2023年武汉市初中毕业生学业考试

数学试卷

亲爱的同学：

在你答题前，请认真阅读下面的注意事项．

1.本试卷由第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分组成．全卷共6页，三大题，满分120分．考试用时120分钟．

2.答题前，请将你的姓名、准考证号填写在“答题卡”相应位置，并在“答题卡”背面左上角填写姓名和座位号，将条形码横贴在答题卡第1页右上“贴条形码区”．

3.答第Ⅰ卷（选择题）时，选出每小题答案后，用2*B*铅笔将“答题卡”上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案．答在“试卷”上无效．

4.答第Ⅱ卷（非选择题）时，答案用0.5毫米黑色笔迹签字笔书写在“答题卡”上，答在“试卷”上无效．

5.认真阅读答题卡上的注意事项．

预祝你取得优异成绩！

第Ⅰ卷（选择题共30分）

一、选择题（共10小题，每小题3分，共30分）下列各题中有且只有一个正确答案，请在答题卡上将正确答案的标号涂黑．

1. 实数 3 的相反数是（　）

A. 3　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $-\frac{1}{3}$　　D. -3

【答案】D

【解析】

【分析】根据相反数的定义进行判断即可．

【详解】解：实数 3 的相反数 -3 ，故 D 正确．

故选：D．

【点睛】本题考查了相反数的定义，熟练掌握知识点，只有符号不同的两个数互为相反数，是解题关键．

2. 现实世界中，对称现象无处不在，中国的方块字中有些也具有对称性．下列汉字是轴对称图形的是（　）

A. 国　　B. 家　　C. 昌　　D. 盛

【答案】C

【解析】

【分析】根据轴对称图形的概念即可解答．

【详解】解：A、不是轴对称图形，故此选项不合题意；

B、不是轴对称图形，故此选项不合题意；

C、是轴对称图形，故此选项符合题意；

D、不是轴对称图形，故此选项不合题意．

故选：C．

【点睛】本题主要考查了轴对称图形，关键是掌握如果一个图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，这个图形叫做轴对称图形．

3. 掷两枚质地均匀的骰子，下列事件是随机事件的是（　）

A. 点数的和为 1　　B. 点数的和为 6

C. 点数的和大于 12　　D. 点数的和小于 13

【答案】B

【解析】

【分析】根据事件发生的可能性大小判断即可．

【详解】解：A、点数和为 1，是不可能事件，不符合题意；

B、点数和为 6，是随机事件，符合题意；

C、点数和大于 12，是不可能事件，不符合题意；

D、点数的和小于 13，是必然事件，不符合题意．

故选：B．

【点睛】本题考查的是必然事件、不可能事件、随机事件的概念．必然事件指在一定条件下，一定发生的事件．不可能事件是指在一定条件下，一定不发生的事件，不确定事件即随机事件是指在一定条件下，可能发生也可能不发生的事件．

4. 计算 $\left(2a^2\right)^3$ 的结果是（　）

A $2\alpha^5$　　B. $6a^5$　　C. $8a^5$　　D. $8a^6$

【答案】D

【解析】

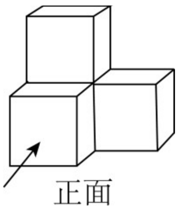
【分析】根据积的乘方与幂的乘方法则计算即可．

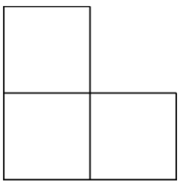
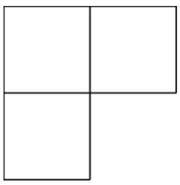
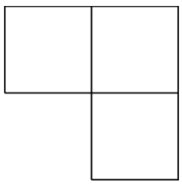
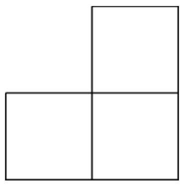
【详解】解：$\left(2a^2\right)^3=2^3\left(a^2\right)^3=8a^6$，

故选：D．

【点睛】本题考查积的乘方与幂的乘方，熟练掌握积的乘方与幂的乘方运算法则是解题的关键．

5. 如图是由 4 个相同的小正方体组成的几何体，它的左视图是（　）



A. 　B. 　C. 　D. 

【答案】A

【解析】

【分析】它的左视图，即从该几何体的左侧看到的是两列，左边一列两层，右边一列一层，因此选项 A 的图形符合题意．

【详解】解：从该几何体的左侧看到的是两列，左边一列两层，右边一列一层，因此选项 A 的图形符合题意，故 A 正确．

故选：A．

【点睛】本题考查简单几何体的三视图，理解三视图的意义，明确三视图的形状是正确判断的前提．

6. 关于反比例函数 $y=\frac{3}{x}$ ，下列结论正确的是（　）

A. 图像位于第二、四象限

B 图像与坐标轴有公共点

C. 图像所在的每一个象限内，y 随 x 的增大而减小

D. 图像经过点 $(a,a+2)$ ，则 $a=1$

【答案】C

【解析】

【分析】根据反比例函数的性质逐项排查即可解答．

【详解】解：A．$y=\frac{3}{x}$ 的图像位于第一、三象限，故该选项不符合题意；

B． $y=\frac{3}{x}$ 的图像与坐标轴没有有公共点，故该选项不符合题意；

C． $y=\frac{3}{x}$ 的图像所在的每一个象限内，y 随 x 的增大而减小，故该选项符合题意；

D．由 $y=\frac{3}{x}$ 的图像经过点 $(a,a+2)$ ，则 $a+2=\frac{3}{a}$ ，计算得 $a=1$ 或 $a=-3$ ，故该选项不符合题意．

故选 C．

【点睛】本题主要考查反比例函数的性质，明确题意、正确利用反比例函数的性质是解答本题的关键．

7. 某校即将举行田径运动会，“体育达人”小明从“跳高”“跳远”“100 米”“400 米”四个项目中，随机选择两项，则他选择“100 米”与“400 米”两个项目的概率是（　）

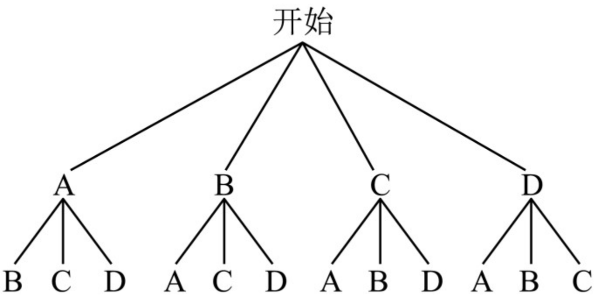
A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{6}$　　D. $\frac{1}{12}$

【答案】C

【解析】

【分析】设“跳高”“跳远”“100 米”“400 米”四个项目分别为 A、B、C、D，画出树状图，找到所有情况数和满足要求的情况数，利用概率公式求解即可．

【详解】解：设“跳高”“跳远”“100 米”“400 米”四个项目分别为 A、B、C、D ，画树状图如下：



由树状图可知共有 12 种等可能情况，他选择“100 米”与“400 米”两个项目即选择 C 和 D 的情况数共有 2 种，

∴选择“100 米”与“400 米”两个项目的概率为 $\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$，

故选：C

【点睛】此题考查了树状图或列表法求概率，正确画出树状图或列表，找到所有等可能情况数和满足要求情况数是解题的关键．

8. 已知 $x^2-x-1=0$，计算 $\left(\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x}\right)\div\frac{x^2-x}{x^2+2x+1}$ 的值是（　）

A. 1　　B. -1　　C. 2　　D. -2

【答案】A

【解析】

【分析】根据分式的加减运算以及乘除运算法则进行化简，然后把 $x^2=x+1$ 代入原式即可求出答案．

【详解】解：$\left(\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x}\right)\div\frac{x^2-x}{x^2+2x+1}$

$=\left[\frac{2x}{x(x+1)}-\frac{x+1}{x(x+1)}\right]\div\frac{x(x-1)}{(x+1)^2}$

$=\frac{x-1}{x(x+1)}\cdot\frac{(x+1)^2}{x(x-1)}$

$=\frac{x+1}{x^2}$，

∵$x^2-x-1=0$，

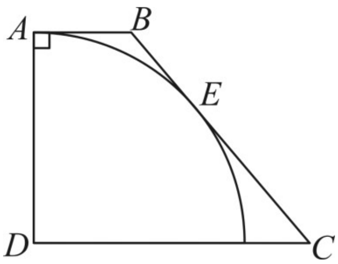
∴$x^2=x+1$，

∴原式= $\frac{x+1}{x^2}$ =1，

故选 A.

【点睛】本题考查分式的混合运算及求值．解题的关键是熟练运用分式的加减运算以及乘除运算法则．

9. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AB\parallel CD, AD\perp AB$，以 D 为圆心，AD 为半径的弧恰好与 BC 相切，切点为 E．若 $\frac{AB}{CD}=\frac{1}{3}$，则 $\sin C$ 的值是（　）



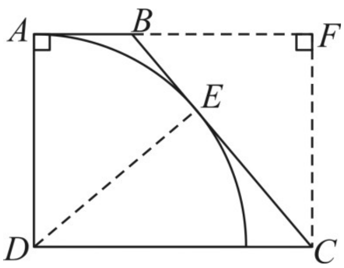
A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{3}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{\sqrt{7}}{4}$

【答案】B

【解析】

【分析】作 $CF\perp AB$ 延长线于 F 点，连接 DE，根据圆的基本性质以及切线的性质，分别利用勾股定理求解在 $\mathrm{Rt}\triangle DEC$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle BFC$，最终得到 DE，即可根据正弦函数的定义求解．

【详解】解：如图所示，作 $CF\perp AB$ 延长线于 F 点，连接 DE，



∵ $AD\perp AB$，$AB\parallel CD$，

$\therefore \angle FAD=\angle ADC=\angle F=90^{\circ}$，

$\therefore$四边形$ADCF$为矩形，$AF=DC$，$AD=FC$，

$\therefore AB$为$\odot D$的切线，

由题意，BE为$\odot D$的切线，

$\therefore DE\perp BC$，$AB=BE$，

$\because \dfrac{AB}{CD}=\dfrac{1}{3}$，

$\therefore$设$AB=BE=a$，$CD=3a$，$CE=x$，

则$BF=AF-AB=CD-AB=2a$，$BC=BE+CE=a+x$，

在$\text{Rt}\triangle DEC$中，$DE^2=CD^2-CE^2=9a^2-x^2$，

在$\text{Rt}\triangle BFC$中，$FC^2=BC^2-BF^2=(a+x)^2-(2a)^2$，

$\because DE=DA=FC$，

$\therefore 9a^2-x^2=(a+x)^2-(2a)^2$，

解得：$x=2a$或$x=-3a$（不合题意，舍去），

$\therefore CE=2a$，

$\therefore DE=\sqrt{CD^2-CE^2}=\sqrt{9a^2-4a^2}=\sqrt{5}a$，

$\therefore \sin C=\dfrac{DE}{DC}=\dfrac{\sqrt{5}a}{3a}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，

故选：B．

【点睛】本题考查圆的切线的判定与性质，解直角三角形，以及正弦函数的定义等，综合性较强，熟练运用圆的相关性质以及切线的性质等是解题关键．

10. 皮克定理是格点几何学中的一个重要定理，它揭示了以格点为顶点的多边形的面积 $S=N+\frac{1}{2}L-1$，其中 N,L 分别表示这个多边形内部与边界上的格点个数．在平面直角坐标系中，横、纵坐标都是整数的点为格点．已知 $A(0,30)$，$B(20,10),O(0,0)$，则 $\triangle ABO$ 内部的格点个数是（　）

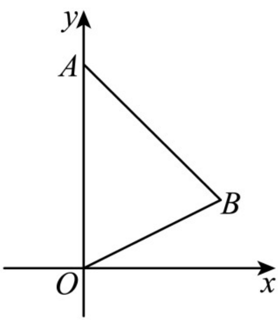
A. 266　　　　B. 270　　　　C. 271　　　　D. 285

【答案】C

【解析】

【分析】首先根据题意画出图形，然后求出 $\triangle ABO$ 的面积和边界上的格点个数，然后代入求解即可．

【详解】如图所示，



$\because A(0,30)$，$B(20,10),O(0,0)$，

$\therefore S_{\text{V}ABO}=\frac{1}{2}\times30\times20=300$，

$\because OA$ 上有 31 个格点，

OB 上的格点有 $(2,1)$，$(4,2)$，$(6,3)$，$(8,4)$，$(10,5)$，$(12,6)$，$(14,7)$，$(16,8)$，$(18,9)$，$(20,10)$，

共 10 个格点，

AB 上的格点有 $(1,29)$，$(2,28)$，$(3,27)$，$(4,26)$，$(5,25)$，$(6,24)$，$(7,23)$，$(8,22)$，$(9,21)$，$(10,20)$，$(11,19)$，$(12,18)$，$(13,17)$，$(16,14)$，$(15,15)$，$(16,14)$，$(17,13)$，$(18,12)$，$(19,11)$，

共 19 个格点，

∴边界上的格点个数 $L=31+10+19=60$，

∵ $S=N+\frac{1}{2}L-1$，

∴ $300=N+\frac{1}{2}\times60-1$，

∴解得 $N=271$．

∴ $\triangle ABO$ 内部的格点个数是 271．

故选：C．

【点睛】本题主要考查了坐标与图形的性质，解决问题的关键是掌握数形结合的数学思想．

第Ⅱ卷（非选择题共 90 分）

二、填空题（共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分）下列各题不需要写出解答过程，请将结果直接填写在答题卡指定的位置．

11. 写出一个小于 4 的正无理数是________．

【答案】$\sqrt{2}$（答案不唯一）

【解析】

【分析】根据无理数估算的方法求解即可．

【详解】解：∵ $\sqrt{2}<\sqrt{16}$，

∴ $\sqrt{2}<4$．

故答案为：$\sqrt{2}$（答案不唯一）．

【点睛】本题主要考查了无理数的估算，准确计算是解题的关键．

12. 新时代十年来，我国建成世界上规模最大的社会保障体系．其中基本医疗保险的参保人数由 5.4 亿增加到 13.6 亿，参保率稳定在 95%．将数据 13.6 亿用科学记数法表示为 1.36×10^{n} 的形式，则 n 的值是_______

_（备注：1 亿 = 100000000）．

【答案】9

【解析】

【分析】将 13.6 亿=1360000000写成 $a\times10^{n}$（$1<|a|<10$，n 为整数）的形式即可．

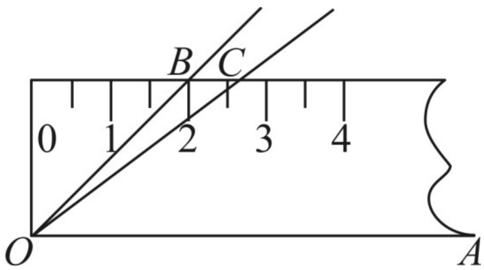
【详解】解：13.6 亿=$1360000000=1.36\times10^{9}$．

故答案为 9．

【点睛】本题主要考查了科学记数法，将原数写成 $a\times10^{n}$（$1<|a|<10$，n 为整数）的形式，确定 a 和 n 的值是解答本题的关键．

13. 如图，将 45° 的∠AOB 按图摆放在一把刻度尺上，顶点 O 与尺下沿的端点重合，OA 与尺下沿重合，OB 与尺上沿的交点 B 在尺上的读数为 2cm，若按相同的方式将 37° 的∠AOC 放置在该尺上，则 OC 与尺上沿的交点 C 在尺上的读数约为____cm

（结果精确到 0.1 cm，参考数据：$\sin37^{\circ}\approx0.60$，$\cos37^{\circ}\approx0.80$，$\tan37^{\circ}\approx0.75$）

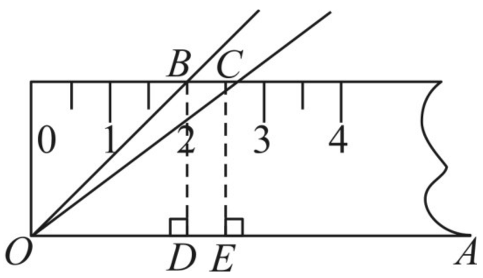


【答案】2.7．

【解析】

【详解】解直角三角形的应用，等腰直角三角形的性质，矩形的性质，锐角三角函数定义，特殊角的三角函数值．

过点 B 作 BD⊥OA 于 D，过点 C 作 CE⊥OA 于 E．



在△BOD 中，∠BDO=90°，∠DOB=45°，∴BD=OD=2cm．

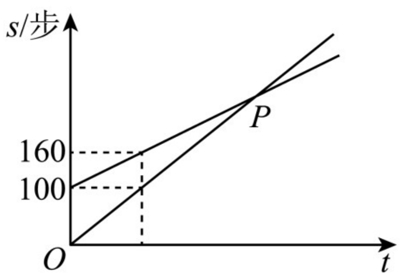
∴CE=BD=2cm．

在△COE 中，∠CEO=90°，∠COE=37°，

$\because \tan 37^{\circ} = \frac{CE}{OE} \approx 0.75$，∴OE≈2.7cm．

∴OC 与尺上沿的交点 C 在尺上的读数约为 2.7cm．

14. 我国古代数学经典著作《九章算术》记载：“今有善行者行一百步，不善行者行六十步．今不善行者先行一百步，善行者追之，问几何步及之？”如图是善行者与不善行者行走路程 s（单位：步）关于善行者的行走时间 t 的函数图象，则两图象交点 P 的纵坐标是________．



【答案】250

【解析】

【分析】设图象交点 P 的纵坐标是 m，由“今有善行者行一百步，不善行者行六十步．”可知不善行者的速度是善行者速度的 $\frac{3}{5}$．根据速度关系列出方程，解方程并检验即可得到答案．

【详解】解：设图象交点 P 的纵坐标是 m，由“今有善行者行一百步，不善行者行六十步．”可知不善行者的速度是善行者速度的 $\frac{3}{5}$．

$\therefore \frac{m-100}{m} = \frac{3}{5}$，

解得 $m = 250$，

经检验 $m = 250$ 是方程的根且符合题意，

∴两图象交点 P 的纵坐标是 250 ．

故答案为：250

【点睛】此题考查了从函数图象获取信息、列分式方程解决实际问题，数形结合和准确计算是解题的关键．

15. 抛物线 $y=ax^2+bx+c$（a,b,c 是常数，$c<0$）经过 $(1,1),(m,0),(n,0)$ 三点，且 $n\geq3$．下列四个结论：

①$b<0$；

②$4ac-b^2<4a$；

③当 $n=3$ 时，若点 $(2,t)$ 在该抛物线上，则 $t>1$；

④若关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=x$ 有两个相等的实数根，则 $0<m\leq\frac{1}{3}$．

其中正确的是________（填写序号）．

【答案】②③④

【解析】

【分析】①根据图象经过 $(1,1)$，$c<0$，且抛物线与 x 轴的一个交点一定在 $(3,0)$ 或 $(3,0)$ 的右侧，判断出抛物线的开口向下，$a<0$，再把 $(1,1)$ 代入 $y=ax^2+bx+c$ 得 $a+b+c=1$，即可判断①错误；

②先得出抛物线的对称轴在直线 $x=1.5$ 的右侧，得出抛物线的顶点在点 $(1,1)$ 的右侧，得出 $\frac{4ac-b^2}{4a}>1$，根据 $4a<0$，即可得出 $4ac-b^2<4a$，即可判断②正确；

③先得出抛物线对称轴在直线 $x=1.5$ 的右侧，得出 $(1,1)$ 到对称轴的距离大于 $(2,t)$ 到对称轴的距离，根据 $a<0$，抛物线开口向下，距离抛物线越近的函数值越大，即可得出③正确；

④根据方程有两个相等的实数解，得出 $\Delta=(b-1)^2-4ac=0$，把 $(1,1)$ 代入 $y=ax^2+bx+c$ 得

$a+b+c=1$，即$1-b=a+c$，求出$a=c$，根据根与系数的关系得出$mn=\frac{c}{a}=1$，即$n=\frac{1}{m}$，根据$n\geq3$，

得出$\frac{1}{m}\geq3$，求出m的取值范围，即可判断④正确．

【详解】解：①图象经过$(1,1)$，$c<0$，即抛物线与y轴的负半轴有交点，如果抛物线的开口向上，则抛物线与x轴的两个交点都在$(1,0)$的左侧，

$\because(n,0)$中$n\geq3$，

$\therefore$抛物线与x轴的一个交点一定在$(3,0)$或$(3,0)$的右侧，

$\therefore$抛物线的开口一定向下，即$a<0$，

把$(1,1)$代入$y=ax^2+bx+c$得$a+b+c=1$，

即$b=1-a-c$，

$\because a<0$，$c<0$，

$\therefore b>0$，故①错误；

②$\because a<0$，$b>0$，$c<0$，

$\therefore\frac{c}{a}>0$，

$\therefore$方程$ax^2+bx+c=0$的两个根的积大于0，即$mn>0$，

$\because n\geq3$，

$\therefore m>0$，

$\therefore\frac{m+n}{2}>1.5$，

即抛物线的对称轴在直线 $x=1.5$ 的右侧，

∴抛物线的顶点在点 $(1,1)$ 的右侧，

∴ $\frac{4ac-b^2}{4a}>1$ ，

∵ $4a<0$ ，

∴ $4ac-b^2<4a$ ，故②正确；

③∵ $m>0$ ，

∴当 $n=3$ 时， $\frac{m+n}{2}>1.5$ ，

∴抛物线对称轴在直线 $x=1.5$ 的右侧，

∴ $(1,1)$ 到对称轴的距离大于 $(2,t)$ 到对称轴的距离，

∵ $a<0$ ，抛物线开口向下，

∴距离抛物线越近的函数值越大，

∴ $t>1$ ，故③正确；

④方程 $ax^2+bx+c=x$ 可变为 $ax^2+(b-1)x+c=x$ ，

∵方程有两个相等的实数解，

∴ $\triangle=(b-1)^2-4ac=0$ ，

∵把 $(1,1)$ 代入 $y=ax^2+bx+c$ 得 $a+b+c=1$ ，即 $1-b=a+c$ ，

∴ $(a+c)^2-4ac=0$ ，

即 $a^2+2ac+c^2-4ac=0$ ，

∴ $(a-c)^2=0$ ，

$\therefore a-c=0$，

即 $a=c$，

$\because (m,0),(n,0)$ 在抛物线上，

$\therefore m$，n 为方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根，

$\therefore mn=\frac{c}{a}=1$，

$\therefore n=\frac{1}{m}$，

$\because n\geq 3$，

$\therefore \frac{1}{m}\geq 3$，

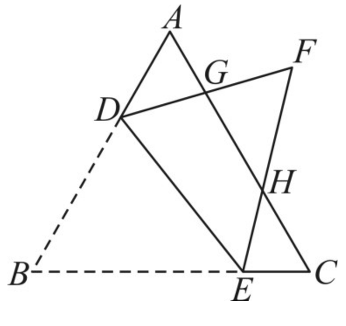
$\therefore 0<m\leq\frac{1}{3}$，故④正确；

综上分析可知，正确的是②③④．

故答案为：②③④．

【点睛】本题主要考查了二次函数的图象和性质，解题的关键是熟练掌握二次函数的性质，根据已知条件判断得出抛物线开口向下 $a<0$ ．

16. 如图，DE 平分等边 $\triangle ABC$ 的面积，折叠 $\triangle BDE$ 得到 $\triangle FDE, AC$ 分别与 DF, EF 相交于 G, H 两点．若 $DG=m, EH=n$，用含 m, n 的式子表示 GH 的长是________．



【答案】$\sqrt{m^2+n^2}$

【解析】

【分析】先根据折叠的性质可得$S_{\triangle BDE}=S_{\triangle FDE}$，$\angle F=\angle B=60^{\circ}$，从而可得$S_{\triangle FHG}=S_{\triangle ADG}+S_{\triangle CHE}$，再根据相似三角形的判定可证$\triangle ADG\backsim\triangle FHG,\triangle CHE\backsim\triangle FHG$，根据相似三角形的性质可得$\frac{S_{\triangle ADG}}{S_{\triangle FHG}}=\left(\frac{DG}{GH}\right)^2=\frac{m^2}{GH^2}$，$\frac{S_{\triangle CHE}}{S_{\triangle FHG}}=\left(\frac{EH}{GH}\right)^2=\frac{n^2}{GH^2}$，然后将两个等式相加即可得．

【详解】解：$\because$ $\triangle ABC$是等边三角形，

$\therefore\angle A=\angle B=\angle C=60^{\circ}$，

$\because$折叠$\triangle BDE$得到$\triangle FDE$，

$\therefore\triangle BDE\cong\triangle FDE$，

$\therefore S_{\triangle BDE}=S_{\triangle FDE}$，$\angle F=\angle B=60^{\circ}=\angle A=\angle C$，

$\because$ DE平分等边$\triangle ABC$的面积，

$\therefore S_{梯形ACED}=S_{\triangle BDE}=S_{\triangle FDE}$，

$\therefore S_{\triangle FHG}=S_{\triangle ADG}+S_{\triangle CHE}$，

又$\because$ $\angle AGD=\angle FGH,\angle CHE=\angle FHG$，

$\therefore\triangle ADG\backsim\triangle FHG,\triangle CHE\backsim\triangle FHG$，

$\therefore\frac{S_{\triangle ADG}}{S_{\triangle FHG}}=\left(\frac{DG}{GH}\right)^2=\frac{m^2}{GH^2}$，$\frac{S_{\triangle CHE}}{S_{\triangle FHG}}=\left(\frac{EH}{GH}\right)^2=\frac{n^2}{GH^2}$，

$\therefore\frac{S_{\triangle ADG}}{S_{\triangle FHG}}+\frac{S_{\triangle CHE}}{S_{\triangle FHG}}=\frac{m^2+n^2}{GH^2}=\frac{S_{\triangle ADG}+S_{\triangle CHE}}{S_{\triangle FHG}}=1$，

$\therefore GH^2 = m^2 + n^2$，

解得 $GH = \sqrt{m^2 + n^2}$ 或 $GH = -\sqrt{m^2 + n^2}$ （不符合题意，舍去），

故答案为：$\sqrt{m^2 + n^2}$ ．

【点睛】本题考查了等边三角形的性质、折叠的性质、相似三角形的判定与性质等知识点，熟练掌握相似三角形的判定与性质是解题关键．

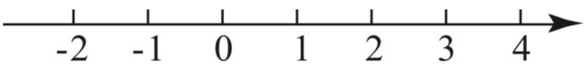
三、解答题（共 8 小题，共 72 分）下列各题需要在答题卡指定的位置写出文字说明、证明过程、演算步骤或画出图形．

17. 解不等式组 $\begin{cases} 2x - 4 < 2① \\ 3x + 2 \geq x② \end{cases}$ 请按下列步骤完成解答．

（1）解不等式①，得________；

（2）解不等式②，得________；

（3）把不等式①和②的解集在数轴上表示出来；



（4）原不等式组　解集是________．

【答案】（1）$x < 3$

（2）$x \geq -1$

（3）见解析　（4）$-1 \leq x < 3$

【解析】

【分析】（1）直接解不等式①即可解答；

（2）直接解不等式①即可解答；

（3）在数轴上表示出①、②的解集即可；

（3）数轴上表示的不等式的解集，确定不等式组的解集即可．

【小问 1 详解】

解：$2x-4<2$，

$2x<6$

$x<3$.

故答案为：$x<3$.

【小问2详解】

解：$3x+2\geq x$，

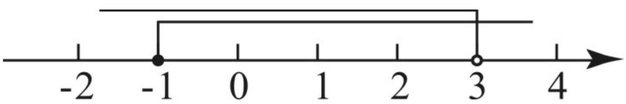
$2x\geq -2$

$x\geq -1$.

故答案为：$x\geq -1$.

【小问3详解】

解：把不等式①和②的解集在数轴上表示出来：



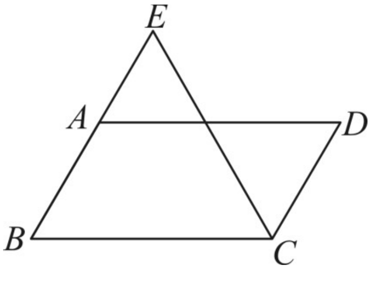
【小问4详解】

解：由图可知原不等式组的解集是$-1\leq x<3$.

故答案为：$-1\leq x<3$.

【点睛】本题考查的是解一元一次不等式组，正确求出每一个不等式解集和在数轴上表示不等式的解集是解答本题的关键．

18. 如图，在四边形$ABCD$中，$AD\parallel BC, \angle B=\angle D$，点$E$在$BA$的延长线上，连接$CE$．



（1）求证：$\angle E=\angle ECD$；

（2）若 $\angle E=60^{\circ}, CE$ 平分 $\angle BCD$，直接写出 $\triangle BCE$ 的形状．

【答案】（1）见解析　（2）等边三角形

【解析】

【分析】（1）由平行线的性质得到 $\angle EAD=\angle B$，已知 $\angle B=\angle D$，则 $\angle EAD=\angle D$，可判定 $BE\parallel CD$，即可得到 $\angle E=\angle ECD$；

（2）由 $\angle E=60^{\circ}$，$\angle E=\angle ECD$ 得到 $\angle ECD=\angle E=60^{\circ}$，由 CE 平分 $\angle BCD$，得到 $\angle BCE=\angle ECD=60^{\circ}$，进一步可得 $\angle BCE=\angle E=\angle BEC$，即可证明 $\triangle BCE$ 是等边三角形．

【小问 1 详解】

证明：$\because AD\parallel BC$，

$\therefore \angle EAD=\angle B$，

$\angle B=\angle D$,

$\therefore \angle EAD=\angle D$，

$\therefore BE\parallel CD$,

$\therefore \angle E=\angle ECD$．

【小问 2 详解】

$\because \angle E=60^{\circ}$，$\angle E=\angle ECD$，

$\therefore \angle ECD=\angle E=60^{\circ}$，

$\because CE$ 平分 $\angle BCD$，

$\therefore \angle BCE=\angle ECD=60^{\circ}$，

$\therefore \angle BCE = \angle E = 60^{\circ}$，

$\therefore \angle B = 180^{\circ} - \angle BCE - \angle E = 60^{\circ}$，

$\therefore \angle BCE = \angle E = \angle B$，

$\therefore \triangle BCE$是等边三角形

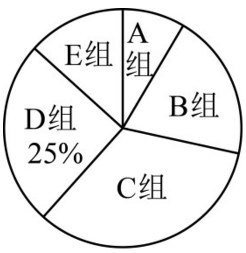
【点睛】此题考查了平行线的判定和性质、等边三角形的判定、三角形内角和定理、角平分线的定义等知识，熟练掌握平行线的判定和性质是解题的关键．

19. 某校为了解学生参加家务劳动的情况，随机抽取了部分学生在某个休息日做家务的劳动时间t（单位：h）作为样本，将收集的数据整理后分为A,B,C,D,E五个组别，其中A组的数据分别为：0.5，0.4，0.4，0.4，0.3，绘制成如下不完整的统计图表．

各组劳动时间的频数分布表

组别	时间t/h	频数
A	$0 < t \leq 0.5$	5
B	$0.5 < t \leq 1$	a
C	$1 < t \leq 1.5$	20
D	$1.5 < t \leq 2$	15
E	$t > 2$	8

各组劳动时间的扇形统计图



请根据以上信息解答下列问题．

（1）A组数据的众数是________；

（2）本次调查的样本容量是________，B组所在扇形的圆心角的大小是________；

（3）若该校有 1200 名学生，估计该校学生劳动时间超过 $1h$ 的人数．

【答案】（1）0.4

（2）60，72°

（3）860 人

【解析】

【分析】（1）根据众数是一组数据中出现次数最多的数据进行求解即可；

（2）利用 D 组的频数除以对应的百分比即可得到样本容量，利用样本容量减去 A、C、D、E 组的频数得到 B 组的频数，再用 360° 乘以 B 组占样本的百分比即可得到 B 组所在扇形的圆心角的大小；

（3）用该校所有学生数乘以样本中劳动时间超过 $1h$ 的人数的占比即可估计该校学生劳动时间超过 $1h$ 的人数．

【小问 1 详解】

解：$\because A$ 组的数据为：0.5，0.4，0.4，0.4，0.3，共有 5 个数据，出现次数最多的是 0.4，共出现了 3 次，

$\therefore A$ 组数据的众数是 0.4；

故答案为：0.4

【小问 2 详解】

由题意可得，本次调查的样本容量是 $15\div25\%=60$，

由题意得 $a=60-5-20-15-8=12$，

$\therefore B$ 组所在扇形的圆心角的大小是 $360^{\circ}\times\frac{12}{60}=72^{\circ}$，

故答案为：60，72°

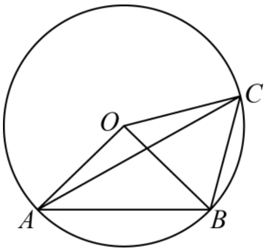
【小问 3 详解】

解：$1200\times\frac{20+15+8}{60}=860$（人）．

答：该校学生劳动时间超过1h的大约有860人．

【点睛】此题考查了扇形统计图和频数分布表的信息关联，还考查了众数、样本容量、用样本估计总体等知识，读懂题意，找准扇形统计图和频数分布表的联系，准确计算是解题的关键．

20. 如图，OA, OB, OC 都是 $\odot O$ 的半径，$\angle ACB=2\angle BAC$．



（1）求证：$\angle AOB=2\angle BOC$；

（2）若 $AB=4, BC=\sqrt{5}$，求 $\odot O$ 的半径．

【答案】（1）见解析　（2）$\frac{5}{2}$

【解析】

【分析】（1）由圆周角定理得出，$\angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB, \angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC$，再根据 $\angle ACB=2\angle BAC$，即可得出结论；

（2）过点 O 作半径 $OD\perp AB$ 于点 E，根据垂径定理得出 $\angle DOB=\frac{1}{2}\angle AOB, AE=BE$，证明 $\angle DOB=\angle BOC$，得出 $BD=BC$，在 Rt$\triangle BDE$ 中根据勾股定理得出 $DE=\sqrt{BD^2-BE^2}=1$，在 Rt$\triangle BOE$ 中，根据勾股定理得出 $OB^2=(OB-1)^2+2^2$，求出 OB 即可．

【小问1详解】

证明：$\because \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AB}$，

$\therefore \angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB$，

$\therefore \overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{BC}$，

$\therefore \angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC$，

$\because \angle ACB=2\angle BAC$，

$\therefore \angle AOB=2\angle BOC$．

【小问 2 详解】

解：过点 O 作半径 $OD\perp AB$ 于点 E，则 $\angle DOB=\frac{1}{2}\angle AOB, AE=BE$，

$\because \angle AOB=2\angle BOC$，

$\therefore \angle DOB=\angle BOC$，

$\therefore BD=BC$，

$\because AB=4, BC=\sqrt{5}$，

$\therefore BE=2, DB=\sqrt{5}$，

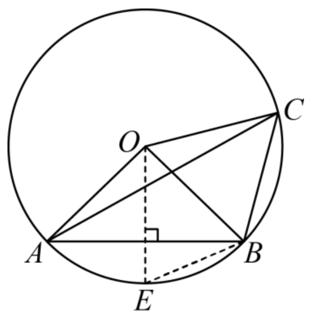
在 $\mathrm{Rt}\triangle BDE$ 中，$\because \angle DEB=90^{\circ}$

$\therefore DE=\sqrt{BD^{2}-BE^{2}}=1$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle BOE$ 中，$\because \angle OEB=90^{\circ}$，

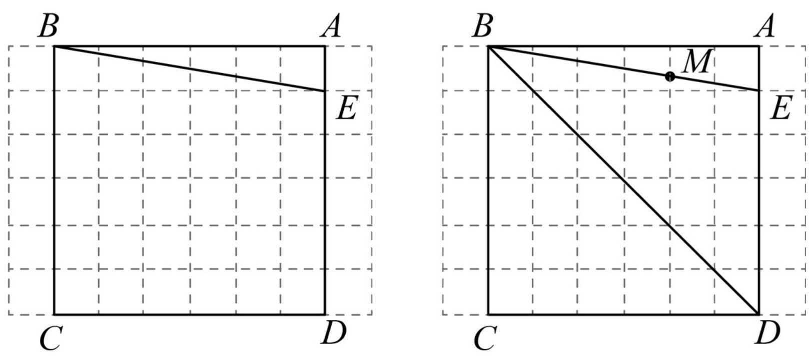
$\therefore OB^{2}=(OB-1)^{2}+2^{2}$，

$\therefore OB=\frac{5}{2}$，即 $\odot O$ 的半径是 $\frac{5}{2}$．



【点睛】本题主要考查了勾股定理，垂径定理，圆周角定理，解题的关键是作出辅助线，熟练掌握圆周角定理．

21. 如图是由小正方形组成的8×6网格，每个小正方形的顶点叫做格点，正方形$ABCD$四个顶点都是格点，E是AD上的格点，仅用无刻度的直尺在给定网格中完成画图，画图过程用虚线表示．



(1)　　　　　　　　(2)

（1）在图（1）中，先将线段BE绕点B顺时针旋转90°，画对应线段BF，再在CD上画点G，并连接BG，使$\angle GBE=45^{\circ}$；

（2）在图（2）中，M是BE与网格线的交点，先画点M关于BD的对称点N，再在BD上画点H，并连接MH，使$\angle BHM=\angle MBD$．

【答案】（1）见解析　（2）见解析

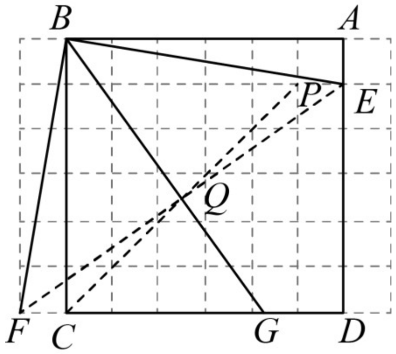
【解析】

【分析】（1）取格点F，连接BF，连接EF，再取格点P，连接CP交EF于Q，连接BQ，延长交CD于G即可．

（2）取格点F，连接BF、EF，交格线于N，再取格点P，Q，连接PQ交EF于O，连接MO并延长交BD于H即可．

【小问1详解】

解：如图（1）所示，线段BF和点G即为所作；



$\because BC=BA$，$CF=AE$，$\angle BCF=\angle BAE=90^\circ$，

$\therefore \triangle BCF\cong\triangle BAE(\text{SAS})$

$\therefore \angle CBF=\angle ABE$

$\therefore \angle FBE=\angle CBF+\angle CBE=\angle ABE+\angle CBE=\angle CBA=90^\circ$

$\therefore$线段BE绕点B顺时针旋转90°得BF；

$\because PE\parallel FC$，

$\therefore \angle PEQ=\angle CFQ$，$\angle EPQ=\angle FCQ$，

$\because PE=FC$，

$\therefore \triangle PEQ\cong\triangle CFQ(\text{ASA})$，

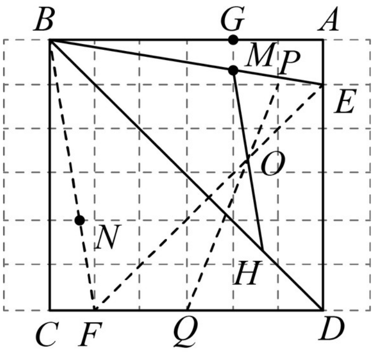
$\therefore EQ=FQ$

由旋转性质得$BE=BF$，$\angle EBF=90^\circ$，

$\therefore \angle GBE=\frac{1}{2}\angle EBF=45^{\circ}$．

【小问2详解】

解：如图（2）所示，点N与点H即为所作．



(2)

$\because BC=BA$，$\angle BCF=\angle BAE=90^{\circ}$，$CF=AE$，

$\therefore \triangle BCF\cong\triangle BAE(\text{SAS})$，

$\therefore BF=BE$

$\because DF=DE$

$\therefore BF$与BE关于BD对称，

$\because BN=BM$

$\therefore M$、N关于BD对称；

$\because PE\parallel FC$，

$\therefore \triangle POE\backsim\triangle QOF$，

$\therefore \frac{EO}{OF}=\frac{PE}{FQ}=\frac{1}{2}$

$\because MG\parallel AE$

$\therefore \dfrac{EM}{MB}=\dfrac{AG}{GB}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore \dfrac{EM}{EB}=\dfrac{EO}{EF}=\dfrac{1}{3}$

$\because \angle MEO=\angle BEF$

$\therefore \triangle MEO\backsim\triangle BEF$

$\therefore \angle EMO=\angle EBF$

$\therefore OM \parallel BF$

$\therefore \angle MHB=\angle FBH$

由轴对称可得$\angle FBH=\angle EBH$

$\therefore \angle BHM=\angle MBD$．

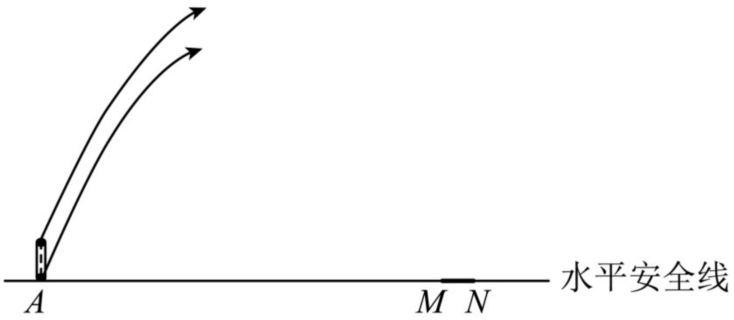
【点睛】本题考查利用网格作图，轴对称性质，相似三角形的判定和性质，平行线的判定与性质．取恰当的格点是解题的关键．

22. 某课外科技活动小组研制了一种航模飞机．通过实验，收集了飞机相对于出发点的飞行水平距离x（单位：m）以、飞行高度y（单位：m）随飞行时间t（单位：s）变化的数据如下表．

飞行时间t/s	0	2	4	6	8	…
飞行水平距离x/m	0	10	20	30	40	…
飞行高度y/m	0	22	40	54	64	…

探究发现：x与t，y与t之间的数量关系可以用我们已学过的函数来描述．直接写出x关于t的函数解析式和y关于t的函数解析式（不要求写出自变量的取值范围）．

问题解决：如图，活动小组在水平安全线上A处设置一个高度可以变化的发射平台试飞该航模飞机．根据上面的探究发现解决下列问题．



（1）若发射平台相对于安全线的高度为0m，求飞机落到安全线时飞行的水平距离；

（2）在安全线上设置回收区域 $MN, AM=125\text{m}, MN=5\text{m}$ ．若飞机落到 MN 内（不包括端点 M, N ），求发射平台相对于安全线的高度的变化范围．

【答案】探索发现：$x=5t, y=-\frac{1}{2}t^2+12t$ ；问题解决：（1）120m ；（2）大于 12.5m 且小于 26m

【解析】

【分析】探究发现：根据待定系数法求解即可；

问题解决：（1）令二次函数 $y=0$ 代入函数解析式即可求解；

（2）设发射平台相对于安全线的高度为 $n\text{m}$ ，则飞机相对于安全线的飞行高度 $y'=-\frac{1}{2}t^2+12t+n$ ．结合 $25<t<26$ ，即可求解.

【详解】探究发现：x 与 t 是一次函数关系，y 与 t 是二次函数关系，

设 $x=kt$ ，$y=ax^2+bx$ ，

由题意得：$10=2k$ ，$\begin{cases}4a+2b=22\\16a+4b=40\end{cases}$ ，

解得：$k=5$ ，$a=-\frac{1}{2}$ ，$b=12$ ，

$\therefore x=5t$ ，$y=-\frac{1}{2}t^2+12t$ ．

问题解决（1） 解：依题总，得 $-\frac{1}{2}t^2+12t=0$.

解得，$t_1=0$ （舍），$t_2=24$ ，

当 $t=24$ 时，$x=120$.

答：飞机落到安全线时飞行的水平距离为 120m .

（2）解：设发射平台相对于安全线的高度为 $n\text{m}$ ，飞机相对于安全线的飞行高度 $y'=-\frac{1}{2}t^2+12t+n$.

$\because 125<x<130$,

$\therefore 125<5t<130$,

$\therefore 25<t<26$,

在 $y'=\frac{1}{2}t^2+12t+n$ 中，

当 $t=25, y'=0$ 时，$n=12.5$ ；

当 $t=26, y'=0$ 时，$n=26$.

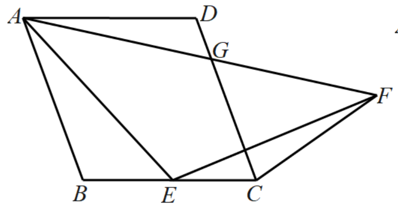
$\therefore 12.5<n<26$.

答：发射平台相对于安全线的高度的变化范围是大于 12.5m 且小于 26m .

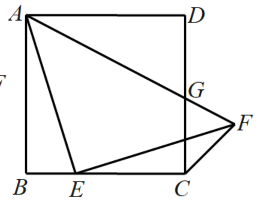
【点睛】本题考查了一次函数与二次函数的应用，利用待定系数法求函数的解析式，关键是把实际问题分析转变成数学模型．

23. 问题提出：如图（1），E 是菱形 $ABCD$ 边 BC 上一点，$\triangle AEF$ 是等腰三角形，$AE=EF$ ，

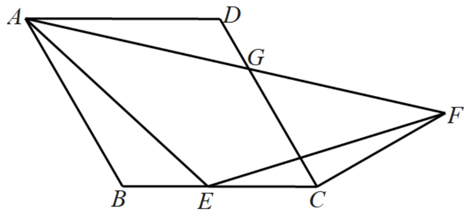
$\angle AEF=\angle ABC=\alpha\left(a\geq 90^\circ\right), AF$ 交 CD 于点 G ，探究 $\angle GCF$ 与 α 的数量关系．



(1)



(2)



(3)

问题探究：

（1）先将问题特殊化，如图（2），当$\alpha=90^{\circ}$时，直接写出$\angle GCF$大小；

（2）再探究一般情形，如图（1），求$\angle GCF$与α的数量关系．

问题拓展：

（3）将图（1）特殊化，如图（3），当$\alpha=120^{\circ}$时，若$\frac{DG}{CG}=\frac{1}{2}$，求$\frac{BE}{CE}$的值．

【答案】（1）45°

（2）$\angle GCF=\frac{3}{2}\alpha-90^{\circ}$

（3）$\frac{BE}{CE}=\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】（1）延长BC过点F作$FH\perp BC$，证明$\triangle ABE\cong\triangle BHF$即可得出结论．

（2）在AB上截取AN，使$AN=EC$，连接NE，证明$\triangle ANE\cong\triangle ECF$，通过边和角的关系即可证明．

（3）过点A作CD的垂线交CD的延长线于点P，设菱形的边长为$3m$，由（2）知，

$\angle GCF=\frac{3}{2}a-90^{\circ}=90^{\circ}$，通过相似求出$CF=\frac{6\sqrt{3}}{5}m$，即可解出．

【小问1详解】

延长BC过点F作$FH\perp BC$，

$\therefore \angle BAE + \angle AEB = 90^\circ$,

$\angle FEH + \angle AEB = 90^\circ$,

$\therefore \angle BAE = \angle FEH$,

在$\triangle EBA$和$\triangle FHE$中

$$\begin{cases} \angle ABE = \angle EHF \\ \angle BAE = \angle FEH \\ AE = EF \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle BHF$,

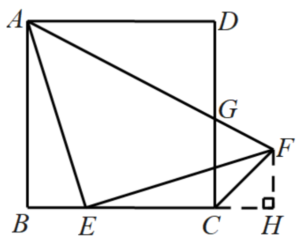
$\therefore AB = EH$,

$BE = FH$,

$\therefore BC = EH$,

$\therefore BE = CH = FH$,

$\therefore \angle GCF = \angle FCH = 45^\circ$.



故答案为：45°.

【小问2详解】

解：在AB上截取AN，使$AN = EC$，连接NE.

$\because \angle ABC + \angle BAE + \angle AEB = \angle AEF + \angle FEC + \angle AEB = 180^\circ$,

$\angle ABC=\angle AEF$，

$\therefore \angle EAN=\angle FEC$．

$\because AE=EF$，

$\therefore \triangle ANE\cong\triangle ECF$．

$\therefore \angle ANE=\angle ECF$．

$\because AB=BC$,

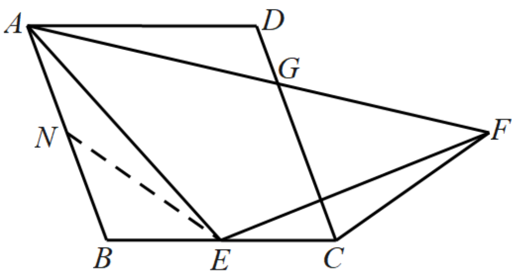
$\therefore BN=BE$

$\because \angle EBN=\alpha$，

$\therefore \angle BNE=90^\circ-\frac{1}{2}\alpha$．

$\therefore \angle GCF=\angle ECF-\angle BCD=\angle ANE-\angle BCD$

$=\left(90^\circ+\frac{1}{2}\alpha\right)-(180^\circ-\alpha)=\frac{3}{2}\alpha-90^\circ$．



【小问3详解】

解：过点 A 作 CD 的垂线交 CD 的延长线于点 P，设菱形的边长为 $3m$，

$\because \frac{DG}{CG}=\frac{1}{2}$,

$\therefore DG=m, CG=2m$．

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADP$ 中，

$\because \angle ADC=\angle ABC=120^\circ$,

$\therefore \angle ADP = 60^\circ$，

$\therefore PD = \frac{3}{2}m, AP = \frac{3}{2}\sqrt{3}m$．

$\because \alpha = 120^\circ$，由（2）知，$\angle GCF = \frac{3}{2}\alpha - 90^\circ = 90^\circ$．

$\because \angle AGP = \angle FGC$，

$\therefore \triangle APG \backsim \triangle FCG$．

$\therefore \frac{AP}{CF} = \frac{PG}{CG}$，

$\therefore \frac{\frac{3}{2}\sqrt{3}m}{CF} = \frac{\frac{5}{2}m}{2m}$，

$\therefore CF = \frac{6\sqrt{3}}{5}m$，

在 AB 上截取 AN，使 $AN = EC$，连接 NE，作 $BO \perp NE$ 于点 O．

由（2）知，$\triangle ANE \cong \triangle ECF$，

$\therefore NE = CF$，

$\because AB = BC$，

$\therefore BN = BE$，$OE = EF = \frac{1}{2}EN = \frac{\sqrt{3}}{5}m$．

$\because \angle ABC = 120^\circ$，

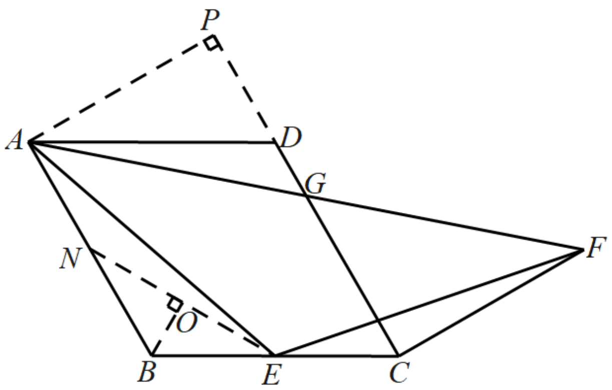
$\therefore \angle BNE = \angle BEN = 30^\circ$，

$\because \cos 30° = \frac{OE}{BE}$，

$\therefore BE = \frac{6}{5}m,$.

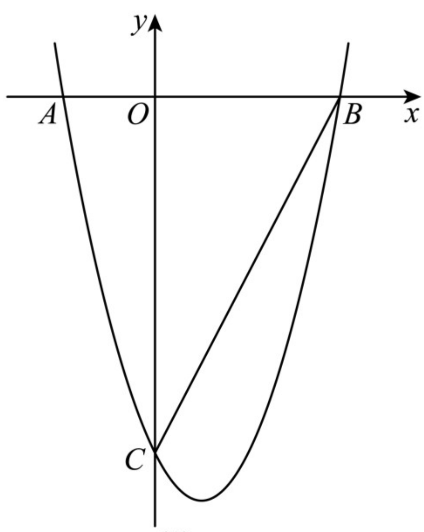
\ $CE = \frac{9}{5}m$

$\therefore \frac{BE}{CE} = \frac{2}{3}$.

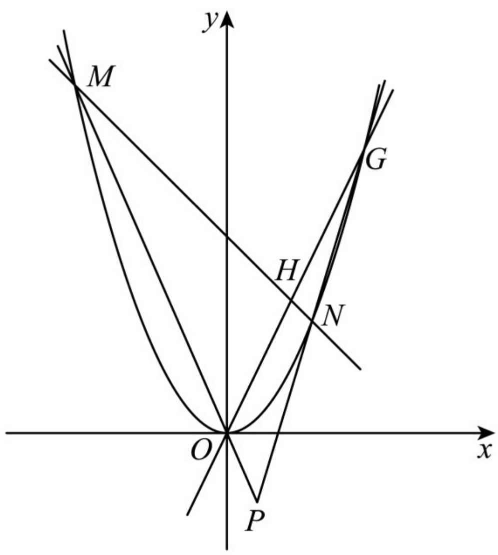


【点睛】此题考查菱形性质、三角形全等、三角形相似，解题的关键是熟悉菱形性质、三角形全等、三角形相似．

24. 抛物线$C_1: y = x^2 - 2x - 8$交x轴于A, B两点（A在B的左边），交y轴于点C ．



(1)



(2)

（1）直接写出A, B, C三点的坐标；

（2）如图（1），作直线 $x=t(0<t<4)$，分别交 x 轴，线段 BC，抛物线 C_1 于 D,E,F 三点，连接 CF．若 $\triangle BDE$ 与 $\triangle CEF$ 相似，求 t 的值；

（3）如图（2），将抛物线 C_1 平移得到抛物线 C_2，其顶点为原点．直线 $y=2x$ 与抛物线 C_2 交于 O,G 两点，过 OG 的中点 H 作直线 MN（异于直线 OG）交抛物线 C_2 于 M,N 两点，直线 MO 与直线 GN 交于点 P．问点 P 是否在一条定直线上？若是，求该直线的解析式；若不是，请说明理由．

【答案】（1）$A(-2,0),B(4,0),C(0,-8)$

（2）t 的值为 2 或 $\frac{3}{2}$

（3）点 P 在定直线 $y=2x-2$ 上

【解析】

【分析】（1）令 $y=0$，解一元二次方程求出 x 值可得 A、B 两点的坐标，令 $x=0$ 求出 y 值可得 C 点坐标，即可得答案；

（2）分 $\triangle BE_1D_1\backsim\triangle CE_1F_1$ 和 $\triangle BE_2D_2\backsim\triangle F_2E_2C$ 两种情况，利用相似三角形的性质分别列方程求出 t 值即可得答案；

（3）根据平移的性质可得 C_2 解析式，联立直线 OG 与 C_2 解析式可得点 G 坐标，即可得出 OG 中点 H 的坐标，设 $M(m,m^2),N(n,n^2)$，利用待定系数法可得直线 MN 的解析式为 $y=(m+n)x-mn$，同理得出直线 MO 的解析式为 $y=mx$，联立两直线解析式可得 $P\left(\frac{2n}{n-m+2},\frac{2m+2n-4}{n-m+2}\right)$，设点 P 在直线 $y=kx+b$ 上，把点 $P\left(\frac{2n}{n-m+2},\frac{2m+2n-4}{n-m+2}\right)$ 代入，整理比较系数即可得出 k、b 的值即可得答案，也可根据点 P 的纵坐标变形得出横坐标与纵坐标的关系，得出答案．

【小问1详解】

∵抛物线解析式为$y=x^2-2x-8$，

∴当$y=0$时，$x^2-2x-8=0$，当$x=0$时，$y=-8$，

解得：$x_1=-2$，$x_2=4$，

∴$A(-2,0)$，$B(4,0)$，$C(0,-8)$．

【小问2详解】

解：∵F是直线$x=t$与抛物线C_1的交点，

∴$F\left(t,t^2-2t-8\right)$，

①如图，若$\triangle BE_1D_1\backsim\triangle CE_1F_1$时，

∴$\angle BCF_1=\angle CBO$，

∴$CF_1\parallel OB$

∵$C(0,-8)$，

∴$t^2-2t-8=-8$，

解得，$t=0$（舍去）或$t=2$．

②如图，若$\triangle BE_2D_2\backsim\triangle F_2E_2C$时．过$F_2$作$F_2T\perp x$轴于点$T$．

∵$\angle BCF_2=\angle BD_2E_2=\angle BOC=90^\circ$，

∴$\angle OCB+\angle OBC=\angle OCB+\angle TCF_2=90^\circ$，

∴$\angle TCF_2=\angle OBC$，

∵$\angle CTF_2=\angle BOC=90^\circ$，

$\therefore \triangle BCO \backsim \triangle CF_2T$，

$\therefore \dfrac{F_2T}{CO}=\dfrac{CT}{BO}$

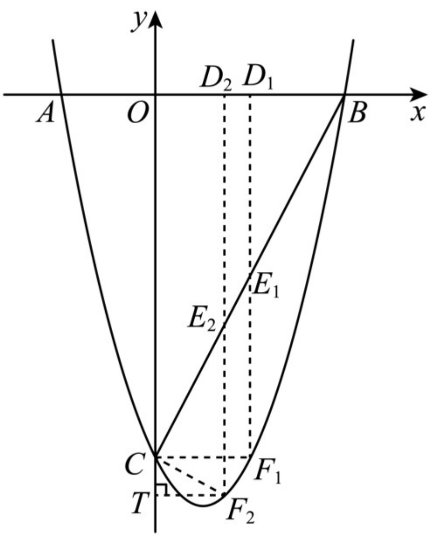
 $B(4,0), C(0,-8)$，

$\therefore OB=4$，$OC=8$，

 $F_2T=t, CT=-8-\left(t^2-2t-8\right)=2t-t^2$，

$\therefore \dfrac{t}{8}=\dfrac{2t-t^2}{4}$，

解得，$t=0$（舍去）或 $t=\dfrac{3}{2}$．



综上，符合题意的 t 的值为 2 或 $\dfrac{3}{2}$．

【小问 3 详解】

解：∵将抛物线 C_1 平移得到抛物线 C_2，其顶点为原点，

$\therefore C_2: y=x^2$，

∵直线 OG 的解析式为 $y=2x,$，

∴联立直线 OG 与 C_2 解析式得：$\begin{cases} y=x^2 \\ y=2x \end{cases}$，

解得：$\begin{cases} x_1=0 \\ y_1=0 \end{cases}$（舍去），$\begin{cases} x_2=2 \\ y_2=4 \end{cases}$，

∴ $G(2,4)$，

∵ H 是 OG 的中点，

∴ $\frac{2+0}{2}=1, \frac{4+0}{2}=2$，

∴ $H(1,2)$，

设 $M\left(m,m^2\right), N\left(n,n^2\right)$，直线 MN 的解析式为 $y=k_1x+b_1$，

则 $n^2=nk_1+b_1, m^2=mk_1+b_1$，

解得，$k_1=m+n,\ \ b_1=-mn$，

∴直线 MN 的解析式为 $y=(m+n)x-mn$，

∵直线 MN 经过点 $H(1,2)$，

∴ $mn=m+n-2$

同理，直线 GN 的解析式为 $y=(n+2)x-2n$；直线 MO 的解析式为 $y=mx$．

联立，得 $\begin{cases} y=(n+2)x-2n \\ y=mx. \end{cases}$，

解得：$x=\frac{2n}{n-m+2}, y=\frac{2mn}{n-m+2}$．

∵直线 OM 与 NG 相交于点 P，

$\therefore P\left(\frac{2n}{n-m+2},\frac{2m+2n-4}{n-m+2}\right)$.

设点 P 直线 $y=kx+b$ 上，则 $\frac{2m+2n-4}{n-m+2}=k\cdot\frac{2n}{n-m+2}+b$，①

整理得，$2m+2n-4=2kn+bn-bm+2b=-bm+(2k+b)n+2b$，

比较系数得：$\begin{cases}2k+b=2\\ -b=2\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}k=2\\ b=-2\end{cases}$，

∴当 $k=2,b=-2$ 时，无论 m,n 为何值时，等式①恒成立．

∴点 P 在定直线 $y=2x-2$ 上．

【点睛】本题考查二次函数与一次函数综合、二次函数图象的平移及相似三角形的性质，正确作出辅助线，熟练掌握待定系数法求函数解析式及相似三角形的性质是解题关键．