北京市西城区2012年高三二模试卷

数　学（理科）

2012.5

第Ⅰ卷（选择题　共40分）

一、选择题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1．已知集合 $A=\{x\mid \log_2 x<1\}$，$B=\{x\mid 0<x<c$，其中 $c>0\}$．若 $A\cup B=B$，则 c 的取值范围是（　）

（A）$(0,1]$　　（B）$[1,+\infty)$　　（C）$(0,2]$　　（D）$[2,+\infty)$

2．执行如图所示的程序框图，若输入如下四个函数：

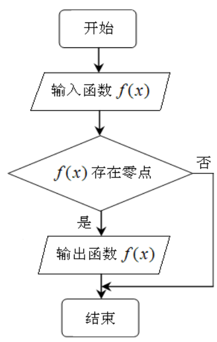
① $f(x)=\mathrm{e}^x$；　② $f(x)=-\mathrm{e}^x$；

③ $f(x)=x+x^{-1}$；　④ $f(x)=x-x^{-1}$．

则输出函数的序号为（　）

（A）①　　（B）②

（C）③　　（D）④



3．椭圆 $\begin{cases} x=3\cos\varphi \\ y=5\sin\varphi \end{cases}$（$\varphi$ 是参数）的离心率是（　）

（A）$\dfrac{3}{5}$　　（B）$\dfrac{4}{5}$　　（C）$\dfrac{9}{25}$　　（D）$\dfrac{16}{25}$

4．已知向量 $\boldsymbol{a}=(x,1)$，$\boldsymbol{b}=(-x,4)$，其中 $x\in\mathbf{R}$．则“$x=2$”是“$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$”的（　）

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充要条件　　（D）既不充分又不必要条件

5．右图是1，2两组各7名同学体重（单位：kg）数据的茎叶图．设1，2两组数据的平均数依次为$\overline{x_1}$和$\overline{x_2}$，标准差依次为s_1和s_2，那么（ ）

1组		2组
3 6 7 8	5	4 6 8
1	6	0 1
0 2	7	2 3

（注：标准差$s=\sqrt{\frac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2]}$，其中$\bar{x}$为$x_1, x_2, \cdots, x_n$的平均数）

(A) $\overline{x_1}>\overline{x_2}$，$s_1>s_2$　　(B) $\overline{x_1}>\overline{x_2}$，$s_1<s_2$

(C) $\overline{x_1}<\overline{x_2}$，$s_1<s_2$　　(D) $\overline{x_1}<\overline{x_2}$，$s_1>s_2$

6．已知函数$f(x)=kx+1$，其中实数k随机选自区间$[-2,1]$．对$\forall x\in[0,1]$，$f(x)\geq 0$的概率是（ ）

(A) $\frac{1}{3}$　　(B) $\frac{1}{2}$　　(C) $\frac{2}{3}$　　(D) $\frac{3}{4}$

7．某大楼共有12层，有11人在第1层上了电梯，他们分别要去第2至第12层，每层1人．因特殊原因，电梯只允许停1次，只可使1人如愿到达，其余10人都要步行到达所去的楼层．假设这10位乘客的初始“不满意度”均为0，乘客每向下步行1层的“不满意度”增量为1，每向上步行1层的“不满意度”增量为2，10人的“不满意度”之和记为S，则S的最小值是（ ）

(A) 42　　(B) 41　　(C) 40　　(D) 39

8．对数列$\{a_n\}$，如果$\exists k\in\mathbf{N}^*$及$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k\in\mathbf{R}$，使$a_{n+k}=\lambda_1 a_{n+k-1}+\lambda_2 a_{n+k-2}+\cdots+\lambda_k a_n$成立，其中$n\in\mathbf{N}^*$，则称$\{a_n\}$为$k$阶递归数列．给出下列三个结论：

① 若$\{a_n\}$是等比数列，则$\{a_n\}$为1阶递归数列；

② 若$\{a_n\}$是等差数列，则$\{a_n\}$为2阶递归数列；

③ 若数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=n^2$，则$\{a_n\}$为3阶递归数列．

其中，正确结论的个数是（ ）

(A) 0　　　　(B) 1　　　　(C) 2　　　　(D) 3

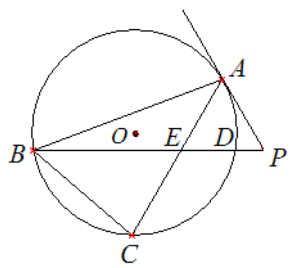
第Ⅱ卷（非选择题 共110分）

二、填空题共6小题，每小题5分，共30分.

9．在△ABC中，$BC=\sqrt{3}$，$AC=\sqrt{2}$，$A=\frac{\pi}{3}$，则$B=$_____．

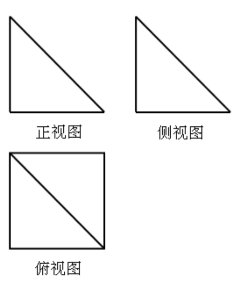
10．已知复数z满足$(1-\mathrm{i})\cdot z=1$，则$z=$_____．

11．如图，△ABC是⊙O的内接三角形，PA是⊙O的切线，PB交AC于点E，交⊙O于点D．若$PA=PE$，$\angle ABC=60^{\circ}$，$PD=1$，$PB=9$，则$PA=$_____；$EC=$_____．



12．已知函数$f(x)=x^2+bx+1$是$\mathbf{R}$上的偶函数，则实数$b=$_____；不等式$f(x-1)<|x|$的解集为_____．

13．一个几何体的三视图如图所示，其中正视图和侧视图是腰长为1的两个全等的等腰直角三角形，该几何体的体积是_____；若该几何体的所有顶点在同一球面上，则球的表面积是_____．



14．曲线C是平面内到定点$F(0,1)$和定直线$l:y=-1$的距离之和等于4的点的轨迹，给出

下列三个结论：

① 曲线C关于y轴对称；

② 若点$P(x,y)$在曲线C上，则$|y|\le 2$；

③ 若点P在曲线C上，则$1\le |PF|\le 4$.

其中，所有正确结论的序号是____________.

三、解答题共 6 小题，共 80 分. 解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

15．（本小题满分 13 分）

已知函数$f(x)=\cos^2(x-\frac{\pi}{6})-\sin^2 x$．

（Ⅰ）求$f(\frac{\pi}{12})$的值；

（Ⅱ）若对于任意的$x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，都有$f(x)\le c$，求实数c的取值范围．

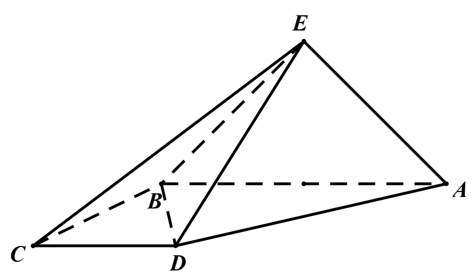
16．（本小题满分 14 分）

如图，直角梯形$ABCD$与等腰直角三角形ABE所在的平面互相垂直．$AB \parallel CD$，$AB\perp BC$，$AB=2CD=2BC$，$EA\perp EB$．

（Ⅰ）求证：$AB\perp DE$；

（Ⅱ）求直线EC与平面ABE所成角的正弦值；

（Ⅲ）线段EA上是否存在点F，使EC // 平面FBD？若存在，求出$\frac{EF}{EA}$；若不存在，说明理由．



17．（本小题满分 13 分）

甲、乙两人参加某种选拔测试．在备选的10道题中，甲答对其中每道题的概率都是$\frac{3}{5}$，乙能答对其中的5道题．规定每次考试都从备选的10道题中随机抽出3道题进行测试，答对一题加10分，答错一题（不答视为答错）减5分，至少得15分才能入选．

（Ⅰ）求乙得分的分布列和数学期望；

（Ⅱ）求甲、乙两人中至少有一人入选的概率．

18．（本小题满分 13 分）

已知抛物线$y^2=4x$的焦点为F，过点F的直线交抛物线于A，B两点．

（Ⅰ）若$\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$，求直线$AB$的斜率；

（Ⅱ）设点M在线段AB上运动，原点O关于点M的对称点为C，求四边形$OACB$面积的最小值．

19．（本小题满分 14 分）

已知函数$f(x)=\dfrac{2ax+a^2-1}{x^2+1}$，其中$a\in\mathbf{R}$．

（Ⅰ）当$a=1$时，求曲线$y=f(x)$在原点处的切线方程；

（Ⅱ）求$f(x)$的单调区间；

（Ⅲ）若$f(x)$在$[0,+\infty)$上存在最大值和最小值，求a的取值范围．

20．（本小题满分 13 分）

若$A_n=\overline{a_1a_2\cdots a_n}$ $(a_i=0$或$1, i=1,2,\cdots,n)$，则称A_n为0和1的一个n位排列．对于A_n，将排列$\overline{a_na_1a_2\cdots a_{n-1}}$记为$R^1(A_n)$；将排列$\overline{a_{n-1}a_na_1\cdots a_{n-2}}$记为$R^2(A_n)$；依此类推，直至$R^n(A_n)=A_n$．

对于排列A_n和$R^i(A_n)$ $(i=1,2,\cdots,n-1)$，它们对应位置数字相同的个数减去对应位

置数字不同的个数，叫做 A_n 和 $R^i(A_n)$ 的相关值，记作 $t(A_n, R^i(A_n))$．例如 $A_3=\overline{110}$，则

$R^1(A_3)=\overline{011}$，$t(A_3, R^1(A_3))=-1$．

若 $t(A_n, R^i(A_n))=-1\ (i=1,2,\cdots,n-1)$，则称 A_n 为最佳排列．

（Ⅰ）写出所有的最佳排列 A_3；

（Ⅱ）证明：不存在最佳排列 A_5；

（Ⅲ）若某个 A_{2k+1}（k 是正整数）为最佳排列，求排列 A_{2k+1} 中 1 的个数．

北京市西城区2012年高三二模试卷

数学（理科）参考答案及评分标准

2012.5

一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分.

1．D； 2．D； 3．B； 4．A； 5．C； 6．C； 7．C； 8．D．

二、填空题：本大题共6小题，每小题5分，共30分.

9．$\dfrac{\pi}{4}$； 10．$\dfrac{1}{2}+\dfrac{i}{2}$； 11．3，4；

12．0，$\{x\,|\,1<x<2\}$ 13．$\dfrac{1}{3}$，3π； 14．①②③．

注：11、12、13第一问2分，第二问3分；14题少填不给分.

三、解答题：本大题共6小题，共80分.

15．（本小题满分13分）

（Ⅰ）解：$f(\dfrac{\pi}{12})=\cos^2(-\dfrac{\pi}{12})-\sin^2\dfrac{\pi}{12}=\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$． ………………5分

（Ⅱ）解：$f(x)=\dfrac{1}{2}[1+\cos(2x-\dfrac{\pi}{3})]-\dfrac{1}{2}(1-\cos 2x)$ ………………7分

$=\dfrac{1}{2}[\cos(2x-\dfrac{\pi}{3})+\cos 2x]=\dfrac{1}{2}(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\dfrac{3}{2}\cos 2x)$ ………………8分

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})$. ………………9 分

因为 $x\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$，所以 $2x+\dfrac{\pi}{3}\in[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{4\pi}{3}]$， ………………10 分

所以当 $2x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$，即 $x=\dfrac{\pi}{12}$ 时，$f(x)$ 取得最大值 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. ………………11 分

所以 $\forall x\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$，$f(x)\le c$ 等价于 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\le c$.

故当 $\forall x\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$，$f(x)\le c$ 时，c 的取值范围是 $[\dfrac{\sqrt{3}}{2},+\infty)$. ………………13 分

16．（本小题满分 14 分）

（Ⅰ）证明：取 AB 中点 O，连结 EO，DO .

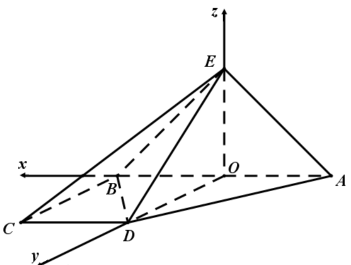
因为 $EB=EA$，所以 $EO\perp AB$. ………………1 分

因为四边形 $ABCD$ 为直角梯形，$AB=2CD=2BC$，$AB\perp BC$，

所以四边形 $OBCD$ 为正方形，所以 $AB\perp OD$. ……………2 分

所以 $AB\perp$ 平面 EOD . ………………3 分

所以 $AB\perp ED$. ………………4 分



（Ⅱ）解：因为平面 $ABE\perp$ 平面 $ABCD$，且 $EO\perp AB$，

所以 $EO\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $EO\perp OD$.

由 OB,OD,OE 两两垂直，建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$. …………5 分

因为三角形 EAB 为等腰直角三角形，所以 $OA=OB=OD=OE$，设 $OB=1$，所以 $O(0,0,0),A(-1,0,0),B(1,0,0),C(1,1,0),D(0,1,0),E(0,0,1)$.

所以 $\overrightarrow{EC}=(1,1,-1)$，平面 ABE 的一个法向量为 $\overrightarrow{OD}=(0,1,0)$. ………………7 分

设直线 EC 与平面 ABE 所成的角为 θ，

所以 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{EC},\overrightarrow{OD}\rangle|=\dfrac{|\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{OD}|}{|\overrightarrow{EC}||\overrightarrow{OD}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

即直线 EC 与平面 ABE 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. ………………9 分

（Ⅲ）解：存在点F，且$\frac{EF}{EA}=\frac{1}{3}$时，有$EC$//平面$FBD$． ………………10分

证明如下：由$\overrightarrow{EF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EA}=(-\frac{1}{3},0,-\frac{1}{3})$，$F(-\frac{1}{3},0,\frac{2}{3})$，所以$\overrightarrow{FB}=(\frac{4}{3},0,-\frac{2}{3})$．

设平面FBD的法向量为$\boldsymbol{v}=(a,b,c)$，则有$\begin{cases}\boldsymbol{v}\cdot\overrightarrow{BD}=0,\\ \boldsymbol{v}\cdot\overrightarrow{FB}=0.\end{cases}$

所以$\begin{cases}-a+b=0,\\ \frac{4}{3}a-\frac{2}{3}z=0.\end{cases}$取$a=1$，得$\boldsymbol{v}=(1,1,2)$． ………………12分

因为$\overrightarrow{EC}\cdot\boldsymbol{v}=(1,1,-1)\cdot(1,1,2)=0$，且$EC\not\subset$平面$FBD$，所以$EC$//平面$FBD$．

即点F满足$\frac{EF}{EA}=\frac{1}{3}$时，有$EC$//平面$FBD$． ………………14分

17．（本小题满分13分）

（Ⅰ）解：设乙答题所得分数为X，则X的可能取值为$-15,0,15,30$． ………………1分

$P(X=-15)=\frac{C_5^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{12}$；　$P(X=0)=\frac{C_5^2C_5^1}{C_{10}^3}=\frac{5}{12}$；

$P(X=15)=\frac{C_5^1C_5^2}{C_{10}^3}=\frac{5}{12}$；　$P(X=30)=\frac{C_5^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{12}$． ………………5分

乙得分的分布列如下：

X	-15	0	15	30
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$

………………6分

$EX=\frac{1}{12}\times(-15)+\frac{5}{12}\times0+\frac{5}{12}\times15+\frac{1}{12}\times30=\frac{15}{2}$． ………………7分

（Ⅱ）由已知甲、乙至少答对2题才能入选，记甲入选为事件A，乙入选为事件B．

则 $P(A)=C_3^2(\frac{3}{5})^2(\frac{2}{5})+(\frac{3}{5})^3=\frac{81}{125}$， ………………10分

$P(B)=\frac{5}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{2}$． ………………11分

故甲乙两人至少有一人入选的概率$P=1-P(\overline{A}\cdot\overline{B})=1-\frac{44}{125}\times\frac{1}{2}=\frac{103}{125}$． ……13分

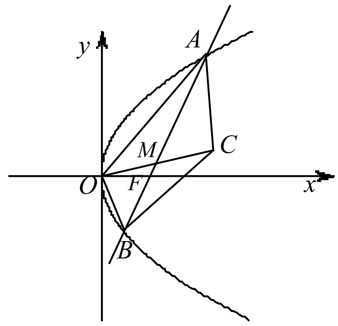
18．（本小题满分 13 分）

（Ⅰ）解：依题意 $F(1,0)$，设直线 AB 方程为 $x=my+1$． ………………1 分

将直线 AB 的方程与抛物线的方程联立，消去 x 得 $y^2-4my-4=0$． …………3 分

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，所以 $y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4$． ① ………………4 分

因为 $AF=2FB$，



所以 $y_1=-2y_2$． ② ………………5 分

联立①和②，消去 y_1,y_2，得 $m=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{4}$． ………6 分

所以直线 AB 的斜率是 $\pm2\sqrt{2}$． ………………7 分

（Ⅱ）解：由点 C 与原点 O 关于点 M 对称，得 M 是线段 OC 的中点，从而点 O 与点 C 到直线 AB 的距离相等，

所以四边形 $OACB$ 的面积等于 $2S_{\Delta AOB}$． ……………… 9 分

因为 $2S_{\Delta AOB}=2\times\dfrac{1}{2}\cdot|OF|\cdot|y_1-y_2|$ ………………10 分

$=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=4\sqrt{1+m^2}$， ………………12 分

所以 $m=0$ 时，四边形 $OACB$ 的面积最小，最小值是 4． ………………13 分

19.（本小题满分 14 分）

（Ⅰ）解：当 $a=1$ 时，$f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$，$f'(x)=-2\dfrac{(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$． ………………2 分

由 $f'(0)=2$，得曲线 $y=f(x)$ 在原点处的切线方程是 $2x-y=0$． …………3 分

（Ⅱ）解：$f'(x)=-2\dfrac{(x+a)(ax-1)}{x^2+1}$． ………………4 分

① 当 $a=0$ 时，$f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$．

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，在 $(-\infty,0)$ 单调递减． ………………5 分

当 $a \neq 0$，$f'(x) = -2a\dfrac{(x+a)(x-\frac{1}{a})}{x^2+1}$．

② 当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x_1=-a$，$x_2=\dfrac{1}{a}$，$f(x)$ 与 $f'(x)$ 的情况如下：

x	$(-\infty, x_1)$	x_1	(x_1, x_2)	x_2	$(x_2, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘	$f(x_1)$	↗	$f(x_2)$	↘

故 $f(x)$ 的单调减区间是 $(-\infty,-a)$，$(\dfrac{1}{a},+\infty)$；单调增区间是 $(-a,\dfrac{1}{a})$． ………7 分

③ 当 $a<0$ 时，$f(x)$ 与 $f'(x)$ 的情况如下：

x	$(-\infty, x_2)$	x_2	(x_2, x_1)	x_1	$(x_1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	$f(x_2)$	↘	$f(x_1)$	↗

所以 $f(x)$ 的单调增区间是 $(-\infty,\dfrac{1}{a})$；单调减区间是 $(-\dfrac{1}{a},-a)$，$(-a,+\infty)$．

………………9 分

（Ⅲ）解：由（Ⅱ）得，$a=0$ 时不合题意． ………………10 分

当 $a>0$ 时，由（Ⅱ）得，$f(x)$ 在 $(0,\dfrac{1}{a})$ 单调递增，在 $(\dfrac{1}{a},+\infty)$ 单调递减，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在最大值 $f(\dfrac{1}{a})=a^2>0$．

设 x_0 为 $f(x)$ 的零点，易知 $x_0=\dfrac{1-a^2}{2a}$，且 $x_0<\dfrac{1}{a}$．从而 $x>x_0$ 时，$f(x)>0$；$x<x_0$ 时，$f(x)<0$．

若 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上存在最小值，必有 $f(0)\leq 0$，解得 $-1\leq a\leq 1$．

所以 $a>0$ 时，若 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上存在最大值和最小值，a 的取值范围是 $(0,1]$．

………………12 分

当 $a<0$ 时，由（Ⅱ）得，$f(x)$ 在 $(0,-a)$ 单调递减，在 $(-a,+\infty)$ 单调递增，所以

$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在最小值 $f(-a)=-1$.

若 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上存在最大值，必有 $f(0)\geq 0$ ，解得 $a\geq 1$ ，或 $a\leq -1$.

所以 $a<0$ 时，若 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上存在最大值和最小值， a 的取值范围是 $(-\infty,-1]$.

综上， a 的取值范围是 $(-\infty,-1]\cup(0,1]$. ………………14分

20.（本小题满分13分）

（Ⅰ）解：最佳排列 A_3 为 $\overline{110}$ ， $\overline{101}$ ， $\overline{100}$ ， $\overline{011}$ ， $\overline{010}$ ， $\overline{001}$. ………………3分

（Ⅱ）证明：设 $A_5=\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ ，则 $R^1(A_5)=\overline{a_5a_1a_2a_3a_4}$ ，

因为 $t(A_5,R^1(A_5))=-1$ ，

所以 $|a_1-a_5|$ ， $|a_2-a_1|$ ， $|a_3-a_2|$ ， $|a_4-a_3|$ ， $|a_5-a_4|$ 之中有 2 个 0 ， 3 个 1 .

按 $a_5\to a_1\to a_2\to a_3\to a_4\to a_5$ 的顺序研究数码变化，由上述分析可知有 2 次数码不发生改变，有 3 次数码发生了改变．

但是 a_5 经过奇数次数码改变不能回到自身，

所以不存在 A_5 ，使得 $t(A_5,R^1(A_5))=-1$ ，

从而不存在最佳排列 A_5 . ………………7分

（Ⅲ）解：由 $A_{2k+1}=\overline{a_1a_2\cdots a_{2k+1}}\ (a_i=0$ 或 $1,i=1,2,\cdots,2k+1)$ ，得

$$R^1(A_{2k+1})=\overline{a_{2k+1}a_1a_2\cdots a_{2k}}\ ,$$

$$R^2(A_{2k+1})=\overline{a_{2k}a_{2k+1}a_1a_2\cdots a_{2k-1}}\ ,$$

……

$$R^{2k-1}(A_{2k+1})=\overline{a_3a_4\cdots a_{2k+1}a_1a_2}\ ,$$

$$R^{2k}(A_{2k+1})=\overline{a_2a_3\cdots a_{2k+1}a_1}.$$

因为 $t(A_{2k+1},R^i(A_{2k+1}))=-1\,(i=1,2,\cdots,2k)$，

所以 A_{2k+1} 与每个 $R^i(A_{2k+1})$ 有 k 个对应位置数码相同，有 $k+1$ 个对应位置数码不同，因此有

$$|a_1-a_{2k+1}|+|a_2-a_1|+\cdots+|a_{2k}-a_{2k-1}|+|a_{2k+1}-a_{2k}|=k+1,$$

$$|a_1-a_{2k}|+|a_2-a_{2k+1}|+\cdots+|a_{2k}-a_{2k-2}|+|a_{2k+1}-a_{2k-1}|=k+1,$$

……，

$$|a_1-a_3|+|a_2-a_4|+\cdots+|a_{2k}-a_1|+|a_{2k+1}-a_2|=k+1,$$

$$|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+\cdots+|a_{2k}-a_{2k+1}|+|a_{2k+1}-a_1|=k+1.$$

以上各式求和得，$S=(k+1)\times 2k$. ………………10 分

另一方面，S 还可以这样求和：设 $a_1,a_2,...,a_{2k},a_{2k+1}$ 中有 x 个 0，y 个 1，则

$S=2xy$.

………………11 分

所以 $\begin{cases}x+y=2k+1,\\2xy=2k(k+1).\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=k,\\y=k+1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=k+1,\\y=k.\end{cases}$

所以排列 A_{2k+1} 中 1 的个数是 k 或 $k+1$. ………………13 分