娄底市2023年初中毕业学业考试试题卷

数学

温馨提示：

1．本学科试卷分试题卷和答题卡两部分，数学卷面满分120分，考试时量120分钟．

2．请你将姓名、准考证号等相关信息按要求填涂在答题卡上．

3．请你在答题卡规定区域内作答，答在本试题卷上无效．

一、选择题（本大题共12小题，每小题3分，满分36分，每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请把你认为符合题目要求的选项填涂在答题卡上相应题号下的方框里）

1. 2023 倒数是（　）

A. 2023　　B. $\frac{1}{2023}$　　C. $-\frac{1}{2023}$　　D. -2023

【答案】B

【解析】

【分析】根据倒数的定义，乘积为1的两个数互为倒数，由此即可求解．

【详解】解：$\because 2023\times\frac{1}{2023}=1$，

$\therefore 2023$ 倒数是 $\frac{1}{2023}$，

故选：B．

【点睛】本题主要考查倒数的概念，掌握相关概念及计算方法是解题的关键．

2. 下列运算正确的是（　）

A. $a^2\cdot a^4=a^8$　　B. $a^2+3a=4a^2$

C. $(a+2)(a-2)=a^2-2$　　　　D. $(-2a^2b)^3=-8a^6b^3$

【答案】D

【解析】

【分析】根据同底数幂的乘法运算可判断 A，根据合并同类项可判断 B，根据平方差公式可判断 C，根据积的乘方运算可判断 D，从而可得答案．

【详解】解：$a^2\cdot a^4=a^6$，故 A 不符合题意；

a^2，$3a$ 不是同类项，不能合并，故 B 不符合题意；

$(a+2)(a-2)=a^2-4$，故 C 不符合题意；

$(-2a^2b)^3=-8a^6b^3$，运算正确，故 D 符合题意；

故选 D

【点睛】本题考查的是同底数幂的乘法运算，合并同类项，平方差公式的应用，积的乘方运算，熟记以上基础的运算法则是解本题的关键．

3. 新时代我国教育事业取得了历史性成就，目前我国已建成世界上规模最大的教育体系，教育现代化发展总体水平跨入世界中上国家行列，其中高等教育在学总规模达到 4430 万人，处于高等教育普及化阶段．4430 万用科学记数法表示为（　）

A. 443×10^5　　B. 4.43×10^7　　C. 4.43×10^8　　D. 0.443×10^8

【答案】B

【解析】

【分析】科学记数法的表示形式为 $a\times10^n$ 的形式，其中 $1\le|a|<10$，n 为整数．确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位，n 的绝对值与小数点移动的位数相同，当原数绝对值 ≥10 时，n 是正整数，当原数绝对值 <1 时，n 是负整数．

【详解】解：4430 万 $=44300000=4.43\times10^7$，

故选：B．

【点睛】此题考查科学记数法的表示方法．科学记数法的表示形式为 $a\times10^n$ 的形式，其中 $1\le|a|<10$，n 为整数，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值．

4. 一个小组 7 名同学的身高（单位：cm）分别为：175，160，158，155，168，151，170．这组数据的中位数是（　）

A. 151　　　　B. 155　　　　C. 158　　　　D. 160

【答案】D

【解析】

【分析】找中位数要把数据按从小到大的顺序排列，位于最中间的一个数或两个数的平均数为中位数．

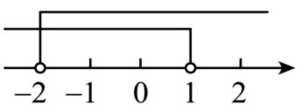
【详解】解：由于此数据按照从小到大的顺序排列为 151，155，158，160，168，170，175．

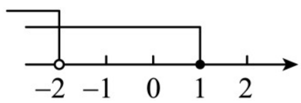
发现 160 处在第 4 位．所以这组数据的中位数是 160，

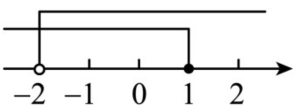
故选：D．

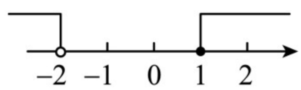
【点睛】本题属于基础题，考查了确定一组数据的中位数的能力．注意找中位数的时候一定要先排好顺序，然后再根据奇数和偶数个来确定中位数，如果数据有奇数个，则正中间的数字即为所求；如果是偶数个，则找中间两位数的平均数．

5. 不等式组 $\begin{cases}-x+3<5\\2x-2\le0\end{cases}$ 的解集在数轴上表示正确的是（　）

A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】C

【解析】

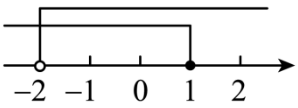
【分析】先分别求出各不等式的解集，再利用数轴表示解集的公共部分即可．

【详解】解：$\begin{cases}-x+3<5①\\2x-2\le0②\end{cases}$，

由①得：$x>-2$，

由②得：$x\le1$，

在数轴上表示两个不等式的解集如下：



∴不等式组的解集为：$-2<x\leq 1$；

故选：C

【点睛】本题考查的是解一元一次不等式组，正确求出每一个不等式解集是基础，熟知大于向右拐，小于向左拐的原则是解答此题的关键．

6. 将直线$y=2x+1$向右平移 2 个单位所得直线的表达式为（　）

A. $y=2x-1$　　B. $y=2x-3$　　C. $y=2x+3$　　D. $y=2x+5$

【答案】B

【解析】

【分析】直接根据“左加右减，上加下减” 的平移规律求解即可.

【详解】解：将直线$y=2x+1$向右平移 2 个单位，

所得直线的解析式为$y=2(x-2)+1$，

即$y=2x-3$，

故选：B.

【点睛】本题考查一次函数图象与几何变换，在平面直角坐标系中，平移后解析式有这样一个规律“左加右减，上加下减”.

7. 从$\frac{36}{7}$，3.1415926，$3.\dot{3}$，$\sqrt{4}$，$\sqrt{5}$，$-\sqrt[3]{8}$，$\sqrt[3]{9}$中随机抽取一个数，此数是无理数的概率是（　）

A. $\frac{2}{7}$　　B. $\frac{3}{7}$　　C. $\frac{4}{7}$　　D. $\frac{5}{7}$

【答案】A

【解析】

【分析】先判断出$\sqrt{5}$，$\sqrt[3]{9}$是无理数，再根据概率公式进行计算即可．

【详解】解：∵$\sqrt{4}=2$，$-\sqrt[3]{8}=-2$，

$\therefore \frac{36}{7}$，3.1415926，$3.\dot{3}$，$\sqrt{4}$，$\sqrt{5}$，$-\sqrt[3]{8}$，$\sqrt[3]{9}$中无理数有：$\sqrt{5}$，$\sqrt[3]{9}$，

∴从$\frac{36}{7}$，3.1415926，$3.\dot{3}$，$\sqrt{4}$，$\sqrt{5}$，$-\sqrt[3]{8}$，$\sqrt[3]{9}$中随机抽取一个数，此数是无理数的概率是$\frac{2}{7}$；

故选A

【点睛】本题考查的是求解一个数的算术平方根，立方根，无理数的含义，利用概率公式求解简单随机事件的概率，掌握以上基础知识是解本题的关键．

8. 一个长方体物体的一顶点所在A、B、C三个面的面积比是$3:2:1$，如果分别按A、B、C面朝上将此物体放在水平地面上，地面所受的压力产生的压强分别为P_A、P_B、P_C（压强的计算公式为$P=\frac{F}{S}$），则$P_A:P_B:P_C=$（　）

A. $2:3:6$　　B. $6:3:2$　　C. $1:2:3$　　D. $3:2:1$

【答案】A

【解析】

【分析】首先根据长方体的性质，得出相对面的面积相等，再根据物体的压力不变，结合反比例函数的性质进行分析，即可得出答案．

【详解】解：∵长方体物体的一顶点所在A、B、C三个面的面积比是$3:2:1$，

∴长方体物体的A、B、C三面所对的与水平地面接触的面积比也为$3:2:1$，

$\because P=\frac{F}{S}$，$F>0$，且F一定，

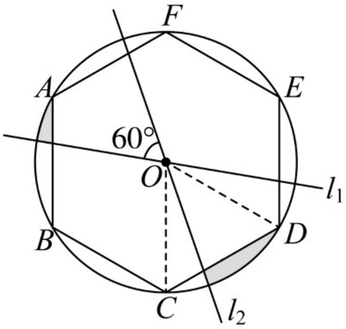
∴P随S的增大而减小，

$\therefore P_A:P_B:P_C=\frac{1}{3}:\frac{1}{2}:\frac{1}{1}=2:3:6$．

故选：A．

【点睛】本题考查了反比例函数的性质，解本题的关键在熟练掌握反比例函数的性质．

9. 如图，正六边形 $ABCDEF$ 的外接圆 $\odot O$ 的半径为 2，过圆心 O 的两条直线 l_1、l_2 的夹角为 60°，则图中的阴影部分的面积为（　）



A. $\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$　　B. $\frac{4}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\frac{2}{3}\pi-\sqrt{3}$　　D. $\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$

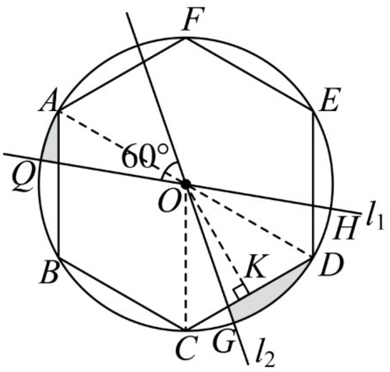
【答案】C

【解析】

【分析】如图，连接 AO，标注直线与圆的交点，由正六边形的性质可得：A，O，D三点共线，$\triangle COD$ 为等边三角形，证明扇形 AOQ 与扇形 COG 重合，可得 $S_{阴影}=S_{扇形COD}-S_{\triangle COD}$，从而可得答案．

【详解】解：如图，连接 AO，标注直线与圆的交点，

由正六边形的性质可得：A，O，D三点共线，$\triangle COD$ 为等边三角形，



$\therefore \angle AOQ=\angle DOH$，$\angle COD=\angle GOH=60^\circ$，

$\therefore \angle COG=\angle DOH=\angle AOQ$，

∴扇形 AOQ 与扇形 COG 重合，

$\therefore S_{阴影}=S_{扇形COD}-S_{\triangle COD}$，

$\because \triangle COD$ 为等边三角形，$OC=OD=2$，过 O 作 $OK\perp CD$ 于 K，

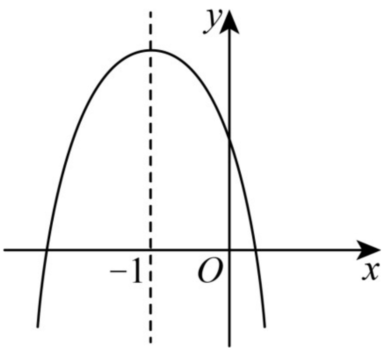
$\therefore \angle COD=60^{\circ}$，$CK=DK=1$，$OK=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$，

$\therefore S_{阴影}=S_{扇形COD}-S_{\triangle COD}=\dfrac{60\pi\times 2^2}{360}-\dfrac{1}{2}\times 2\times\sqrt{3}=\dfrac{2\pi}{3}-\sqrt{3}$；

故选 C

【点睛】本题考查的是正多边形与圆，扇形面积的计算，勾股定理的应用，熟记正六边形的性质是解本题的关键．

10. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图所示，给出下列结论：① $abc<0$；② $4a-2b+c>0$；③ $a-b>m(am+b)$（m 为任意实数）；④若点 $(-3,y_1)$ 和点 $(3,y_2)$ 在该图象上，则 $y_1>y_2$．其中正确的结论是（　）



A. ①②　　B. ①④　　C. ②③　　D. ②④

【答案】D

【解析】

【分析】由抛物线的开口向下，与 y 轴交于正半轴，对称轴在 y 轴的左边，可得 $a<0$，$c>0$，$b<0$，故①不符合题意；当 $x=0$ 与 $x=-2$ 时的函数值相等，可得 $4a-2b+c=c>0$，故②符合题意；当 $x=-1$

时函数值最大，可得$a-b\geq m(am+b)$，故③不符合题意；由点$(-3,y_1)$和点$(3,y_2)$在该图象上，而

$3-(-1)=4>(-1)-(-3)=2$，且离抛物线的对称轴越远的点的函数值越小，可得④符合题意．

【详解】解：∵抛物线的开口向下，与y轴交于正半轴，对称轴在y轴的左边，

∴$a<0$，$c>0$，$x=-\dfrac{b}{2a}<0$，

∴$b<0$，

∴$abc>0$，故①不符合题意；

∵对称轴为直线$x=-1$，

∴当$x=0$与$x=-2$时的函数值相等，

∴$4a-2b+c=c>0$，故②符合题意；

∵当$x=-1$时函数值最大，

∴$a-b+c\geq am+bm+c$，

∴$a-b\geq m(am+b)$；故③不符合题意；

∵点$(-3,y_1)$和点$(3,y_2)$在该图象上，

而$3-(-1)=4>(-1)-(-3)=2$，且离抛物线的对称轴越远的点的函数值越小，

∴$y_1>y_2$．故④符合题意；

故选：D．

【点睛】本题考查的是二次函数的图象与性质，熟记二次函数的开口方向，与y轴的交点坐标，对称轴方程，增减性的判定，函数的最值这些知识点是解本题的关键．

11. 从n个不同元素中取出$m(m\leq n)$个元素的所有组合的个数，叫做从n个不同元素中取出m个元素的组

合数，用符号 C_n^m 表示，$C_n^m=\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m(m-1)\cdots1}$（$n\geq m$，$n$、$m$ 为正整数）；例如：

$C_5^2=\dfrac{5\times4}{2\times1}$，$C_8^3=\dfrac{8\times7\times6}{3\times2\times1}$，则 $C_9^4+C_9^5=$（ ）

A. C_9^6　　B. C_{10}^4　　C. C_{10}^5　　D. C_{10}^6

【答案】C

【解析】

【分析】根据新定义分别进行计算比较即可得解．

【详解】解：$\because C_n^m=\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m(m-1)\cdots1}$，

$\therefore C_9^4+C_9^5=\dfrac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}+\dfrac{9\times8\times7\times6\times5}{5\times4\times3\times2\times1}=126+126=252$，

A 选项，$C_9^6=\dfrac{9\times8\times7\times6\times5\times4}{6\times5\times4\times3\times2\times1}=84$，

B 选项，$C_{10}^4=\dfrac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=210$，

C 选项，$C_{10}^5=\dfrac{10\times9\times8\times7\times6}{5\times4\times3\times2\times1}=252$，

D 选项，$C_{10}^6=\dfrac{10\times9\times8\times7\times6\times5}{6\times5\times4\times3\times2\times1}=210$，

故选 C．

【点睛】本题考查了新定义运算以及求代数式的值．正确理解新定义是解题的关键．

12. 我国南宋著名数学家秦九韶在他的著作《数学九章》一书中，给出了这样的一个结论：三边分别为

a、b、c 的 $\triangle ABC$ 的面积为 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2b^2-\left(\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2}$．$\triangle ABC$ 的边 a、b、c 所对的角分别是

$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$，则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A$．下列结论中正确的是（ ）

A. $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

B. $\cos C=-\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

C. $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ac}$

D. $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2bc}$

【答案】A

【解析】

【分析】本题利用三角函数间的关系和面积相等进行变形解题即可．

【详解】解：$\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2}$，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C$，

$$\therefore \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}ab\sin C$$

即 $a^2b^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2=a^2b^2\sin^2 C$，

$$a^2b^2\left(1-\sin^2 C\right)=\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2,$$

$$\cos^2 C=\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2,$$

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

故选：A．

【点睛】本题考查等式利用等式的性质解题化简，熟悉 $\sin^2 C+\cos^2 C=1$ 是解题的关键．

二、填空题（本大题共6小题，每小题3分，满分18分）

13. 函数 $y=\sqrt{x+1}$ 的自变量 x 的取值范围为____________．

【答案】x≥－1

【解析】

【详解】由题意得，x+1≥0，

解得 x≥－1．

故答案为 x≥－1．

14. 若 m 是方程 $x^2-2x-1=0$ 的根，则 $m^2+\frac{1}{m^2}=$______．

【答案】6

【解析】

【分析】由 m 是方程 $x^2-2x-1=0$ 的根，可得 $m^2=2m+1$，把 $m^2+\frac{1}{m^2}$ 化为 $2m+1+\frac{1}{2m+1}$，再通分变形即可．

【详解】解：∵m 是方程 $x^2-2x-1=0$ 的根，

∴$m^2-2m-1=0$，即 $m^2=2m+1$，

∴$m^2+\frac{1}{m^2}=2m+1+\frac{1}{2m+1}$

$=\frac{(2m+1)^2+1}{2m+1}$

$=\frac{4m^2+4m+2}{2m+1}$

$=\frac{8m+4+4m+2}{2m+1}$

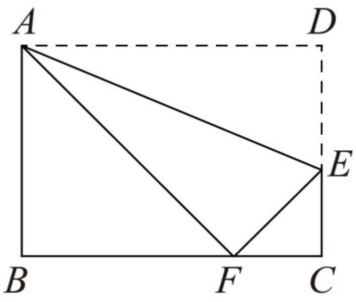
$=\frac{6(2m+1)}{2m+1}$

$=6$；

【点睛】本题考查的是一元二次方程的解的含义，分式的化简求值，准确的把原分式变形，再求值是解本题的关键．

15. 如图，点 E 在矩形 $ABCD$ 的边 CD 上，将 $\triangle ADE$ 沿 AE 折叠，点 D 恰好落在边 BC 上的点 F 处，若

$BC=10$．$\sin\angle AFB=\frac{4}{5}$，则$DE=$______．



【答案】5

【解析】

【分析】利用矩形的性质及折叠的性质可得$AD=AF=10$，$EF=ED$，可得$AB=AF\cdot\sin\angle AFB=10\times\frac{4}{5}=8$，$BF=\sqrt{AF^2-AB^2}=6$，设$DE=x$，则$CE=CD-DE=8-x$，利用勾股定理可得$EF^2=CF^2+CE^2$，进而可得结果．

【详解】解：∵四边形$ABCD$是矩形，

∴$\angle B=\angle C=\angle D=90^\circ$，$AB=CD$，$AD=BC=10$，

根据折叠可知，可知$AD=AF=10$，$EF=ED$，

则，在$\mathrm{Rt}\triangle ABF$中，$AB=AF\cdot\sin\angle AFB=10\times\frac{4}{5}=8$，则$CD=8$，

∴$BF=\sqrt{AF^2-AB^2}=6$，则$CF=BC-BF=4$，

设$DE=x$，则$CE=CD-DE=8-x$，

在$\mathrm{Rt}\triangle CEF$中，$EF^2=CF^2+CE^2$，即：$x^2=(8-x)^2+4^2$，

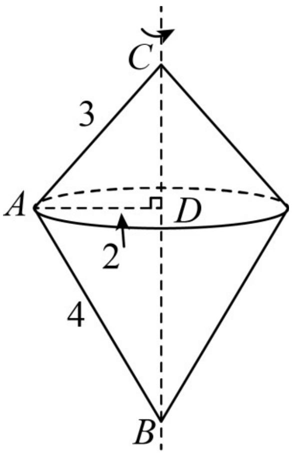
解得：$x=5$，

即：$DE=5$，

故答案为：5．

【点睛】本题考查矩形的性质、折叠的性质、解直角三角形，灵活运用折叠的性质得到相等线段是解决问题的关键．

16. 如图，在$\triangle ABC$中，$AC=3$，$AB=4$，BC边上的高$AD=2$，将$\triangle ABC$绕着BC所在的直线旋转一周得到的几何体的表面积为______．



【答案】14π

【解析】

【分析】由圆锥的侧面展开图是扇形，可得圆锥的侧面积公式$S=\frac{1}{2}lr$，再根据题干数据进行计算即可．

【详解】解：由题意可得：旋转后的几何体是两个共底面的圆锥，

∵BC边上的高$AD=2$，

∴底面圆的周长为：$2\pi\times2=4\pi$，

∵$AC=3$，$AB=4$，

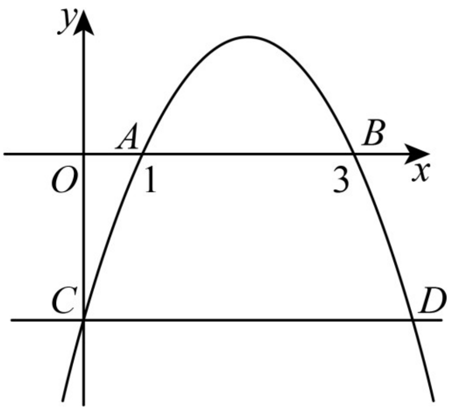
∴几何体的表面积为$\frac{1}{2}\times3\times4\pi+\frac{1}{2}\times4\times4\pi=14\pi$．

故答案为：14π．

【点睛】本题考查的是圆锥的侧面积的计算，几何体的形成，熟记圆锥的侧面积公式是解本题的关键．

17. 如图，抛物线$y=ax^2+bx+c$与x轴相交于点$A(1,0)$、点$B(3,0)$，与y轴相交于点C，点D在抛物

线上，当$CD\parallel x$轴时，$CD=$______．



【答案】4

【解析】

【分析】与抛物线$y=ax^2+bx+c$与x轴相交于点$A(1,0)$、点$B(3,0)$，可得抛物线的对称轴为直线

$x=\dfrac{1+3}{2}=2$，由$CD\parallel x$轴，可得C，D关于直线$x=2$对称，可得$D(4,c)$，从而可得答案．

【详解】解：∵抛物线$y=ax^2+bx+c$与x轴相交于点$A(1,0)$、点$B(3,0)$，

∴抛物线的对称轴为直线$x=\dfrac{1+3}{2}=2$，

∵当$x=0$时，$y=c$，即$C(0,c)$，

∵$CD\parallel x$轴，

∴C，D关于直线$x=2$对称，

∴$D(4,c)$，

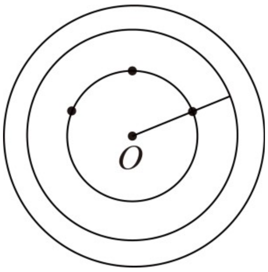
∴$CD=4-0=4$；

故答案为：4

【点睛】本题考查的是利用抛物线上两点的坐标求解对称轴方程，熟练的利用抛物线的对称性解题是关键．

18. 若干个同学参加课后社团——舞蹈活动，一次排练中，先到的n个同学均匀排成一个以O点为圆心，r

为半径的圆圈（每个同学对应圆周上一个点），又来了两个同学，先到的同学都沿各自所在半径往后移 a 米，再左右调整位置，使这 $(n+2)$ 个同学之间的距离与原来 n 个同学之间的距离（即在圆周上两人之间的圆弧的长）相等．这 $(n+2)$ 个同学排成圆圈后，又有一个同学要加入队伍，重复前面的操作，则每人须往后移______米（请用关于 a 的代数式表示），才能使得这 $(n+3)$ 个同学之间的距离与原来 n 个同学之间的距离相等．



【答案】$\frac{a}{2}$

【解析】

【分析】由第一次操作可得：$\frac{2\pi r}{n}=\frac{2\pi(r+a)}{n+2}$，则 $n=\frac{2r}{a}$，设第二次操作时每位同学向后移动了 x 米，

可得 $\frac{2\pi(r+a)}{n+2}=\frac{2\pi(r+a+x)}{n+3}$，解得 $x=\frac{r+a}{2+n}$，再代入化简即可．

【详解】解：由第一次操作可得：$\frac{2\pi r}{n}=\frac{2\pi(r+a)}{n+2}$，

$\therefore n=\frac{2r}{a}$，

设第二次操作时每位同学向后移动了 x 米，则

$\frac{2\pi(r+a)}{n+2}=\frac{2\pi(r+a+x)}{n+3}$，

$\therefore x=\frac{r+a}{2+n}=\frac{r+a}{2+\frac{2r}{a}}=\frac{a(r+a)}{2(a+r)}=\frac{a}{2}$，

故答案为：$\frac{a}{2}$

【点睛】本题考查的是一元一次方程的应用，分式的化简，准确的理解题意确定相等关系是解本题的关键．

三、解答题（本大题共2小题，每小题6分，共12分）

19. 计算：$(\pi-2023)^0+\left|1-\sqrt{3}\right|+\sqrt{8}-\tan 60^\circ$．

【答案】$2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】先计算零次幂，化简绝对值，化简二次根式，求解特殊角的正切，再合并即可．

【详解】解：$(\pi-2023)^0+\left|1-\sqrt{3}\right|+\sqrt{8}-\tan 60^\circ$

$=1+\sqrt{3}-1+2\sqrt{2}-\sqrt{3}$

$=2\sqrt{2}$．

【点睛】本题考查的是含特殊角的三角函数值的混合运算，零次幂的含义，化简绝对值，二次根式，熟记相关概念与运算法则是解本题的关键．

20. 先化简，再求值：$\left(\frac{x}{x+1}-\frac{2}{x-1}\right)\div\frac{1}{x^2-1}$，其中$x$满足$x^2-3x-4=0$．

【答案】x^2-3x-2；2

【解析】

【分析】先计算括号内的分式的减法运算，再把除法化为乘法运算，得到化简的结果，再整体代入计算即可．

【详解】解：$\left(\frac{x}{x+1}-\frac{2}{x-1}\right)\div\frac{1}{x^2-1}$

$=\frac{x^2-x-2x-2}{(x+1)(x-1)}\cdot(x+1)(x-1)$

$=x^2-3x-2$；

$\because x^2-3x-4=0$，

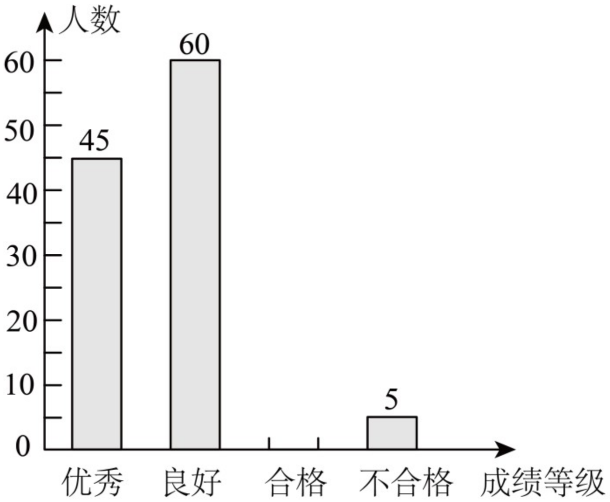
$\therefore x^2-3x=4$，其中 $x\neq-1$，

$\therefore$原式$=4-2=2$．

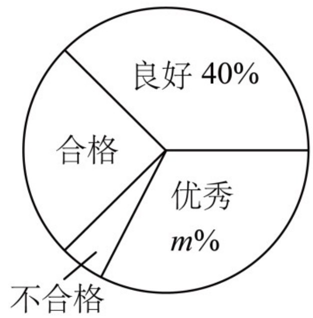
【点睛】本题考查的是分式的化简求值，熟练的化简分式并整体代入进行计算是解本题的关键．

四、解答题（本大题共 2 小题，每小题 8 分，共 16 分）

21. 某区教育局为了了解某年级学生对科学知识的掌握情况，在全区范围内随机抽取若干名学生进行科学知识测试，按照测试成绩分优秀、良好、合格与不合格四个等级，并绘制了如下两幅不完整统计图．



科学知识测试成绩条形统计图



科学知识测试成绩扇形统计图

（1）参与本次测试的学生人数为______，$m=$______．

（2）请补全条形统计图．

（3）若全区该年纪共有 5000 名学生，请估计该年级对科学知识掌握情况较好（测试成绩能达到良好及以上等级）的学生人数．

【答案】（1）150 人，30

（2）补全图形见解析　（3）3500 人．

【解析】

【分析】（1）由良好 60 人除以其占比 40% 可得总人数，由优秀的 45 人除以总人数可得 m 的值；

（2）先利用总人数减去优秀，良好，不合格，得到合格的人数，再补全统计图即可；

（3）由 5000 乘以测试成绩能达到良好及以上等级的学生人数的占比可得答案．

【小问 1 详解】

解：$60\div40\%=150$（人），

∴参与本次测试的学生人数为 150 人，

$\frac{45}{150}\times100\%=30\%$，

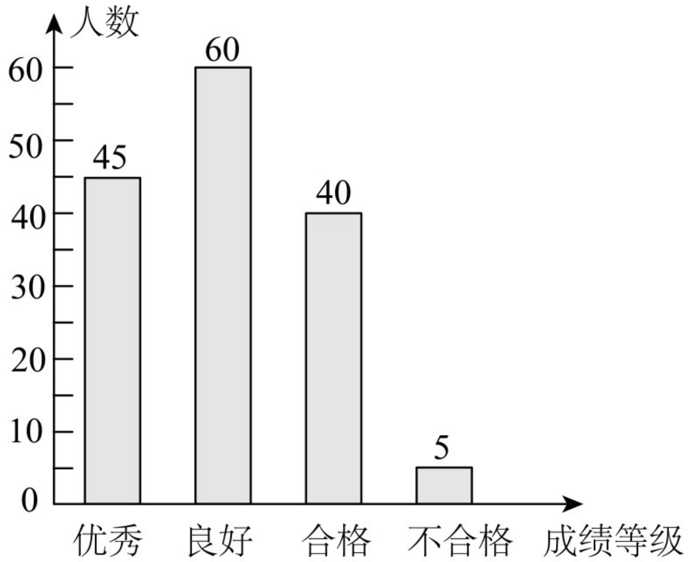
∴$m=30$；

故答案为：150 人；30；

【小问 2 详解】

∵$150-45-60-5=40$（人），

补全图形如下：



科学知识测试成绩条形统计图

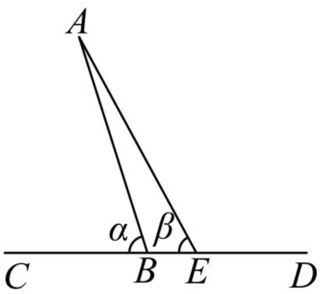
【小问 3 详解】

$5000\times\frac{45+60}{150}=3500$（人）；

∴全区该年纪共有 5000 名学生，请估计该年级对科学知识掌握情况较好（测试成绩能达到良好及以上等级）的学生人数有 3500 人．

【点睛】本题考查的是从条形图与扇形图中获取信息，利用样本估计总体，能够正确的读图是解本题的关键．

22. 几位同学在老师的指导下到某景区进行户外实践活动，在登山途中发现该景区某两座山之间风景优美，但路陡难行，为了便于建议景区管理处在这两山顶间建观光索道，他们分别在两山顶上取 A、B 两点，并过点 B 架设一水平线型轨道 CD（如图所示），使得 $\angle ABC=\alpha$，从点 B 出发按 CD 方向前进 20 米到达点 E，即 $BE=20$ 米，测得 $\angle AEB=\beta$．已知 $\sin\alpha=\dfrac{24}{25}$，$\tan\beta=3$，求 A、B 两点间的距离．

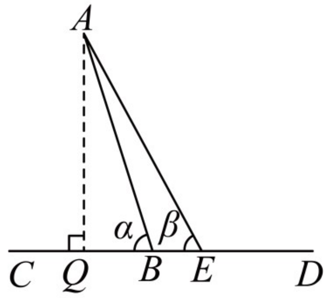


【答案】A、B 两点间的距离为 500 米．

【解析】

【分析】如图，过 A 作 $AQ\perp CD$ 于 Q，由 $\dfrac{AQ}{AB}=\dfrac{24}{25}$，设 $AQ=24x$，则 $AB=25x$，可得 $BQ=\sqrt{AB^2-AQ^2}=7x$，而 $BE=20$，可得 $QE=QB+BE=7x+20$，结合 $\dfrac{AQ}{QE}=3$，即 $AQ=3QE$，再建立方程求解即可．

【详解】解：如图，过 A 作 $AQ\perp CD$ 于 Q，



$\because \sin\alpha = \frac{24}{25}$，即 $\frac{AQ}{AB} = \frac{24}{25}$，

设 $AQ = 24x$，则 $AB = 25x$，

$\therefore BQ = \sqrt{AB^2 - AQ^2} = 7x$，而 $BE = 20$，

$\therefore QE = QB + BE = 7x + 20$，

$\because \tan\beta = 3$，

$\therefore \frac{AQ}{QE} = 3$，即 $AQ = 3QE$，

$\therefore 24x = 3(7x + 20)$，

解得：$x = 20$，

$\therefore AB = 25x = 25 \times 20 = 500$（米），

答：A、B 两点间的距离为 500 米．

【点睛】本题考查的是解直角三角形的实际应用，作出合适的辅助线构建直角三角形是解本题的关键．

五、解答题（本大题共 2 小题，每小题 9 分，共 18 分）

23. 为落实“五育并举”，绿化美化环境，学校在劳动周组织学生到校园周边种植甲、乙两种树苗．已知购买甲种树苗 3 棵，乙种树苗 2 棵共需 12 元，；购买甲种树苗 1 棵，乙种树苗 3 棵共需 11 元．

（1）求每棵甲、乙树苗的价格．

（2）本次活动共种植了 200 棵甲、乙树苗，假设所种的树苗若干年后全部长成了参天大树，并且平均每棵树的价值（含生态价值，经济价值）均为原来树苗价的 100 倍，要想获得不低于 5 万元的价值，请问乙种树苗种植数量不得少于多少棵？

【答案】（1）每棵甲种树苗的价格为 2 元，每棵乙种树苗的价格 3 元；

（2）乙种树苗种植数量不得少于 100 棵．

【解析】

【分析】（1）设每棵甲种树苗 价格为 x 元，每棵乙种树苗的价格 y 元，由“购买甲种树苗 3 棵，乙种树苗 2 棵共需 12 元，；购买甲种树苗 1 棵，乙种树苗 3 棵共需 11 元”列出方程组，可求解；

（2）设乙种树苗种植数量为 m 棵，则甲种树苗数量为 $(200-m)$ 棵，根据“获得不低于 5 万元的价值”列不等式解题即可．

【小问 1 详解】

解：设每棵甲种树苗的价格为 x 元，每棵乙种树苗的价格 y 元，由题意可得：

$\begin{cases}3x+2y=12\\x+3y=11\end{cases}$，解得：$\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$，

答：每棵甲种树苗的价格为 2 元，每棵乙种树苗的价格 3 元；

【小问 2 详解】

设乙种树苗种植数量为 m 棵，则甲种树苗数量为 $(200-m)$ 棵，

$\therefore 200(200-m)+300m\geq 50000$，

解得：$m\geq 100$，

$\therefore m$ 的最小整数解为 100．

答：乙种树苗种植数量不得少于 100 棵．

【点睛】本题考查的是二元一次方程组的应用，一元一次不等式的应用，熟练的确定相等关系与不等关系是解本题的关键．

24. 如图 1，点 G 为等边 $\triangle ABC$ 的重心，点 D 为 BC 边的中点，连接 GD 并延长至点 O，使得 $DO=DG$，连接 GB，GC，OB，OC，

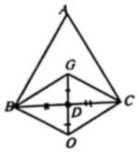


图 1

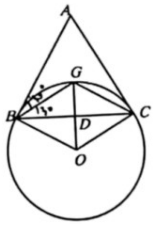


图 2①

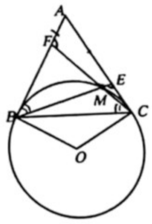


图 2 ②

（1）求证：四边形 $BOCG$ 为菱形．

（2）如图 2，以 O 点为圆心，OG 为半径作 $\odot O$

① 判断直线 AB 与 $\odot O$ 的位置关系，并予以证明．

② 点 M 劣弧 BC 上一动点（与点 B 、点 C 不重合），连接 BM 并延长交 AC 于点 E ，连接 CM 并延长交 AB 于点 F ，求证：$AE+AF$ 为定值．

【答案】（1）见解析；

（2）①直线 AB 是 $\odot O$ 的切线；②见解析．

【解析】

【分析】（1）如图 1，延长 BG 交 AC 于点 H ，连接 AD ，由 $\triangle ABC$ 是等边三角形，G 是重心，点 D 为 BC 边的中点，得 $AD\perp BC$ ，$DB=DC$ ，进而证明四边形 $BOCG$ 是平行四边形，于是即可得四边形 $BOCG$ 为菱形；

（2）①延长 BG 交 AC 于点 H ，连接 AD ，先证 BG 为 $\angle ABC$ 角平分线，进而求得 $\angle ABG=\angle GBO=30^{\circ}$ ，又由菱形的性质得 $\angle CBO=\angle GBC=30^{\circ}$ ，从而有 $\angle ABO=\angle ABG+\angle GBC+\angle CBO=90^{\circ}$ ，于是根据切线的判定即可得出结论；②在优弧 BC 上取一

点 N，连接 BN、CN，由①得 $\angle OBC=30^{\circ}$，进而求得 $\angle N=\frac{1}{2}\angle BOC=60^{\circ}$，再由圆内接四边形的性质求得 $\angle BMC=180^{\circ}-\angle N=120^{\circ}$，从而根据角的和差关系求得 $\angle ACF=\angle CBE$，于是证明 $\triangle BEC\cong\triangle CFA(ASA)$ 得 $AF=CE$，即可证明结论成立．

【小问1详解】

证明：如图1，延长 BG 交 AC 于点 H，连接 AD，

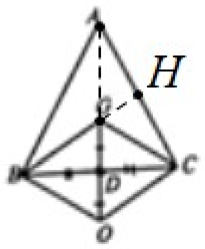


图1

∵ $\triangle ABC$ 是等边三角形，G 是重心，点 D 为 BC 边的中点，

∴中线 AD 过点 G，即A、G、D 三点共线，$\angle BAC=\angle ABC=60^{\circ}$，$AB=AC=BC$，

∴ $AD\perp BC$，$DB=DC$，

∵ $DO=DG$，

∴四边形 $BOCG$ 是平行四边形，

∵ $AD\perp BC$，

∴四边形 $BOCG$ 为菱形；

【小问2详解】

①解：直线 AB 是 $\odot O$ 的切线，理由如下：延长 BG 交 AC 于点 H，连接 AD，

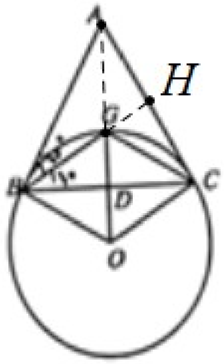


图2①

$\because\triangle ABC$是等边三角形，G是重心，点D为BC边的中点，

$\therefore$中线AD过点G，即A、G、D三点共线，$\angle BAC=\angle ABC=\angle ACB=60^\circ$，$AB=AC=BC$，$AH=CH$，

$\therefore BG$为$\angle ABC$的角平分线，

$\therefore\angle ABG=\angle GBO=30^\circ$，

$\because$四边形$BOCG$是菱形，

$\therefore\angle CBO=\angle GBC=30^\circ$，

$\therefore\angle ABO=\angle ABG+\angle GBC+\angle CBO=90^\circ$，

$\therefore AB\perp OB$，

$\therefore$直线AB是$\odot O$的切线；

②证明：在优弧BC上取一点N，连接BN、CN，

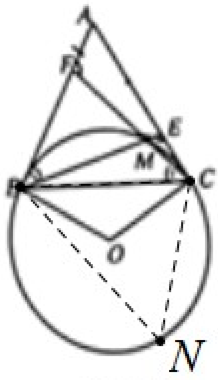


图2 ②

由①得$\angle OBC=30^\circ$，

$\because OB=OC$，

$\therefore \angle OBC=\angle OCB=30^\circ$，

$\therefore \angle BOC=180^\circ-\angle OBC-\angle OCB=120^\circ$，

$\therefore \angle N=\frac{1}{2}\angle BOC=60^\circ$，

$\because$四边形$BNCM$内接于$\odot O$，

$\therefore \angle BMC=180^\circ-\angle N=120^\circ$，

$\therefore \angle CBE+\angle BCM=180^\circ-\angle BMC=60^\circ$，

$\because \angle ACB=\angle ACF+\angle BCM=60^\circ$，

$\therefore \angle ACF+\angle BCM=\angle CBE+\angle BCM$，

$\therefore \angle ACF=\angle CBE$，

$\because BC=AC$，$\angle BCE=\angle A=60^\circ$，

$\therefore \triangle BEC\cong\triangle CFA$（ASA）

$\therefore AF=CE$

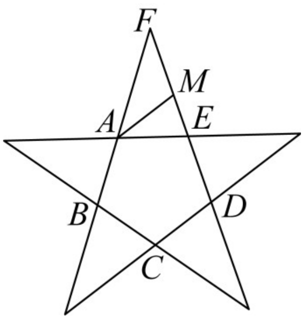
$\because AE+CE=AC$

$\therefore AE+AF=AE+CE=AC$，即 $AE+AF$ 为定值．

【点睛】本题主要考查了全等三角形的判定及性质，等边三角形的性质，重心的性质，切线的判定以及菱形的判定，熟练掌握菱形的判定，全等三角形的判定及性质，等边三角形的性质，重心的性质以及切线的判定定理是解题的关键．

六、综合题（本大题共 2 小题，每小题 10 分，共 20 分）

25. 鲜艳的中华人民共和国国旗始终是当代中华儿女永不褪色的信仰，国旗上的每颗星都是标准五角星．为了增强学生的国家荣誉感、民族自豪感等．数学老师组织学生对五角星进行了较深入的研究．延长正五边形的各边直到不相邻的边相交，得到一个标准五角星．如图，正五边形 $ABCDE$ 的边 BA、DE 的延长线相交于点 F，$\angle EAF$ 的平分线交 EF 于点 M．



（1）求证：$AE^2=EF\cdot EM$．

（2）若 $AF=1$，求 AE 的长．

（3）求 $\dfrac{S_{正五边形ABCDE}}{S_{\triangle AEF}}$ 的值．

【答案】（1）见解析　（2）$AE=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

（3）$\sqrt{5}$

【解析】

【分析】（1）根据正多边形的性质可以得到$\angle FAE=\angle FEA=72^\circ$，再利用三角形的内角和以及角平分线的定义得到$\angle MAE=\angle F$，再根据$\angle FEA=\angle AEM$，可得到$\triangle AEM\backsim\triangle FEA$，进而得到结论；

（2）根据等角对等边可以得到$AF=FE=1$，$AE=AM=FM$，再由（1）得结论得到$AE^2=1\times(1-AE)$，解方程可以求出结果；

（3）设$S_{\triangle AEF}=S$，$AF=a$连接AD，AC，根据正多边形可以推导出$\triangle AFE\cong\triangle ACD$，$\triangle ABC\cong\triangle AED$，则可表示出$S_{正五边形ABCDE}$，然后求出比值．

【小问1详解】

证明：$\because ABCDE$是正五边形，

$\therefore \angle FAE=\angle FEA=\dfrac{360^\circ}{5}=72^\circ$，

$\therefore \angle F=180^\circ-\angle FAE-\angle FEA=180^\circ-72^\circ-72^\circ=36^\circ$，

又$\because \angle EAF$的平分线交EF于点M，

$\therefore \angle FAM=\angle MAE=\dfrac{1}{2}\angle FAE=\dfrac{1}{2}\times72^\circ=36^\circ$，

$\therefore \angle MAE=\angle F$，

又$\because \angle FEA=\angle AEM$，

$\therefore \triangle AEM\backsim\triangle FEA$，

$\therefore \dfrac{AE}{FE}=\dfrac{ME}{AE}$，

即 $AE^2=EF\cdot EM$；

【小问 2 详解】

解：∵$\angle F=\angle FAM=36^\circ$，

∴$\angle AME=72^\circ$，

∴$AF=FE=1$，$AE=AM=FM$，

∵$AE^2=EF\cdot EM$，

∴$AE^2=1\times(1-AE)$，

解得：$AE=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$或$AE=\frac{-\sqrt{5}-1}{2}$（舍去），

∴$AE=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$；

【小问 3 详解】

设$S_{\triangle AEF}=S$，$AF=a$，连接AD，AC，

则根据（2）中计算可得$AE=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a$，

∵$ABCDE$是正五边形，

∴$AB=BC=CD=DE=EA=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a$，$\angle BAE=\angle AED=\angle EDC=\angle DCB=\angle CBA=108^\circ$，

∴$\angle BAC=\angle BCA=\angle EDA=\angle EAD=36^\circ$

∴$\angle ACD=\angle ADC=72^\circ$，

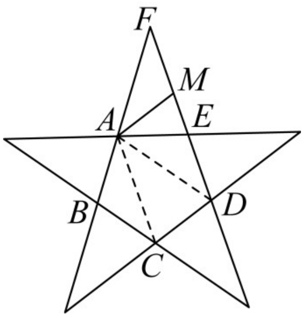
∴$\triangle AFE\cong\triangle ACD$，$\triangle ABC\cong\triangle AED$，

$\therefore \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle AEF}}=\frac{ED}{EF}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ，

$\therefore S_{\triangle ADE}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}S$ ，

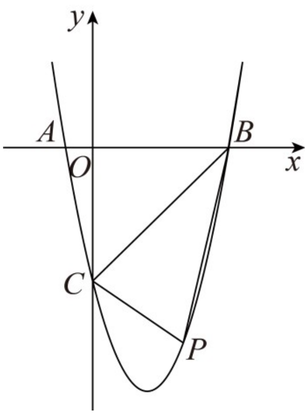
$\therefore S_{正五边形ABCDE}=S_{\triangle ADE}+S_{\triangle ADC}+S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}S+S+\frac{\sqrt{5}-1}{2}S=\sqrt{5}S$ ，

$\therefore \frac{S_{正五边形ABCDE}}{S_{\triangle AEF}}=\frac{\sqrt{5}S}{S}=\sqrt{5}$ ．



【点睛】本题考查相似三角形的判定和性质，解一元二次方程，全等三角形的判定和性质，正多边形的性质，掌握相似三角形的判定和性质是解题的关键．

26. 如图，抛物线 $y=x^2+bx+c$ 过点 $A(-1,0)$ 、点 $B(5,0)$ ，交 y 轴于点 C ．



（1）求 b，c 的值．

（2）点 $P(x_0,y_0)(0<x_0<5)$ 是抛物线上的动点

① 当 x_0 取何值时，$\triangle PBC$ 的面积最大？并求出 $\triangle PBC$ 面积的最大值；

② 过点 P 作 $PE\perp x$ 轴，交 BC 于点 E，再过点 P 作 $PF\parallel x$ 轴，交抛物线于点 F，连接 EF ，问：是否存

在点 P，使！PEF 为等腰直角三角形？若存在，请求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由．

【答案】（1）$b=-4$，$c=-5$

（2）①当 $x_0=\frac{5}{2}$ 时，$\triangle PBC$ 的面积由最大值，最大值为 $\frac{125}{8}$；

②当点 P 的坐标为 $\left(\frac{7-\sqrt{33}}{2},\frac{3-3\sqrt{33}}{2}\right)$ 或 $(4,-5)$ 时，！PEF 为等腰直角三角形

【解析】

【分析】（1）将将 $A(-1,0)$、$B(5,0)$ 代入抛物线 $y=x^2+bx+c$ 即可求解；

（2）①由（1）可知：$y=x^2-4x-5$，得 $C(0,-5)$，可求得 BC 的解析式为 $y=x-5$，过点 P 作 $PE\perp x$ 轴，交 BC 于点 E，交 x 轴于点 Q，易得 $PE=y_E-y_0=-x_0^2+5x_0$，根据 $\triangle PBC$ 的面积 $=S_{\triangle PEC}+S_{\triangle PEB}$，可得 $\triangle PBC$ 的面积 $=\frac{1}{2}PE\cdot(x_0-x_C)+\frac{1}{2}PE\cdot(x_B-x_0)=-\frac{5}{2}\left(x_0-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{125}{8}$，即可求解；

②由题意可知抛物线的对称轴为 $x_{对}=-\frac{-4}{2\times1}=2$，则 $x_F=4-x_0$，分两种情况：当点 P 在对称轴左侧时，即 $0<x_0<2$ 时，当点 P 在对称轴右侧时，即 $2<x_0<5$ 时，分别进行讨论求解即可．

【小问 1 详解】

解：将 $A(-1,0)$、$B(5,0)$ 代入抛物线 $y=x^2+bx+c$ 中，

可得：$\begin{cases}1-b+c=0\\25+5b+c=0\end{cases}$，解得：$\begin{cases}b=-4\\c=-5\end{cases}$，

即：$b=-4$，$c=-5$；

【小问 2 详解】

①由（1）可知：$y=x^2-4x-5$，

当$x=0$时，$y=-5$，即$C(0,-5)$，

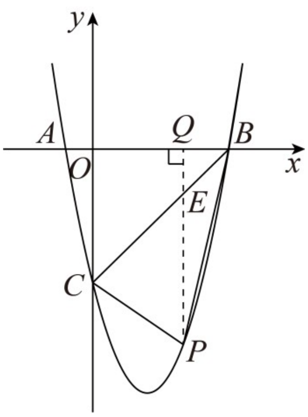
设BC的解析式为：$y=kx+b$，

将$B(5,0)$，$C(0,-5)$代入$y=kx+b$中，

可得$\begin{cases}5k+b=0\\b=-5\end{cases}$，解得：$\begin{cases}k=1\\b=-5\end{cases}$，

$\therefore BC$的解析式为：$y=x-5$，

过点P作$PE\perp x$轴，交BC于点E，交x轴于点Q，



$\because P(x_0,y_0)(0<x_0<5)$，则$y_0=x_0^2-4x_0-5$，

$\therefore$点E的横坐标也为x_0，则纵坐标为$y_E=x_0-5$，

$\therefore PE=y_E-y_0=(x_0-5)-(x_0^2-4x_0-5)=-x_0^2+5x_0$，

$\triangle$PBC的面积$=S_{\triangle PEC}+S_{\triangle PEB}$

$=\frac{1}{2}PE\cdot(x_0-x_C)+\frac{1}{2}PE\cdot(x_B-x_0)$

$=\frac{1}{2}PE\cdot(x_B-x_C)$

$=\frac{5}{2}(-x_0^2+5x_0)$

$=-\dfrac{5}{2}\left(x_0-\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{125}{8}$，

$\because -\dfrac{5}{2}<0$，

$\therefore$当$x_0=\dfrac{5}{2}$时，△PBC 的面积有最大值，最大值为$\dfrac{125}{8}$；

② 存在，当点P的坐标为$\left(\dfrac{7-\sqrt{33}}{2},\dfrac{3-3\sqrt{33}}{2}\right)$或$(4,-5)$时，！$PEF$为等腰直角三角形．

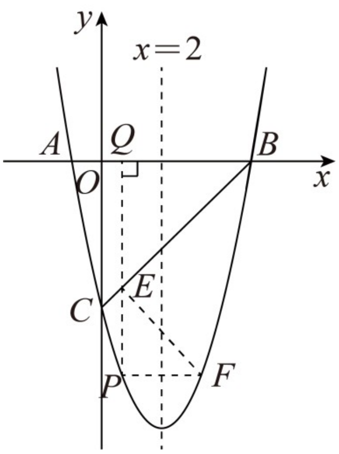
理由如下：由①可知$PE=-x_0^{\ 2}+5x_0$，

由题意可知抛物线的对称轴为直线$x_{对}=-\dfrac{-4}{2\times1}=2$，

$\because PF\parallel x$轴，

$\therefore \angle EPF=90^{\circ}$，$\dfrac{x_0+x_F}{2}=x_{对}=2$，则$x_F=4-x_0$，

当点P在对称轴左侧时，即$0<x_0<2$时，



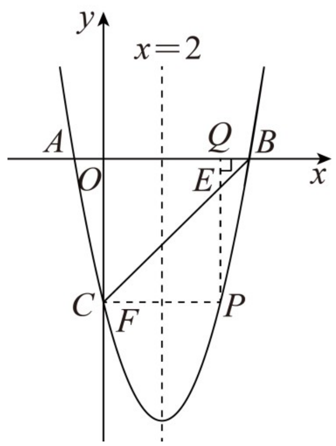
$PF=x_F-x_0=4-2x_0$，当$PE=PF$时，！PEF为等腰直角三角形，

即：$-x_0^{\ 2}+5x_0=4-2x_0$，整理得：$x_0^{\ 2}-7x_0+4=0$，

解得：$x_0=\frac{7-\sqrt{33}}{2}$ （$x_0=\frac{7+\sqrt{33}}{2}>2$，不符合题意，舍去）

此时 $y_0=x_0^{\ 2}-4x_0-5=\frac{3-3\sqrt{33}}{2}$，即点 $P\left(\frac{7-\sqrt{33}}{2},\frac{3-3\sqrt{33}}{2}\right)$；

当点 P 在对称轴右侧时，即 $2<x_0<5$ 时，



$PF=x_0-x_F=2x_0-4$，当 $PE=PF$ 时，! PEF 为等腰直角三角形，

即：$-x_0^{\ 2}+5x_0=2x_0-4$，整理得：$x_0^{\ 2}-3x_0-4=0$，

解得：$x_0=4$ （$x_0=-1<2$，不符合题意，舍去）

此时：$y_0=4^2-4\times4-5=-5$，即点 $P(4,-5)$；

综上所述，当点 P 的坐标为 $\left(\frac{7-\sqrt{33}}{2},\frac{3-3\sqrt{33}}{2}\right)$ 或 $(4,-5)$ 时，! PEF 为等腰直角三角形．

【点睛】本题二次函数综合题，考查了利用待定系数法求函数解析式，二次函数的性质及图象上的点的特点，等腰直角三角形的性质，解本题的关键是表示出点的坐标，进行分类讨论．