 9 - 12n$  ( $n \in N^*$ ) .....6分

$$(II) b_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{a_n+13n-9} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$$

$$T_n = 24(b_2 + b_4 + b_6 + \dots + b_{2n}) = 24 \times \frac{\frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1 - \frac{1}{2}} = 24\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \dots\dots\dots 7分$$

$$T_n - \frac{48n}{2n+1} = 24 - \frac{24}{2^n} - \frac{48n}{2n+1} = \frac{24(2^n - 2n - 1)}{2^n(2n+1)}$$

于是确定 $T_n$ 与 $\frac{48n}{2n+1}$ 的大小关系等价于比较 $2^n$ 与 $2n+1$ 的大小

由 $2 < 2 \times 1 + 1$ ,  $2^2 < 2 \times 2 + 1$ ,  $2^3 > 2 \times 3 + 1$ ,  $2^4 > 2 \times 4 + 1$ , ...

可猜想当 $n \geq 3$ 时,  $2^n > 2n + 1$  .....9分

证明如下:

证法1: (1) 当 $n = 3$ 时, 由上验算可知成立.

(2) 假设 $n = k$ 时,  $2^k > 2k + 1$ ,

$$\text{则 } 2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2(2k + 1) = 4k + 2 = 2(k + 1) + 1 + (2k - 1) > 2(k + 1) + 1$$

所以当 $n = k + 1$ 时猜想也成立

根据(1) (2)可知, 对一切 $n \geq 3$ 的正整数, 都有 $2^n > 2n + 1$

$$\therefore \text{当 } n = 1, 2 \text{ 时, } T_n < \frac{48n}{2n+1}, \text{ 当 } n \geq 3 \text{ 时 } T_n > \frac{48n}{2n+1} \dots\dots\dots 12分$$

证法2: 当 $n \geq 3$ 时

$$2^n = (1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n \geq C_n^0 + C_n^1 + C_n^{n-1} + C_n^n = 2n + 2 > 2n + 1$$

$$\therefore \text{当 } n = 1, 2 \text{ 时, } T_n < \frac{48n}{2n+1}, \text{ 当 } n \geq 3 \text{ 时 } T_n > \frac{48n}{2n+1} \dots\dots\dots 12分$$

**21. (本小题满分12分)**

解: (1)  $\because f(x) = \ln(2+3x) - \frac{3}{2}x^2, \therefore y = f(x)$ 的定义域为 $\left(-\frac{2}{3}, +\infty\right)$ ;

由于  $f'(x) = -\frac{9(x+1)\left(x-\frac{1}{3}\right)}{3x+2}$  , 由  $f'(x)=0 \Rightarrow x=\frac{1}{3}$  ,

当  $x \in \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$  时,  $f'(x) > 0$  ; 当  $x \in \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$  时,  $f'(x) < 0$  .

$\therefore y=f(x)$  在  $\left[-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right]$  上为增函数; 在  $\left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$  上为减函数,

从而  $f(x)_{\text{极大}} = f\left(\frac{1}{3}\right) = \ln 3 - \frac{1}{6}$  . .....3分

$$(II) \Rightarrow g(x) = \ln(2+3x) + (m-1)x, \left(x > -\frac{2}{3}\right)$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{3}{2+3x} + m - 1 = \frac{3(m-1)x + 2m + 1}{2+3x}, \dots\dots\dots 4 \text{分}$$

① 当  $m-1=0$ , 即  $m=1$  时,  $g'(x) = \frac{3}{2+3x} > 0$  ,

$\therefore g(x)$  在  $\left(-\frac{2}{3}, +\infty\right)$  上为增函数; .....5分

分

$$\textcircled{2} \text{ 当 } m-1 \neq 0, \text{ 即 } m \neq 1 \text{ 时, } g'(x) = \frac{3(m-1)x + 2m + 1}{2+3x} = \frac{3(m-1)\left[x + \frac{2m+1}{3(m-1)}\right]}{2+3x} .$$

$$\text{由 } g'(x)=0 \Rightarrow x = -\frac{2m+1}{3(m-1)},$$

$$\therefore \left( -\frac{2m+1}{3(m-1)} \right) - \left( -\frac{2}{3} \right) = -\frac{1}{m-1},$$

$\therefore$  (i) 若  $m > 1$ , 则  $-\frac{2m+1}{3(m-1)} < -\frac{2}{3}$ ,  $\therefore x > -\frac{2}{3}$  时,  $g'(x) > 0$ ,

$\therefore g(x)$  在  $\left( -\frac{2}{3}, +\infty \right)$  上为增函数; ..... 7

分

(ii) 若  $m < 1$ , 则  $-\frac{2m+1}{3(m-1)} > -\frac{2}{3}$ ,

$x \in \left( -\frac{2}{3}, -\frac{2m+1}{3(m-1)} \right)$  时,  $g'(x) > 0$ ;  $x \in \left( -\frac{2m+1}{3(m-1)}, +\infty \right)$  时,  $g'(x) < 0$ ,

$\therefore g(x)$  在  $\left( -\frac{2}{3}, -\frac{2m+1}{3(m-1)} \right)$  上为增函数, 在  $\left( -\frac{2m+1}{3(m-1)}, +\infty \right)$  上为减函数.

综上所述: 当  $m \geq 1$  时,  $g(x)$  在  $\left( -\frac{2}{3}, +\infty \right)$  上为增函数;

当  $m < 1$  时,  $g(x)$  在  $\left( -\frac{2}{3}, -\frac{2m+1}{3(m-1)} \right)$  上为增函数, 在  $\left( -\frac{2m+1}{3(m-1)}, +\infty \right)$  上为减函数.

.....9分

(III) 由  $|a - \ln x| + \ln[f'(x) + 3x] > 0 \Rightarrow |a - \ln x| + \ln \frac{3}{2+3x} > 0$ ,

$\square x \in \left[ \frac{1}{6}, \frac{1}{3} \right], \therefore 0 \leq \ln \frac{3}{2+3x} \leq \ln \frac{6}{5}$ , 而  $|a - \ln x| \geq 0$ ,

∴ 要对任意  $x \in \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right]$ ，不等式  $|a - \ln x| + \ln[f'(x) + 3x] > 0$  均成立，必须：

$\ln \frac{3}{2+3x}$  与  $|a - \ln x|$  不同时为 0. ....11 分

因当且仅当  $x = \frac{1}{3}$  时， $\ln \frac{3}{2+3x} = 0$ ，所以为满足题意必有  $\left|a - \ln \frac{1}{3}\right| \neq 0$ ，

即  $a \neq \ln \frac{1}{3}$ . ....12 分

**22 . (本小题满分 14 分)**

解：(1) 设抛物线  $C_2: y^2 = 2mx (m \neq 0)$ ，则有  $\frac{y^2}{x} = 2m (x \neq 0)$ ，据此验证 4 个点知

$(3, -2\sqrt{3})$ 、 $(4, -4)$  在抛物线上，易求  $C_2: y^2 = 4x$  .....2 分

设  $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ ，把点  $(-2, 0)$   $(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$  代入得：

$$\begin{cases} \frac{4}{a^2} = 1 \\ \frac{2}{a^2} + \frac{1}{2b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 1 \end{cases}$$

∴  $C_1$  方程为  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  .....4 分

(II) 容易验证直线  $l$  的斜率不存在时，不满足题意；

当直线  $l$  斜率存在时，假设存在直线  $l$  过抛物线焦点  $F(1,0)$ ，设其方程为  $y = k(x-1)$ ，

与  $C_1$  的交点坐标为  $Q(x_1, y_1), R(x_2, y_2)$

$$\text{由} \begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ y = k(x-1) \end{cases} \text{消去 } y, \text{得 } (1+4k^2)x^2 - 8k^2x + 4(k^2-1) = 0,$$

$$\text{于是 } x_1 + x_2 = \frac{8k^2}{1+4k^2}, \quad x_1x_2 = \frac{4(k^2-1)}{1+4k^2} \dots\dots\dots \textcircled{1} \quad \dots\dots\dots 7 \text{分}$$

$$y_1y_2 = k(x_1-1) \times k(x_2-1) = k^2[x_1x_2 - (x_1+x_2) + 1]$$

$$\text{即 } y_1y_2 = k^2 \left( \frac{4(k^2-1)}{1+4k^2} - \frac{8k^2}{1+4k^2} + 1 \right) = -\frac{3k^2}{1+4k^2} \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

$$\text{由 } OQ \perp OR, \text{即 } OQ \cdot OR = 0, \text{得 } x_1x_2 + y_1y_2 = 0(*)$$

$$\text{将} \textcircled{1}、\textcircled{2} \text{代入 } (*) \text{式, 得 } \frac{4(k^2-1)}{1+4k^2} - \frac{3k^2}{1+4k^2} = \frac{k^2-4}{1+4k^2} = 0, \text{解得 } k = \pm 2;$$

所以存在直线  $l$  满足条件, 且  $l$  的方程为:  $y = 2x - 2$  或  $y = -2x + 2$  .....9分

(III) 设直线  $AM$  的斜率为  $k (k \neq 0)$ , 则  $AM : y = k(x+2)$ ,  $AN : y = -\frac{1}{k}(x+2)$

$$\text{则} \begin{cases} y = k(x+2), \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \end{cases} \text{化简得: } (1+4k^2)x^2 + 16k^2x + 16k^2 - 4 = 0.$$

$$\because \text{此方程有一根为 } -2, \therefore x_M = \frac{2-8k^2}{1+4k^2} \Rightarrow y_M = \frac{4k}{1+4k^2}$$

$$\text{同理可得 } x_N = \frac{2k^2-8}{k^2+4} \Rightarrow y_N = -\frac{4k}{k^2+4} \dots\dots\dots 11 \text{分}$$

$$\text{则 } k_{MN} = \frac{-\frac{4k}{k^2+4} - \frac{4k}{1+4k^2}}{\frac{2k^2-8}{k^2+4} - \frac{2-8k^2}{1+4k^2}} = -\frac{5k}{4(k^2-1)}$$

$$\text{所以 } MN \text{ 的直线方程为 } y - \frac{4k}{1+4k^2} = -\frac{5k}{4(k^2-1)}\left(x - \frac{2-8k^2}{1+4k^2}\right)$$

$$\text{令 } y=0, \text{ 则 } x = \frac{16k(k^2-1)}{5k(1+4k^2)} + \frac{2-8k^2}{1+4k^2} = -\frac{6}{5}.$$

所以直线  $MN$  过  $x$  轴上的一定点  $(-\frac{6}{5}, 0)$  .....14 分