2011年普通高等学校招生全国统一考试（安徽卷）

数学（理科）

本试题分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分，其中第Ⅰ卷第1至第2页，第Ⅱ卷第3页至第4页。全卷满分150分，考试时间120分钟。

考生注意事项：

1、答题前，务必在试题卷，答题卡规定的地方填写自己的姓名、座位号，并认真核对答题卡上粘贴的条形码中姓名、座位号与本人姓名、座位号是否一致。务必在答题卡背面规定的地方填写姓名和座位号后两位。

1、答第Ⅰ卷时，每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案的标号。

2、答Ⅱ卷时，必须使用0.5毫米的黑色墨水签字笔在答题卡上书写，要求字体工整、笔记清晰。作图题可先用铅笔在答题卡规定的位置绘出，确认后在用0.5毫米的黑色墨水签字笔描清楚。必须在题号所指示的答题区域作答，超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上答题无效。

3、考试结束，务必将试题卷和答题卡一并上交。

参考公式：

如果事件A与B互斥，那么　　锥体积V=$\frac{1}{3}$Sh, 其中S为锥体的底面面积，

P(A+B)=P(A)+P(B)　　h为锥体的高

如果事件A与B相互独立，那么

P(AB)=P(A)P(B)

第Ⅰ卷（选择题 共50分）

一、　选择题：本大题共10小题，每小题5分，共50分，在每小题给出的四个选项中只有一项是符合题目要求的。

（1）设i是虚数单位，复数$\frac{i+ai}{2-i}$为纯虚数，则实数a为

（A）2　　（B）-2　　（C）$-\frac{1}{2}$　　（D）$\frac{1}{2}$

（2）双曲线 $2x^2-y^2=8$ 的实轴长是

（A） 2　　（B） $2\sqrt{2}$　　（C） 4　　（D） $4\sqrt{2}$

（3）设 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，当 $x\le 0$ 时，$f(x)=2x^2-x$，则 $f(1)=$

（A）－3　　（B）－1　　（C）1　　（D）3

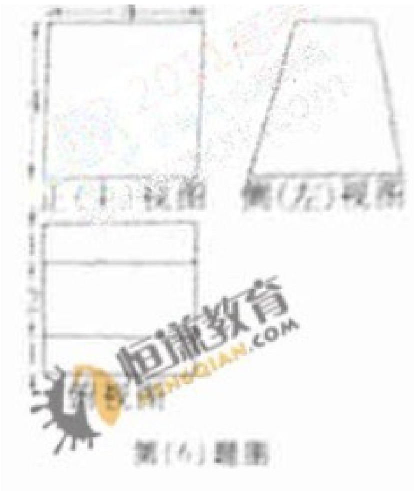
（4）设变量 x,y 满足 $|x|+|y|\le 1,$ 则 $x+2y$ 的最大值和最小值分别为

（A）1，－1　　（B）2，－2　　（C）1，－2　　（D）2，－1

(5) $\frac{\pi}{3}$ 到圆 $\rho=2\cos\theta$ 的圆心的距离为

（A）2　　(B) $\sqrt{4+\frac{\pi^2}{9}}$　　(C) $\sqrt{1+\frac{\pi^2}{9}}$　　（D） $\sqrt{3}$

（6）一个空间几何体得三视图如图所示，则该几何体的表面积为


第(6)题图

（A）48

（B）32+8,17

（C）48+8,17

（D）50

(7)命题“所有能被 2 整除的数都是偶数”的否定是

（A）所有不能被 2 整除的数都是偶数

（B）所有能被 2 整除的数都不是偶数

（C）存在一个不能被 2 整除的数都是偶数

（D）存在一个不能被 2 整除的数都不是偶数

（8）设集合 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$，$B=\{4,5,6,7\}$，则满足 $S\subseteq A$ 且 $S\cap B\neq Z$ 的集合 S 为

（A）57　（B）56　（C）49　（D）8

（9）已知函数 $f(x)=\sin(2x+\phi)$ 为实数，若 $f(x)\leq\left|f(\frac{\pi}{6})\right|$ 对 $x\in R$ 恒成立，

且 $\left|f(\frac{\pi}{2})\right|>f(\pi)$，则 $f(x)$ 的单调递增区间是

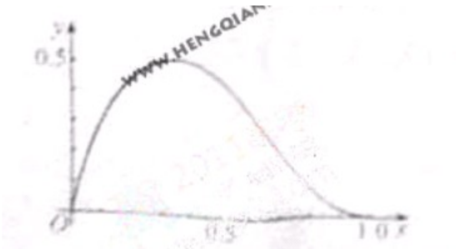
（A）$\left\{k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{\pi}{6}\right\}(k\in Z)$　（B）$\left\{k\pi,k\pi+\frac{\pi}{2}\right\}(k\in Z)$

（C）$\left\{k\pi+\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{2\pi}{3}\right\}(k\in Z)$　（D）$\left\{k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi\right\}(k\in Z)$

（10）函数 $f(x)=nx^m(1-x)^n$ 在区间 $[0,1]$ 上的图像如图所示，则 m,n 得知可能是

（A）$m=1,n=1$　(B) $m=1,n=2$

(C) $m=2,n=1$　(D) $m=3,n=1$



第(10)题图

第Ⅱ卷（非选择题 共 100 分）

考生注意事项：

请用 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上作答，在试题卷上答题无效。

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分，把答案填在答题卡的相应位置

（**11**）如图所示，程序框图（算法流程图）的输出结果是__________

（**12**）设 $(x-1)^{21}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{21}x^{21}$，则 $a_{10}+a_{11}=$ __________

（**13**）已知向量 a、b 满足 $(a+2b)\cdot(a-b)=-6$，且 $|a|=1$，$|b|=2$，则 a 与 b 的夹角为________

____

（**14**）已知ΔABC 的一个内角为 120°，并且三边长构成公差为 4 的等差数列，则ΔABC的面积为________________

（**15**）在平面直角坐标系中，如果x与？？？就称点(x,y)？？题中正确的是______________（写出所有正确命题的编号）.

① 存在这样的直线，既不与坐标轴平行又不经过任何整点

② 如果k与b都是无理数，则直线$y=kx+b$不经过任何整点

③ 直线l经过无穷多个整点，当且仅当l经过两个不同的整点

④ 直线$y=kx+b$经过无穷多个整点的充分必要条件是：k与b都是有理数

⑤ 存在恰经过一个整点的直线

三、解答题。本小题共 6 小题，共 75 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.解答写在答题卡上的指定区域内。

（16）（本小题满分 12 分）

** $f(x)=\dfrac{e^{*}}{1+ax}$ *，其中a为正实数

（Ⅰ）当$a=\dfrac{4}{3}$时，求$f(x)$的极值点；

（Ⅱ）若$f(x)$为R上的单调函数，求a的取值范围。

（17）（本小题满分 12 分）

如图，$ABCDEFG$为多面体，平面$ABED$与平面CFD垂直，点O在线段AD上，$OA=1,OD=2,$ △OAC，△ODE，△GDE都是正三角形。

（Ⅰ）证明直线$BC \parallel EF$；

（Ⅱ）求棱锥$F—GBED$的体积。

（18）（本小题满分 13 分）

在 n+2 数列中，加入 n 个实数，使得这 n+2 个数构成递增的等比数列，将这 n+2 个数，令

$a_n = \lg T_{n=1}$ ’ $n \ge 1$

（Ⅰ）求数列 $\{a_n\}$ 的等项公式；

（Ⅱ）设求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 s_n.

（19）（本小题满分 12 分）

（Ⅰ）设 $x \ge 3, y \ge 1,$ 证明

$$x + y + \frac{1}{y} + \frac{1}{x} \ge y + 1$$

（Ⅱ）$1 \le a \le b \le c$ ，证明

$$\log_a b + \log bc + \log_c a \le \log_b a + \log_c b + \log_a c$$

（20）（本小题满分 13 分）

工作人员需进入核电站完成某项具有高辐射危险的任务，每次只派一个人进去，且每个人只需一次，工作时间不超过 10 分钟，如果有一个人 10 分钟内不能完成任务则撤出，再派下一个人。现在一共只有甲、乙、丙一个人可派，他们各自能完成任务的概率分别 p_1，p_2，p_3,假设 p_1，p_2，p_3,互相相等，且规定各人能否完成任务的事件相互独立.

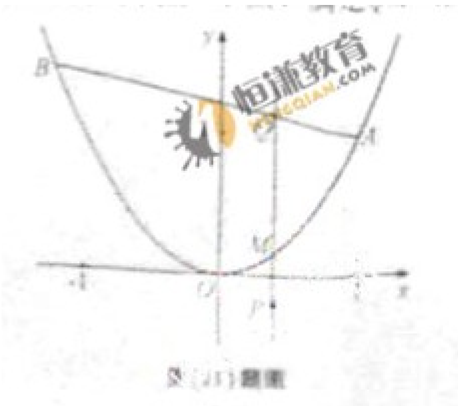
（Ⅰ）如果按甲在先，乙次之，丙最后的顺序派人，球任务能被完成的概率。若改变三个人被派出的先后顺序，任务能被完成的概率是否发生变化？

（Ⅱ）若按某指定顺序派人，这三个人各自能完成任务的概率依次为 q_1,q_2,q_3，其中 q_1,q_2,q_3 是 p_1，p_2，p_3 的一个排列，求所需要派出人员数目 X 的分布列和均值（数字期望）EX；

（Ⅲ）假定 $l > p_1 > p_2 > p_3$，试分析以怎样的先后顺序派出人员，可使所需派出的人员数目的均值（数字期望）达到最小。

（21）（本小题满分 13 分）

若 A=0，点 A 的坐标为（1,1），点 B 在抛物线 y=x 上运动，点 Q 满足 $\overrightarrow{BQ}=\lambda\overrightarrow{QA}$，经过点 Q 与 x 轴垂直的直线交抛物线于点 M，点 P 满足 $\overrightarrow{QM}=\lambda\overrightarrow{MP}$,求点 P 的轨迹方程。



(21)（本小题满分13分）

某品酒师需定期接受酒味鉴别功能测试，一种通常采用的测试方法如下：拿出 n 瓶外观相同但品质不同的酒让其品尝，要求其按品质优劣为它们排序；经过一段时间，等其记忆淡忘之后，再让其品尝这 n 瓶酒，并重新按品质优劣为它们排序，这称为一轮测试。根据一轮测试中的两次排序的偏离程度的高低为其评分。

现设 $n=4$，分别以 a_1, a_2, a_3, a_4 表示第一次排序时被排为1，2，3，4的四种酒在第二次排序时的序号，并令

$$X=|1-a_1|+|2-a_2|+|3-a_3|+|4-a_4|,$$

则 X 是对两次排序的偏离程度的一种描述。

（Ⅰ）写出 X 的可能值集合；

（Ⅱ）假设 a_1, a_2, a_3, a_4 等可能地为1，2，3，4的各种排列，求 X 的分布列；

（Ⅲ）某品酒师在相继进行的三轮测试中，都有 $X\le 2$，

(i) 试按（Ⅱ）中的结果，计算出现这种现象的概率（假定各轮测试相互独立）；

(ii) 你认为该品酒师的酒味鉴别功能如何？说明理由。

数学（理科）试题参考答案

一、选择题：本题考查基本知识和基本运算。每小题5分，满分50分。

(1) B	(2) A	(3) C	(4) A	(5) C
(6) D	(7) B	(8) C	(9) D	(10) D

二、填空题：本题考查基本知识和基本运算。每小题5分，满分25分。

(11) 存在 $x\in\mathbf{R}$，使得 $|x-2|+|x-4|\le 3$　　(12) 15（若只写 C_6^4 或 C_6^2 也可）

(13) 4　　(14) 12　　(15) ②⑤

三、解答题：本大题共6小题，共75分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(16)（本小题满分12分）本题考查两角和的正弦公式，同角三角函数的基本关系，特殊角的三角函数值，向量的数量积，利用余弦定理解三角形等有关知识，考查综合运算求解能力。

解：（Ⅰ）因为 $\sin^2 A=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\frac{1}{2}\sin B\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B-\frac{1}{2}\sin B\right)+\sin^2 B$

$$=\frac{3}{4}\cos^2 B-\frac{1}{4}\sin^2 B+\sin^2 B=\frac{3}{4},$$

所以 $\sin A=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$。又 A 为锐角，所以 $A=\frac{\pi}{3}$。

（Ⅱ）由 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=12$ 可得

$$cb\cos A=12. \qquad ①$$

由（Ⅰ）知 $A=\frac{\pi}{3}$，所以

$$cb=24. \qquad ②$$

由余弦定理知 $a^2=c^2+b^2-2cb\cos A$，将 $a=2\sqrt{7}$ 及①代入，得

$$c^2+b^2=52, \qquad ③$$

③+②×2，得 $(c+b)^2=100$，所以

$$c+b=10.$$

因此，c，b 是一元二次方程 $t^2-10t+24=0$ 的两个根。

解此方程并由 $c>b$ 知 $c=6$，$b=4$。

(17)（本小题满分12分）本题考查导数的运算，利用导数研究函数的单调区间，求函数的极值和证明函数不等式，考查运算能力、综合分析和解决问题的能力。

（Ⅰ）解：由 $f(x)=e^x-2x+2a$，$x\in\mathbf{R}$ 知 $f'(x)=e^x-2$，$x\in\mathbf{R}$。

令 $f'(x)=0$，得 $x=\ln 2$。于是当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,\ln 2)$	$\ln 2$	$(\ln 2,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	单调递减 ↘	$2(1-\ln 2+a)$	单调递增 ↗

故 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(-\infty,\ln 2)$，单调递增区间是 $(\ln 2,+\infty)$，

$f(x)$ 在 $x=\ln 2$ 处取得极小值，极小值为 $f(\ln 2)=e^{\ln 2}-2\ln 2+2a=2(1-\ln 2+a)$。

（Ⅱ）证：设 $g(x)=e^x-x^2+2ax-1$，$x\in\mathbf{R}$，于是 $g'(x)=e^x-2x+2a$，$x\in\mathbf{R}$。

由（Ⅰ）知当 $a>\ln 2-1$ 时，$g'(x)$ 最小值为 $g'(\ln 2)=2(1-\ln 2+a)>0$。

于是对任意 $x\in\mathbf{R}$，都有 $g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 内单调递增。

于是当 $a>\ln 2-1$ 时，对任意 $x\in(0,+\infty)$，都有 $g(x)>g(0)$。

而 $g(0)=0$，从而对任意 $x\in(0,+\infty)$，$g(x)>0$。

即 $e^x-x^2+2ax-1>0$，故 $e^x>x^2-2ax+1$。

(18)（本小题满分13分）本题考查空间线面平行，线面垂直，面面垂直的判断与证明，考查二面角的求法以及利用向量知识解决几何问题的能力，同时考查空间想象能力，推理论证能力和运算能力。

[综合法]（Ⅰ）证：设 AC 与 BD 交于点 G，则 G 为 AC 的中点，连 EG，GH，

又 H 为 BC 的中点，$\therefore GH \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}AB$，又 $EF \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}AB$，$\therefore EF \mathrel{\underline{\parallel}} GH$。

∴ 四边形 $EFHG$ 为平行四边形，

$\therefore EG\parallel FH$，而 $EG\subset$ 平面 EDB，$\therefore FH\parallel$ 平面 EDB。

（Ⅱ）证：由四边形 $ABCD$ 为正方形，有 $AB\perp BC$，又 $EF\parallel AB$，

$\therefore EF\perp BC$。

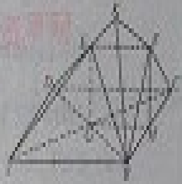
而 $EF\perp FB$，$\therefore EF\perp$ 平面 BFC，$\therefore EF\perp FH$，$\therefore AB\perp FH$。

又 $BF=FC$，H 为 BC 的中点，$\therefore FH\perp BC$。

$\therefore FH\perp$ 平面 $ABCD$，$\therefore FH\perp AC$。

又 $FH\parallel EG$，$\therefore AC\perp EG$。

又 $AC\perp BD$，$EG\cap BD=G$，$\therefore AC\perp$ 平面 EDB。



第(18)题综合法用图

（Ⅲ）解：$EF\perp FB$，$\angle BFC=90°$，$\therefore BF\perp$ 平面 $CDEF$。

在平面 $CDEF$ 内过点 F 作 $FK\perp DE$ 交 DE 的延长线于 K，

则 $\angle FKB$ 为二面角 $B-DE-C$ 的一个平面角。

设 $EF=1$，则 $AB=2$，$FC=\sqrt{2}$，$DE=\sqrt{3}$，

又 $EF\parallel DC$，$\therefore \angle KEF=\angle EDC$，$\therefore \sin\angle EDC=\sin\angle KEF=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$。

$\therefore FK=EF\sin\angle KEF=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$，$\tan\angle FKB=\frac{BF}{FK}=\sqrt{3}$，$\therefore \angle FKB=60°$。

∴ 二面角 $B-DE-C$ 为 $60°$。

[向量法]：

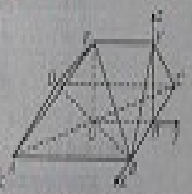
∵ 四边形 $ABCD$ 为正方形，$\therefore AB\perp BC$，又 $EF\parallel AB$，$\therefore EF\perp BC$。

又 $EF\perp FB$，$\therefore EF\perp$ 平面 BFC。

$\therefore EF\perp FH$，$\therefore AB\perp FH$。

又 $BF=FC$，H 为 BC 的中点，$\therefore FH\perp BC$，$\therefore FH\perp$ 平面 ABC。

以 H 为坐标原点，$\overrightarrow{HB}$ 为 x 轴正向，$\overrightarrow{HF}$ 为 z 轴正向，建立如图所示坐标系。



第(18)题向量法用图

设 $BH=1$，则 $A(1,-2,0)$，$B(1,0,0)$，$C(-1,0,0)$，

$D(-1,-2,0)$，$E(0,-1,1)$，$F(0,0,1)$。

（Ⅰ）证：设 AC 与 BD 的交点为 G，连 GE，GH，

则 $G(0,-1,0)$，$\therefore \overrightarrow{GE}=(0,0,1)$，又 $\overrightarrow{HF}=(0,0,1)$，

$\therefore \overrightarrow{HF}\parallel\overrightarrow{GE}$。

$GE\subset$ 平面 EDB，HF 不在平面 EDB 内，$\therefore FH\parallel$ 平面 EBD。

（Ⅱ）证：$\overrightarrow{AC}=(-2,2,0)$，$\overrightarrow{GE}=(0,0,1)$，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{GE}=0$，$\therefore AC\perp GE$。

又 $AC\perp BD$，$EG\cap BD=G$，$\therefore AC\perp$ 平面 EDB。

（Ⅲ）解：$\overrightarrow{BE}=(-1,-1,1)$，$\overrightarrow{BD}=(-2,-2,0)$。

设平面 BDE 的法向量为 $n_1=(1,y_1,z_1)$，

则 $\overrightarrow{BE}\cdot n_1=-1-y_1+z_1=0$，$\overrightarrow{BD}\cdot n_1=-2-2y_1=0$，

$\therefore y_1=-1$，$z_1=0$，即 $n_1=(1,-1,0)$。

$\overrightarrow{CD}=(0,-2,0)$，$\overrightarrow{CE}=(1,-1,1)$.

设平面 CDE 的法向量为 $n_2=(1,y_2,z_2)$，则 $n_2\cdot\overrightarrow{CD}=0$，$y_2=0$.

$n_2\cdot\overrightarrow{CE}=0$，$1-y_2+z_2=0$，$z_2=-1$.

故 $n_2=(1,0,-1)$.

$$\cos\langle n_1,n_2\rangle=\frac{n_1\cdot n_2}{|n_1|\cdot|n_2|}=\frac{1}{\sqrt2\cdot\sqrt2}=\frac12.$$

$\therefore\langle n_1,n_2\rangle=60^\circ$，即二面角 $B-DE-C$ 为 60°.

(19)（本小题满分13分）本题考查椭圆的定义及标准方程，椭圆的简单几何性质，直线的点斜式方程与一般方程，点到直线的距离公式，点关于直线的对称等基础知识；考查解析几何的基本思想、综合运算能力、探究意识与创新意识.

解：（Ⅰ）设椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

由 $e=\frac12$，即 $\frac{c}{a}=\frac12$，$a=2c$，得 $b^2=a^2-c^2=3c^2$.

$\therefore$ 椭圆方程具有形式 $\frac{x^2}{4c^2}+\frac{y^2}{3c^2}=1$.

将 $A(2,3)$ 代入上式，得 $\frac{1}{c^2}+\frac{3}{c^2}=1$，解得 $c=2$，

$\therefore$ 椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$.

（Ⅱ）解法1：由（Ⅰ）知 $F_1(-2,0)$，$F_2(2,0)$，所以

直线 AF_1 的方程为 $y=\frac34(x+2)$，即 $3x-4y+6=0$. 直线 AF_2 的方程为 $x=2$.

由点 A 在椭圆 E 上的位置知，直线 l 的斜率为正数.

设 $P(x,y)$ 为 l 上任一点，则

$$\frac{|3x-4y+6|}{5}=|x-2|.$$

若 $3x-4y+6=5x-10$，得 $x+2y-8=0$（因其斜率为负，舍去）.

于是，由 $3x-4y+6=-5x+10$ 得 $2x-y-1=0$，

所以直线 l 的方程为 $2x-y-1=0$.

解法2：

$\because A(2,3)$，$F_1(-2,0)$，$F_2(2,0)$，$\therefore\overrightarrow{AF_1}=(-4,-3)$，$\overrightarrow{AF_2}=(0,-3)$.

$\therefore\frac{\overrightarrow{AF_1}}{|\overrightarrow{AF_1}|}+\frac{\overrightarrow{AF_2}}{|\overrightarrow{AF_2}|}=\frac15(-4,-3)+\frac13(0,-3)=-\frac45(1,2)$.

$\therefore k_l=2$，$\therefore l:y-3=2(x-1)$，即 $2x-y-1=0$.

（Ⅲ）解法1：

假设存在这样的两个不同的点 $B(x_1,y_1)$ 和 $C(x_2,y_2)$，

$\because BC\perp l$，$\therefore k_{BC}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\frac12$.

设 BC 的中点为 $M(x_0,y_0)$，则 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$，$y_0=\frac{y_1+y_2}{2}$.

由于 M 在 l 上，故 $2x_0-y_0-1=0$. ①

又 B，C 在椭圆上，所以有 $\frac{x_1^2}{16}+\frac{y_1^2}{12}=1$ 与 $\frac{x_2^2}{16}+\frac{y_2^2}{12}=1$.

两式相减，得 $\frac{x_2^2-x_1^2}{16}+\frac{y_2^2-y_1^2}{12}=0$，即 $\frac{(x_1+x_2)(x_2-x_1)}{16}+\frac{(y_1+y_2)(y_2-y_1)}{12}=0$.

将该式写为 $\frac18\cdot\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\frac16\cdot\frac{y_1+y_2}{2}=0$，并将直线 BC 的斜率 k_{BC} 和线段 BC 的中点表示代入该表达式中，得 $\frac18x_0-\frac1{12}y_0=0$，即 $3x_0-2y_0=0$. ②

①×2－②得 $x_0=2$，$y_0=3$，即 BC 的中点为点 A，而这是不可能的.

$\therefore$ 不存在满足题设条件的点 B 和 C.

解法2：

假设存在 $B(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$ 两点关于直线 l 对称，则 $l\perp BC$，$\therefore k_{BC}=-\frac12$.

设直线 BC 的方程为 $y=-\frac12x+m$，将其代入椭圆方程 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$，

得一元二次方程 $3x^2+4\left(-\frac12x+m\right)^2=48$，即 $x^2-mx+m^2-12=0$.

则 x_1 与 x_2 是该方程的两个根.

由韦达定理得 $x_1+x_2=m$，

于是 $y_1+y_2=-\frac12(x_1+x_2)+2m=\frac{3m}{2}$.

$\therefore B$，C 的中点坐标为 $\left(\frac m2,\frac{3m}{4}\right)$.

又线段 BC 的中点在直线 $y=2x-1$ 上，$\therefore\frac{3m}{4}=m-1$，得 $m=4$.

即 B，C 的中点坐标为 $(2,3)$，与点 A 重合，矛盾.

$\therefore$ 不存在满足题设条件的相异两点.

(20)（本小题满分12分）本题考查等差数列、数学归纳法与充要条件等有关知识，考查推理论证、运算求解能力.

证：先证必要性.

设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d. 若 $d=0$，则所述等式显然成立.

若 $d\neq0$，则

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_na_{n+1}}$$

$$=\frac1d\left(\frac{a_2-a_1}{a_1a_2}+\frac{a_3-a_2}{a_2a_3}+\cdots+\frac{a_{n+1}-a_n}{a_na_{n+1}}\right)$$

$$=\frac1d\left(\left(\frac1{a_1}-\frac1{a_2}\right)+\left(\frac1{a_2}-\frac1{a_3}\right)+\cdots+\left(\frac1{a_n}-\frac1{a_{n+1}}\right)\right)$$

$$=\frac1d\left(\frac1{a_1}-\frac1{a_{n+1}}\right)=\frac1d\cdot\frac{a_{n+1}-a_1}{a_1a_{n+1}}$$

$$=\frac{n}{a_1a_{n+1}}.$$

再证充分性.

证法1：（数学归纳法）设所述的等式对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立. 首先，在等式

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}=\frac{2}{a_1a_3} \qquad ①$$

两端同乘 $a_1a_2a_3$，即得 $a_1+a_3=2a_2$，所以 a_1，a_2，a_3 成等差数列，记公差为 d，则 $a_2=a_1+d$.

假设 $a_k=a_1+(k-1)d$，当 $n=k+1$ 时，观察如下二等式

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{k-1}a_k}=\frac{k-1}{a_1a_k}, \qquad ②$$

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{k-1}a_k}+\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\frac{k}{a_1a_{k+1}}. \qquad ③$$

将②代入③，得

$$\frac{k-1}{a_1a_k}+\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\frac{k}{a_1a_{k+1}},$$

在该式两端同乘 $a_1a_ka_{k+1}$，得 $(k-1)a_{k+1}+a_1=ka_k$.

将 $a_k=a_1+(k-1)d$ 代入其中，整理后，得 $a_{k+1}=a_1+kd$.

由数学归纳法原理知，对一切 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_n=a_1+(n-1)d$. 所以 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列.

证法2：（直接证法）依题意有

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{n}{a_1a_{n+1}},\qquad ①$$

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_na_{n+1}}+\frac{1}{a_{n+1}a_{n+2}}=\frac{n+1}{a_1a_{n+2}}\qquad ②$$

②-①得

$$\frac{1}{a_{n+1}a_{n+2}}=\frac{n+1}{a_1a_{n+2}}-\frac{n}{a_1a_{n+1}}.$$

在上式两端同乘 $a_1a_{n+1}a_{n+2}$，得 $a_1=(n+1)a_{n+1}-na_{n+2}$. ③

同理可得 $a_1=na_n-(n-1)a_{n+1}$. ④

③-④得 $2na_{n+1}=n(a_{n+2}+a_n)$，

即 $a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$，所以 $\{a_n\}$ 是等差数列.

(21)（本小题满分13分）本题考查离散型随机变量及其分布列，考查在复杂场合下进行计数的能力，通过设置密切贴近生产、生活实际的问题情境，考查概率思想在现实生活中的应用，考查抽象概括能力、应用与创新意识.

解：（Ⅰ）X 的可能值集合为 $\{0,2,4,6,8\}$.

在1，2，3，4中奇数与偶数各有两个，所以 a_2,a_4 中的奇数个数等于 a_1,a_3 中的偶数个数，因此 $|1-a_1|+|3-a_3|$ 与 $|2-a_2|+|4-a_4|$ 的奇偶性相同，从而 $X=(|1-a_1|+|3-a_3|)+(|2-a_2|+|4-a_4|)$ 必为偶数.

X 的值非负，且易知其值不大于8.

容易举出使得 X 的值等于0，2，4，6，8各值的排列的例子.

（Ⅱ）可用列表或树状图列出1，2，3，4的一共24种排列，计算每种排列下的 X 值，在等可能的假定下，得

X	0	2	4	6	8
P	$\frac{1}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{9}{24}$	$\frac{4}{24}$

（Ⅲ）（i）首先 $P(X\le 2)=P(X=0)+P(X=2)=\frac{4}{24}=\frac{1}{6}$，将三轮测试都有 $X\le 2$ 的概率记做 p，由上述结果和独立性假设，得

$$p=\frac{1}{6^3}=\frac{1}{216}.$$

（ii）由于 $p=\frac{1}{216}<\frac{5}{1000}$ 是一个很小的概率，这表明如果仅凭随机猜测得到三轮测试都有 $X\le 2$ 的结果的可能性很小，所以我们认为该品酒师确实有良好的味觉鉴别功能，不是靠随机猜测.

数　学（文科）试题

第Ⅰ卷（选择题　共50分）

一、选择题：本大题共10小题，每小题5分，共50分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

(1) 若 $A=\{x\mid x+1>0\}$，$B=\{x\mid x-3<0\}$，则 $A\cap B=$

(A) $(-1,+\infty)$　(B) $(-\infty,3)$　(C) $(-1,3)$　(D) $(1,3)$

(2) 已知 $i^2=-1$，则 $i(1-\sqrt{3}i)=$

(A) $\sqrt{3}-i$　(B) $\sqrt{3}+i$　(C) $-\sqrt{3}-i$　(D) $-\sqrt{3}+i$

(3) 设向量 $\boldsymbol{a}=(1,0)$，$\boldsymbol{b}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，则下列结论中正确的是

(A) $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$　(B) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{\sqrt{2}}{2}$　(C) $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$　(D) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直

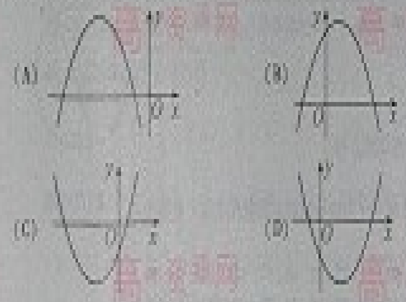
(4) 过点 $(1,0)$ 且与直线 $x-2y-2=0$ 平行的直线方程是

(A) $x-2y-1=0$　(B) $x-2y+1=0$　(C) $2x+y-2=0$　(D) $x+2y-1=0$

(5) 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=n^2$，则 a_8 的值为

(A) 15　(B) 16　(C) 49　(D) 64

(6) 设 $abc>0$，二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的图象可能是



(7) 设 $a=\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{2}{5}}$，$b=\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{3}{5}}$，$c=\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{5}}$，则 a,b,c 的大小关系是

(A) $a>c>b$　(B) $a>b>c$　(C) $c>a>b$　(D) $b>c>a$

(8) 设 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}2x+y-6\ge 0,\\ x+2y-6\le 0,\\ y\ge 0,\end{cases}$ 则目标函数 $z=x+y$ 的最大值是

(A) 3　(B) 4　(C) 6　(D) 8

(9) 一个几何体的三视图如图，该几何体的表面积是

(A) 372　(B) 360

(C) 292　(D) 280

第(9)题图

(10) 甲从正方形四个顶点中任意选择两个顶点连成直线，乙也从该正方形四个顶点中任意选择两个顶点连成直线，则所得的两条直线相互垂直的概率是

(A) $\frac{3}{18}$　(B) $\frac{4}{18}$

(C) $\frac{5}{18}$　(D) $\frac{6}{18}$

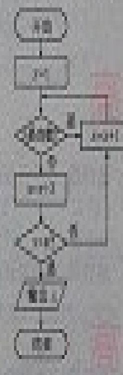
第Ⅱ卷（非选择题　共100分）

二、填空题：本大题共5小题，每小题5分，共25分. 把答案填在答题卡的相应位置.

(11) 命题"存在 $x\in\mathbf{R}$，使得 $x^2+2x+5=0$"的否定是________.

(12) 抛物线 $y^2=8x$ 的焦点坐标是________.

(13) 如图所示，程序框图（算法流程图）的输出值 $x=$________.



第(13)题图

(14) 某地有居民100 000户，其中普通家庭99 000户，高收入家庭1 000户. 从普通家庭中以简单随机抽样方式抽取990户，从高收入家庭中以简单随机抽样方式抽取100户进行调查，发现共有120户家庭拥有3套或3套以上住房，其中普通家庭50户，高收入家庭70户. 依据这些数据并结合所掌握的统计知识，你认为该地拥有3套或3套以上住房的家庭所占比例的合理估计是________.

(15) 若 $a>0$，$b>0$，$a+b=2$，则下列不等式对一切满足条件的 a,b 恒成立的是____（写出所有正确命题的编号）.

① $ab\le 1$；　② $\sqrt{a}+\sqrt{b}\le\sqrt{2}$；　③ $a^2+b^2\ge 2$；

④ $a^3+b^3\ge 3$；　⑤ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge 2$.

三、解答题：本大题共6小题，共75分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 解答写在答题卡上的指定区域内.

(16)（本小题满分12分）

$\triangle ABC$ 的面积是30，内角 A,B,C 所对边长分别为 a,b,c，$\cos A=\frac{12}{13}$.

（Ⅰ）求 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$；

（Ⅱ）若 $c-b=1$，求 a 的值.