淮安市2023年中考数学试卷

(考试时间：120分钟 满分：150分)

第Ⅰ卷（选择题 共24分）

一、选择题（本大题共8小题，每小题3分，共24分，在每小题给出的四个选项中，恰有一项符合题目要求）

1. 下列实数中，属于无理数的是（　　）

A. －2　　B. 0　　C. $\sqrt{2}$　　D. 5

【答案】C

【解析】

【分析】无理数是指无限不循环小数，根据定义逐个判断即可．

【详解】解:－2、0、5是有理数，$\sqrt{2}$是无理数．

故选：C．

【点睛】本题考查了对无理数定义的应用，能理解无理数的定义是解此题的关键.

2. 剪纸是中国优秀的传统文化．下列剪纸图案中，是轴对称图形的是（　　）．

A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】B

【解析】

【分析】根据轴对称图形的概念逐项分析判断即可，轴对称图形的概念：平面内，一个图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够完全重合的图形．

【详解】解：选项A、C、D均不能找到这样的一条直线，使直线两旁的部分能够完全重合的图形，所以不是轴对称图形；

选项B能找到这样的一条直线，使直线两旁的部分能够完全重合的图形，所以是轴对称图形；

故选：B．

【点睛】本题考查了轴对称图形的概念，轴对称图形的关键是寻找对称轴，图形两部分折叠后可重合．

3. 健康成年人的心脏每分钟流过的血液约4900mL．数据4900用科学记数法表示为（　）．

A. 0.49×10^{4}　　B. 4.9×10^{4}　　C. 4.9×10^{3}　　D. 49×10^{2}

【答案】C

【解析】

【分析】将4900写成$a\times10^{n}$的形式即可，其中$1\le|a|<10$，n为正整数．

【详解】解：4900的小数点向左移动3位得4.9，

因此$4900=4.9\times10^{3}$，

故选C．

【点睛】本题考查科学记数法，解题的关键是确定$a\times10^{n}$中a和n的值．

4. 下列计算正确的是（　）．

A. $2a-a=2$　　B. $\left(a^{2}\right)^{3}=a^{5}$　　C. $a^{3}\div a=a^{3}$　　D. $a^{2}\cdot a^{4}=a^{6}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据合并同类项，幂的乘方，同底数幂的乘除法则，逐一进行计算后判断即可．

【详解】解：A、$2a-a=a$，故A错误；

B、$\left(a^{2}\right)^{3}=a^{6}$，故B错误；

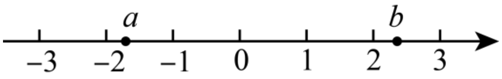
C、$a^{3}\div a=a^{2}$，故C错误；

D、$a^{2}\cdot a^{4}=a^{6}$，故D正确；

故选D．

【点睛】本题考查合并同类项，幂 乘方，同底数幂的乘除，熟练掌握相关运算法则，是解题的关键．

5. 实数a、b在数轴上的对应点的位置如图所示，下列结论正确的是（　）．



A. $a<-2$　　B. $b<2$　　C. $a>b$　　D. $-a<b$

【答案】D

【解析】

【分析】根据实数在数轴上的位置，判断实数的大小关系，即可得出结论．

【详解】解：由图可知，$-2<a<0<2<b<3$，$|a|=-a<2<b$，

A、$a<-2$，错误；

B、$b<2$，错误；

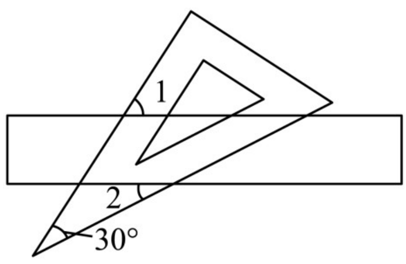
C、$a>b$，错误；

D、$-a<b$，正确；

故选D．

【点睛】本题考查利用数轴比较实数的大小关系．正确的识图，掌握数轴上的数从左到右依次增大，是解题的关键．

6. 将直角三角板和直尺按照如图位置摆放，若$\angle 1=56^\circ$，则$\angle 2$的度数是（　）．



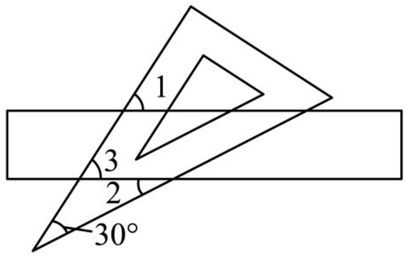
A. 26°　　B. 30°　　C. 36°　　D. 56°

【答案】A

【解析】

【分析】根据平行线的性质可得$\angle 3=\angle 1=56^{\circ}$，进而根据三角形的外角的性质，即可求解．

【详解】解：如图所示，



∵直尺的两边平行，

∴$\angle 3=\angle 1=56^{\circ}$，

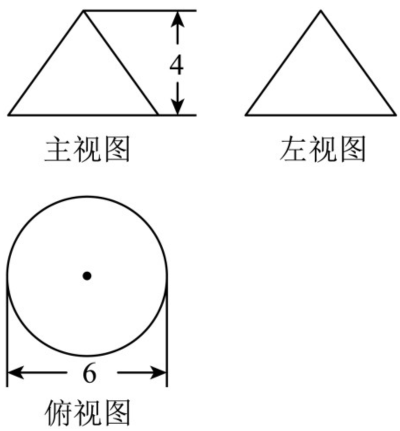
又∵$\angle 3=30^{\circ}+\angle 2$，

∴$\angle 2=\angle 3-30^{\circ}=56^{\circ}-30^{\circ}=26^{\circ}$，

故选：A．

【点睛】本题考查了平行线的性质，三角形的外交的性质，熟练掌握三角形的外角的性质是解题的关键．

7. 如图是一个几何体的三视图，则该几何体的侧面积是（　）．



A. 12π　　B. 15π　　C. 18π　　D. 24π

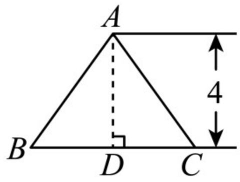
【答案】B

【解析】

【分析】根据题意可得这个几何体为圆锥，然后求出圆锥的母线长为5，再根据圆锥的侧面（扇形）面积公式，即可求解．

【详解】解：根据题意得：这个几何体为圆锥，

如图，过点 A 作 $AD \perp BC$ 于点 D ，



根据题意得： $AB = AC$ ， $AD = 4$ ， $BC = 6$ ，

$\therefore CD = \frac{1}{2} BC = 3$ ，

$\therefore AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = 5$ ，

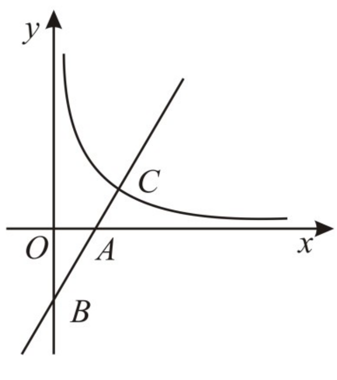
即圆锥的母线长为 5 ，

∴这个几何体的侧面积是 $\frac{1}{2}\pi \times 6 \times 5 = 15\pi$ ．

故选：B

【点睛】本题主要考查了简单几何体的三视图，求圆锥的侧面积，根据题意得到这个几何体为圆锥是解题的关键．

8. 如图，在平面直角坐标系中，一次函数 $y = \sqrt{3}x + b$ 的图象分别与 x 轴、 y 轴交于 A, B 两点，且与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 在第一象限内的图象交于点 C ．若点 A 坐标为 $(2,0)$, $\frac{CA}{AB} = \frac{1}{2}$ ，则 k 的值是（　）．



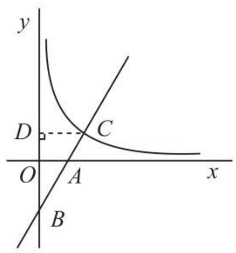
A. $\sqrt{3}$　　B. $2\sqrt{3}$　　C. $3\sqrt{3}$　　D. $4\sqrt{3}$

【答案】C

【解析】

【分析】过点C作$CD\perp y$轴于点D，则$CD\parallel OA$，可得$\triangle BOA\backsim\triangle BDC$，进而根据已知条件的$CD=3$，求得直线$AB$的解析式，将$x=3$代入，得出点$C$的坐标，代入反比例函数解析式，即可求解．

【详解】解：如图所示，过点C作$CD\perp y$轴于点D，则$CD\parallel OA$



$\therefore\triangle BOA\backsim\triangle BDC$

$\therefore\dfrac{CD}{AO}=\dfrac{BC}{BA}$

$\because\dfrac{CA}{AB}=\dfrac{1}{2}, A(2,0)$

$\therefore\dfrac{BC}{BA}=\dfrac{3}{2}$

$\therefore\dfrac{CD}{2}=\dfrac{3}{2}$

解得：$CD=3$

$\because$点$A(2,0)$在$y=\sqrt{3}x+b$上，

$\therefore 2\sqrt{3}+b=0$

解得：$b=-2\sqrt{3}$

∴直线 AB 的解析式为 $y=\sqrt{3}x-2\sqrt{3}$

当 $x=3$ 时，$y=\sqrt{3}$

即 $C\left(3,\sqrt{3}\right)$

又反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 在第一象限内的图象交于点 C

∴ $k=3\sqrt{3}$，

故选：C．

【点睛】本题考查了反比例函数的性质，待定系数法求一次函数解析式，相似三角形的性质与判定，求得点 C 的坐标是解题的关键．

第Ⅱ卷（非选择 题共 126 分）

二、填空题（本大题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分）

9. 若式子 $\sqrt{x-5}$ 在实数范围内有意义，则 x 的取值范围是_________．

【答案】$x\geq5$

【解析】

【分析】先根据二次根式有意义的条件列出关于 x 的不等式，求出 x 的取值范围即可．

【详解】∵ $\sqrt{x-5}$ 在实数范围内有意义，

∴$x-5\geqslant0$，解得 $x\geqslant5$．

故答案为：$x\geq5$

【点睛】此题考查了二次根式有意义的条件，二次根式 $\sqrt{a}$ 有意义的条件是被开方数 $a\geq0$，同时也考查了解一元一次不等式．

10. 方程 $\dfrac{x-1}{2x+1}=1$ 的解是_________．

【答案】 $x=-2$

【解析】

【分析】将分式方程转化为整式方程，求解即可．

【详解】解：由$\frac{x-1}{2x+1}=1$可得：$x-1=2x+1$

解得$x=-2$

经检验$x=-2$是原分式方程的解，

故答案为：$x=-2$

【点睛】此题考查了分式方程的求解，解题的关键是掌握分式方程的求解方法．

11. 若等腰三角形的周长是20cm，一腰长为7cm，则这个三角形的底边长是_________cm．

【答案】6

【解析】

【分析】根据等腰三角形的性质求解即可．

【详解】解：三角形的底边长为$20-7\times2=6\text{cm}$

故答案为：6

【点睛】此题考查了等腰三角形的性质，解题的关键是掌握等腰三角形腰长相等．

12. 若$a+2b-1=0$，则$3a+6b$的值是_________．

【答案】3

【解析】

【分析】根据已知得到$a+2b=1$，再代值求解即可．

【详解】解：$\because a+2b-1=0$，

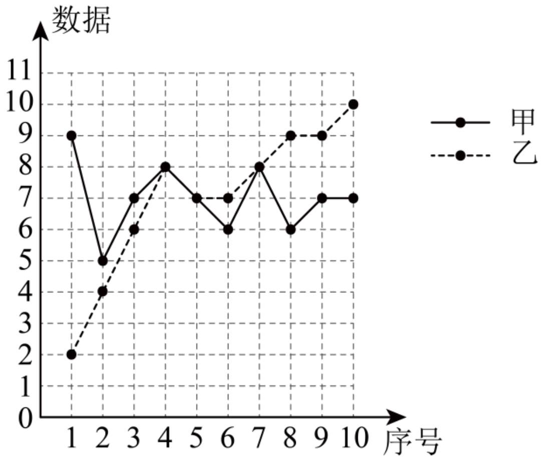
$\therefore a+2b=1$，

$\therefore 3a+6b=3(a+2b)=3$，

故答案为：3.

【点睛】本题考查代数式求值，利用整体思想求解是解答的关键．

13. 将甲、乙两组各 10 个数据绘制成折线统计图(如图)，两组数据的平均数都是 7，设甲、乙两组数据的方差分别为 $s_{甲}^2$、$s_{乙}^2$，则 $s_{甲}^2$ ________ $s_{乙}^2$ (填“>”“=”或“<”)．



【答案】<

【解析】

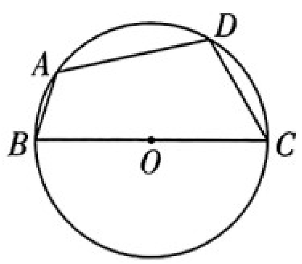
【分析】根据折线统计图可得甲的数据波动较小，进而根据方差的意义即可求解．

【详解】解：由折线统计图可得，甲的数据波动较小，则 $s_{甲}^2 < s_{乙}^2$，

故答案为：<．

【点睛】本题考查了折线统计图，方差的意义，理解数据波动小的方差小是解题的关键．

14. 如图，四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接四边形，BC 是 $\odot O$ 的直径，$BC=2CD$，则 $\angle BAD$ 的度数是________°．



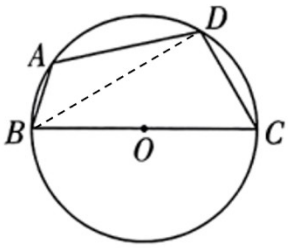
【答案】120

【解析】

【分析】解：如图，连接 BD，由 BC 是 $\odot O$ 的直径，可得 $\angle BDC=90^{\circ}$，由 $BC=2CD$，可得

$\angle CBD=30^{\circ}$，$\angle C=60^{\circ}$，根据$\angle BAD=180^{\circ}-\angle C$，计算求解即可．

【详解】解：如图，连接BD，



$\because BC$是$\odot O$的直径，

$\therefore \angle BDC=90^{\circ}$，

$\because BC=2CD$，

$\therefore \angle CBD=30^{\circ}$，

$\therefore \angle C=60^{\circ}$，

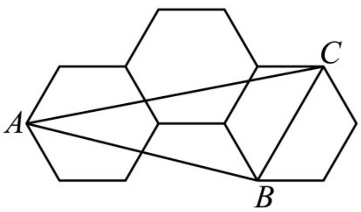
$\because$四边形$ABCD$是$\odot O$的内接四边形，

$\therefore \angle BAD=180^{\circ}-\angle C=120^{\circ}$，

故答案为：120．

【点睛】本题考查了直径所对的圆周角为直角，含30°的直角三角形，圆内接四边形的性质．解题的关键在于明确角度之间的数量关系．

15. 如图，3 个大小完全相同的正六边形无缝隙、不重叠的拼在一起，连接正六边形的三个顶点得到$\triangle ABC$，则$\tan\angle ACB$的值是_________．

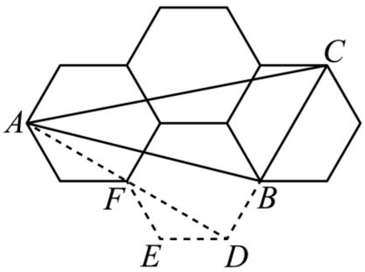


【答案】$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【解析】

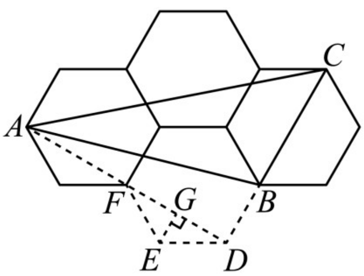
【分析】如图所示，补充一个与已知相同的正六边形，根据正六边形的内角为120°，设正六边形的边长为1，求得CD, AD，根据正切的定义，即可求解．

【详解】解：如图所示，补充一个与已知相同的正六边形，



∵正六边形对边互相平行，且内角为120°，

∴$\angle EDF=30^{\circ}, \angle ADB=90^{\circ}$



过点E作$EG\perp FD$于G，

∴$FD=2FG=2EF\times\cos 30^{\circ}=\sqrt{3}$

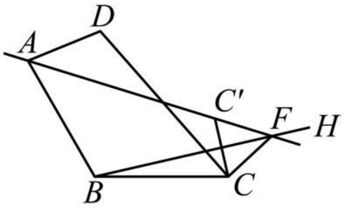
设正六边形的边长为1，则$CD=3$，$AD=2FD=2\sqrt{3}$，

∴$\tan\angle ACB=\frac{AD}{CD}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

故答案为：$\frac{2\sqrt{3}}{3}$．

【点睛】本题考查了正六边形的性质，解直角三角形，熟练掌握正六边形的性质是解题的关键．

16. 在四边形$ABCD$中，$AB=BC=2,\angle ABC=120^{\circ},BH$为$\angle ABC$内部的任一条射线（$\angle CBH$不等于$60^{\circ}$），点$C$关于$BH$的对称点为$C'$，直线$AC'$与$BH$交于点$F$，连接$CC'$、$CF$，则$\triangle CC'F$面积的最大值是_________．

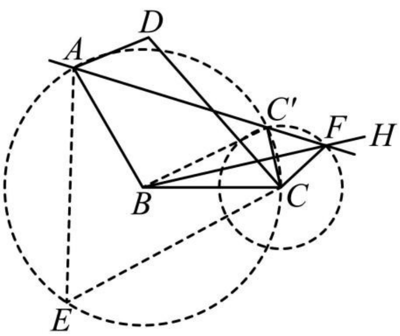


【答案】$4\sqrt{3}$

【解析】

【分析】连接BC'，根据轴对称的性质可得$CB=C'B,CF=C'F$，进而可得A,C,C'在半径为2的$\odot B$上，证明$\triangle CC'F$是等边三角形，当CC'取得最大值时，$\triangle CC'F$面积最大，根据圆的直径最大，进而得出CC'最大值为4，即可求解．

【详解】解：如图所示，连接BC'，



$\because$点C关于BH的对称点为C'，

$\therefore CB=C'B,CF=C'F$，

$\because AB=BC=2$，

$\therefore A, C, C'$ 在半径为 2 的 $\odot B$ 上，

在优弧 $\overset{\frown}{AC}$ 上任取一点 E，连接 AE, EC，

则 $\angle AEC=\frac{1}{2}\angle ABC=60^{\circ}$，

$\because \angle ABC=120^{\circ}$，

$\therefore \angle AC'C=180^{\circ}-\angle AEC=180^{\circ}-\frac{1}{2}\angle ABC=120^{\circ}$，

$\therefore \angle CC'F=60^{\circ}$，

$\therefore \triangle CC'F$ 是等边三角形，

当 CC' 取得最大值时，$\triangle CC'F$ 面积最大，

$\because C'$ 在 $\odot B$ 上运动，则 CC' 最大值为 4，

则 $\triangle CC'F$ 面积的最大值是 $\frac{\sqrt{3}}{4}\times 4^{2}=4\sqrt{3}$．

故答案为：$4\sqrt{3}$．

【点睛】本题考查了轴对称的性质，圆周角定理，圆内接四边形对角互补，等边三角形的性质，得出 CC' 最大值为 4 是解题的关键．

三、解答题（本大题共 11 小题，共 102 分，解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤）

17.（1）计算：$|-2|+(1+\sqrt{3})^{0}-\sqrt{9}$；

（2）解不等式组：$\begin{cases}2x+1>3(x-1),\\ x+\dfrac{x-1}{3}<1.\end{cases}$

【答案】（1）0；（2）$x<1$

【解析】

【分析】（1）根据化简绝对值，零指数幂，求一个数的算术平方根，进行计算即可求解；

（2）分别求出每一个不等式的解集，根据口诀：同大取大、同小取小、大小小大中间找、大大小小找不到确定不等式组的解集．

【详解】解：（1）$|-2|+(1+\sqrt{3})^0-\sqrt{9}$

$=2+1-3$

$=0$；

（2）$\begin{cases}2x+1>3(x-1)①\\ x+\dfrac{x-1}{3}<1②\end{cases}$，

解不等式①得：$x<4$，

解不等式②得：$x<1$，

∴不等式组的解集为：$x<1$．

【点睛】本题考查了实数的混合运算，零指数幂，解一元一次不等式组，熟练掌握以上知识是解题的关键．

18. 先化简，再求值：$\dfrac{a}{a^2-2a+1}\div\left(1+\dfrac{1}{a-1}\right)$，其中$a=\sqrt{5}+1$．

【答案】$\dfrac{1}{a-1}$，$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

【解析】

【分析】先将括号内式子通分，变分式除法为乘法，约分化简，再将$a=\sqrt{5}+1$代入求值．

【详解】解：$\frac{a}{a^2-2a+1}\div\left(1+\frac{1}{a-1}\right)$

$=\frac{a}{(a-1)^2}\div\frac{a}{a-1}$

$=\frac{a}{(a-1)^2}\cdot\frac{a-1}{a}$

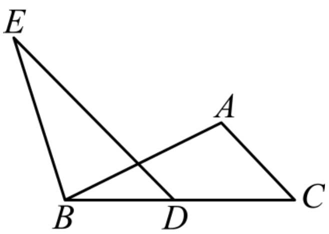
$=\frac{1}{a-1}$，

将$a=\sqrt{5}+1$代入，得：

原式$=\frac{1}{\sqrt{5}+1-1}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

【点睛】本题考查分式的化简求值，分母有理化，解题的关键是掌握分式的运算法则．

19. 已知：如图，点D为线段BC上一点，$BD=AC$，$\angle E=\angle ABC$，$DE\parallel AC$．求证：$DE=BC$.



【答案】证明见详解；

【解析】

【分析】根据$DE\parallel AC$得到$\angle EDB=\angle C$，结合$BD=AC$，$\angle E=\angle ABC$，即可得到$\triangle BED\cong\triangle ABC$即可得到证明．

【详解】证明：$\because DE\parallel AC$，

$\therefore\angle EDB=\angle C$，

$\because\begin{cases}\angle EDB=\angle C\\ \angle E=\angle ABC\\ BD=AC\end{cases}$，

$\therefore \triangle BED \cong \triangle ABC(AAS)$，

$\therefore DE=BC$．

【点睛】本题考查三角形全等的判定与性质，解题的关键是根据平行线得到三角形全等判定的条件．

20. 小华、小玲一起到淮安西游乐园游玩，他们决定在三个热门项目（A：智取芭蕉扇、B：三打白骨精、C：盘丝洞）中各自随机选择一个项目游玩．

（1）小华选择 C 项目的概率是_________；

（2）用画树状图或列表等方法求小华、小玲选择不同游玩项目的概率．

【答案】（1）$\frac{1}{3}$

（2）$\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】（1）直接由概率公式求解即可；

（2）列表法求概率即可求解．

【小问 1 详解】

解：共有三个热门项目，小华选择 C 项目的概率是 $\frac{1}{3}$；

故答案为：$\frac{1}{3}$．

小问 2 详解】

解：列表法如图，

小华 小丽	A	B	C
A	AA	AB	AC
B	BC	BB	BC
C	CA	CB	CC

共有 9 种等可能结果，其中小华、小玲选择不同游玩项目，有 6 种，

∴小华、小玲选择不同游玩项目的概率$\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$．

【点睛】本题考查的是根据概率公式求概率，用树状图法求概率．树状图法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果，适合两步或两步以上完成的事件；解题时要注意此题是放回试验还是不放回试验．用到的知识点为：概率=所求情况数与总情况数之比．

21. 为了调动员工的积极性，商场家电部经理决定确定一个适当的月销售目标，对完成目标的员工进行奖励．家电部对 20 名员工当月的销售额进行统计和分析．

数据收集（单位：万元）：

5.0　9.9　6.0　5.2　8.2　6.2　7.6　9.4　8.2　7.8

5.1　7.5　6.1　6.3　6.7　7.9　8.2　8.5　9.2　9.8

数据整理：

销售额/万元	$5\le x<6$	$6\le x<7$	$7\le x<8$	$8\le x<9$	$9\le x<10$
频数	3	5	a	4	4

数据分析：

平均数	众数	中位数
7.44	8.	b

问题解决：

（1）填空：$a=$________，$b=$________．

（2）若将月销售额不低于 7 万元确定为销售目标，则有_____名员工获得奖励．

（3）经理对数据分析以后，最终对一半的员工进行了奖励．员工甲找到经理说：“我这个月的销售额是 7.5 万元，比平均数 7.44 万元高，所以我的销售额超过一半员工，为什么我没拿到奖励？”假如你是经理，请你给出合理解释．

【答案】（1）4，7.7

（2）12　（3）7.5 万元小于中位数 7.7 万元，有一半多的员工销售额比 7.5 万元高，故员工甲没拿到奖励

【解析】

【分析】（1）根据所给数据及中位数的定义求解；

（2）根据频数分布表求解；

（3）利用中位数进行决策．

【小问 1 详解】

解：该组数据中有4个数在7与8之间，故$a=4$，

将20个数据按从小到大顺序排列，第10位和第11位分别是7.6，7.8，故中位数$b=\frac{7.6+7.8}{2}=7.7$，

故答案为：4，7.7；

【小问2详解】

解：月销售额不低于7万元的有：$4+4+4=12$（人），

故答案为：12；

【小问3详解】

解：7.5万元小于中位数7.7万元，有一半多的员工销售额比7.5万元高，故员工甲没拿到奖励．

【点睛】本题考查频数分布表，中位数，利用中位数做决策等，解题的关键是掌握中位数的求法及意义．

22. 为了便于劳动课程的开展，学校打算建一个矩形生态园$ABCD$（如图），生态园一面靠墙（墙足够长），另外三面用18m的篱笆围成．生态园的面积能否为40m^2？如果能，请求出AB的长；如果不能，请说明理由．

【答案】AB的长为8米或10米

【解析】

【分析】设$AB=x$米，则$AD=BC=\frac{1}{2}(18-x)$米，根据矩形生态园$ABCD$面积为40m^2，建立方程，解方程，即可求解．

【详解】解：设$AB=x$米，则$AD=BC=\frac{1}{2}(18-x)$米，根据题意得，

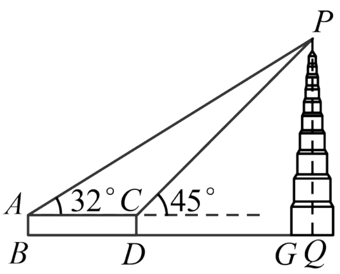
$\frac{1}{2}x(18-x)=40$，

解得：$x_1=8, x_2=10$，

答：AB的长为8米或10米．

【点睛】本题考查了一元二次方程的应用，根据题意列出一元二次方程是解题的关键．

23. 根据以下材料，完成项目任务，

<table>
<tr><td>项目</td><td colspan="2">测量古塔的高度及古塔底面圆的半径</td></tr>
<tr><td>测　量
工具</td><td colspan="2">测角仪、皮尺等</td></tr>
<tr><td>测量</td><td>
</td><td>说明：点Q为古塔底面圆圆心，测角仪高度$AB=CD=1.5\text{m}$，在B, D处分别测得古塔顶端的仰角为32°、45°，$BD=9\text{m}$，测角仪CD所在位置与古塔底部边缘距离$DG=12.9\text{m}$．点B、D、G、Q在同一条直线上．</td></tr>
<tr><td>参　考
数据</td><td colspan="2">$\sin 32^\circ\approx0.530, \cos 32^\circ\approx0.848, \tan 32^\circ\approx0.625$</td></tr>
<tr><td colspan="3">项目任务</td></tr>
<tr><td>（1）</td><td colspan="2">求出古塔的高度．</td></tr>
<tr><td>（2）</td><td colspan="2">求出古塔底面圆的半径．</td></tr>
</table>

【答案】（1）古塔的高度为16.5m；（2）古塔底面圆的半径为2.1m．

【解析】

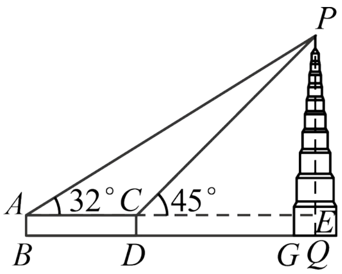
【分析】（1）延长AC交PQ于点E，则四边形$CDQE$是矩形，设$PE=x$ m，则$CE=x\text{m}$，根据

$\tan\angle PAE=\dfrac{PE}{AE}=\dfrac{x}{x+9}=\tan 32^\circ\approx0.625$，解方程，即可求古塔的高度；

（2）根据 $DQ=CE=15$ m，$DG=12.9\text{m}$，即可求得古塔底面圆的半径．

【详解】解：（1）如图所示，延长 AC 交 PQ 于点 E，则四边形 $CDQE$ 是矩形，

$\therefore QE=CD$，



依题意，$\angle PCE=45^\circ$，$\angle PAE=32^\circ$，$AB=CD=QE=1.5\text{m}$，

设 $PE=x$ m，则 $CE=\dfrac{PE}{\tan\angle PCE}=x$，

在 $\text{Rt}\triangle PAE$ 中，$\tan\angle PAE=\dfrac{PE}{AE}=\dfrac{x}{x+9}=\tan 32^\circ\approx 0.625$，

解得：$x=15$，

∴古塔的高度为 $PE+QE=15+1.5=16.5(\text{m})$．

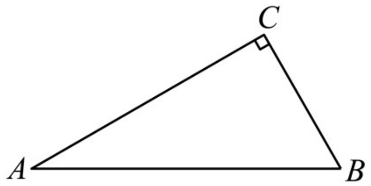
（2）$DQ=CE=15$ m，$DG=12.9\text{m}$，

$\therefore GQ=15-12.9=2.1(\text{m})$．

答：古塔的高度为 16.5m，古塔底面圆的半径为 2.1m．

【点睛】本题考查了解直角三角形的应用—俯角仰角问题，熟练掌握三角函数的定义是解题的关键．

24. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$．



（1）尺规作图：作 $\odot O$ ，使得圆心 O 在边 AB 上，$\odot O$ 过点 B 且与边 AC 相切于点 D （请保留作图痕迹，标明相应的字母，不写作法）；

（2）在（1）的条件下，若 $\angle ABC=60^\circ, AB=4$ ，求 $\odot O$ 与 $\triangle ABC$ 重叠部分的面积．

【答案】（1）见解析　（2）$\dfrac{16}{27}\pi+\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$

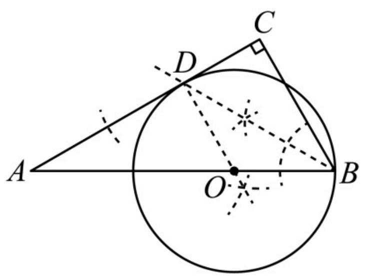
【解析】

【分析】（1）作 $\angle ABC$ 的角平分线交 AC 于点 D ，过点 D 作 $DO\perp AC$ ，交 AB 于点 O ，以 O 为圆心，OB 为半径作 $\odot O$ ，即可；

（2）根据含 30 度角的直角三角形的性质，求得圆的半径，设 $\odot O$ 交 BC 于点 E ，连接 OE ，可得 $\triangle OBE$ 是等边三角形，进而根据 $\odot O$ 与 $\triangle ABC$ 重叠部分的面积等于扇形面积与等边三角形的面积和，即可求解．

【小问 1 详解】

解：如图所示，$\odot O$ 即为所求；



【小问 2 详解】

解：∵ $\angle ABC=60^\circ, AB=4$ ，OD 是 $\odot O$ 的切线，

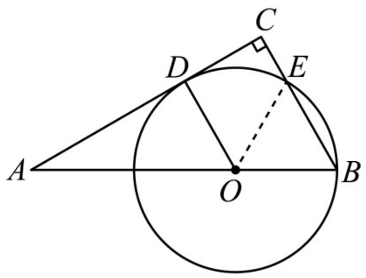
∴ $\angle A=30^\circ$ ，

$\therefore DO=OB=\frac{1}{2}AO$，

则 $AO+OB=3OB=4$，

解得：$OB=\frac{4}{3}$，

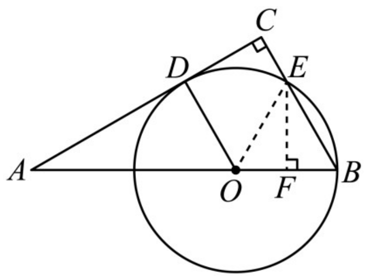
如图所示，设 $\odot O$ 交 BC 于点 E，连接 OE，



$\because \angle ABC=60^{\circ}, OB=OE$，

$\therefore \triangle OBE$ 是等边三角形，

如图所示，过点 E 作 $EF\perp BO$ 于点 F，



$\therefore \angle OEF=30^{\circ}$

$\therefore OF=\frac{1}{2}OE=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}$

在 $\mathrm{Rt}\triangle OEF$ 中，$EF=\sqrt{OE^{2}-OF^{2}}=\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^{2}-\left(\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\right)^{2}}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\times\sqrt{3}$，

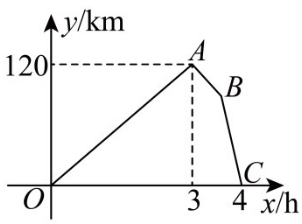
$\therefore S_{\triangle OEB}=\frac{1}{2}\times OB\times EF=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{4}{3}\right)^2$，

$\therefore \angle BOE=60^\circ$，则 $\angle AOE=120^\circ$，

$\therefore \odot O$ 与 $\triangle ABC$ 重叠部分的面积为 $\frac{120}{360}\pi\times\left(\frac{4}{3}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{16}{27}\pi+\frac{4\sqrt{3}}{9}$．

【点睛】本题考查了基本作图，切线的性质，求扇形面积，熟练掌握基本作图与切线的性质是解题的关键．

25. 快车和慢车同时从甲地出发，以各自的速度匀速向乙地行驶，快车到达乙地卸装货物用时 $30\mathrm{min}$，结束后，立即按原路以另一速度匀速返回，直至与慢车相遇，已知慢车的速度为 $70\mathrm{km/h}$．两车之间的距离 $y(\mathrm{km})$ 与慢车行驶的时间 $x(\mathrm{h})$ 的函数图像如图所示．



（1）请解释图中点 A 的实际意义；

（2）求出图中线段 AB 所表示的函数表达式；

（3）两车相遇后，如果快车以返回　速度继续向甲地行驶，求到达甲地还需多长时间．

【答案】（1）快车到达乙地时，慢车距离乙地还有 $120\mathrm{km}$

（2）$y=-70x+330$

（3）2.8 小时

【解析】

【分析】（1）根据点 A 的纵坐标最大，可得两车相距最远，结合题意，即可求解；

（2）根据题意得出 $B(3.5,85)$，进而待定系数法求解析式，即可求解；

（3）先求得快车的速度进而得出总路程，再求得快车返回的速度，即可求解．

【小问 1 详解】

解：根据函数图象，可得点 A 的实际意义为：快车到达乙地时，慢车距离乙地还有 120km

【小问 2 详解】

解：依题意，快车到达乙地卸装货物用时 30min ，则点 B 的横坐标为 $3+\frac{1}{2}=3.5$ ，

此时慢车继续行驶 $\frac{1}{2}$ 小时，则快车与慢车的距离为 $120-70\times\frac{1}{2}=120-35=85$ ，

$\therefore B(3.5,85)$

设直线 AB 的表达式为 $y=kx+b$

$\therefore\begin{cases}85=3.5k+b\\120=3k+b\end{cases}$

解得：$\begin{cases}k=-70\\b=330\end{cases}$

$\therefore$直线 AB 的表达式为 $y=-70x+330$

【小问 3 详解】

解：设快车去乙地　速度为 a 千米/小时，则 $3(a-70)=120$ ，

解得：$a=110$

$\therefore$甲乙两地的距离为 $110\times3=330$ 千米，

设快车返回的速度为 v 千米/小时，根据题意，

$\frac{1}{2}\times(v+70)=330-\left(3+\frac{1}{2}\right)\times70$

解得：$v=100$ ，

∴两车相遇后，如果快车以返回的速度继续向甲地行驶，求到达甲地还需 $\dfrac{330-\frac{1}{2}\times100}{100}=2.8$（小时）

【点睛】本题考查了一次函数的应用，一元一次方程，根据函数图象获取信息是解题的关键．

26. 已知二次函数 $y=x^2+bx-3$（b 为常数）．

（1）该函数图像与 x 轴交于 A,B 两点，若点 A 坐标为 $(3,0)$，

① 则 b 的值是________，点 B 的坐标是________；

② 当 $0<y<5$ 时，借助图像，求自变量 x 的取值范围；

（2）对于一切实数 x，若函数值 $y>t$ 总成立，求 t 的取值范围（用含 b 的式子表示）；

（3）当 $m<y<n$ 时（其中 m、n 为实数，$m<n$），自变量 x 的取值范围是 $1<x<2$，求 n 和 b 的值以及 m 的取值范围．

【答案】（1）① $-2,(-1,0)$ ② $-2<x<-1$ 或 $3<x<4$

（2）$t<-3-\dfrac{b^2}{4}$

（3）$b=-3,n=-5,m<-\dfrac{21}{4}$

【解析】

【分析】（1）①待定系数法求出函数解析式，令 $y=0$，求出点 B 的坐标即可；②画出函数图像，图像法求出 x 的取值范围即可；

（2）求出二次函数 最小值，即可得解；

（3）根据当 $m<y<n$ 时（其中 m、n 为实数，$m<n$），自变量 x 的取值范围是 $1<x<2$，得到 $x=1$ 和 $x=2$ 关于对称轴对称，进而求出 b 的值，得到 n 为 $x=1$ 的函数值，求出 n，推出直线 $y=m$ 过抛物线顶点或在抛物线的下方，即可得出结论．

【小问 1 详解】

解：①∵函数图像与 x 轴交于 A,B 两点，点 A 坐标为 $(3,0)$，

∴ $0=3^2+3b-3$，

∴ $b=-2$，

∴ $y=x^2-2x-3$，

∴当 $y=0$ 时，$x^2-2x-3=0$，

∴ $x_1=-1,x_2=3$，

∴点 B 的坐标是 $(-1,0)$；

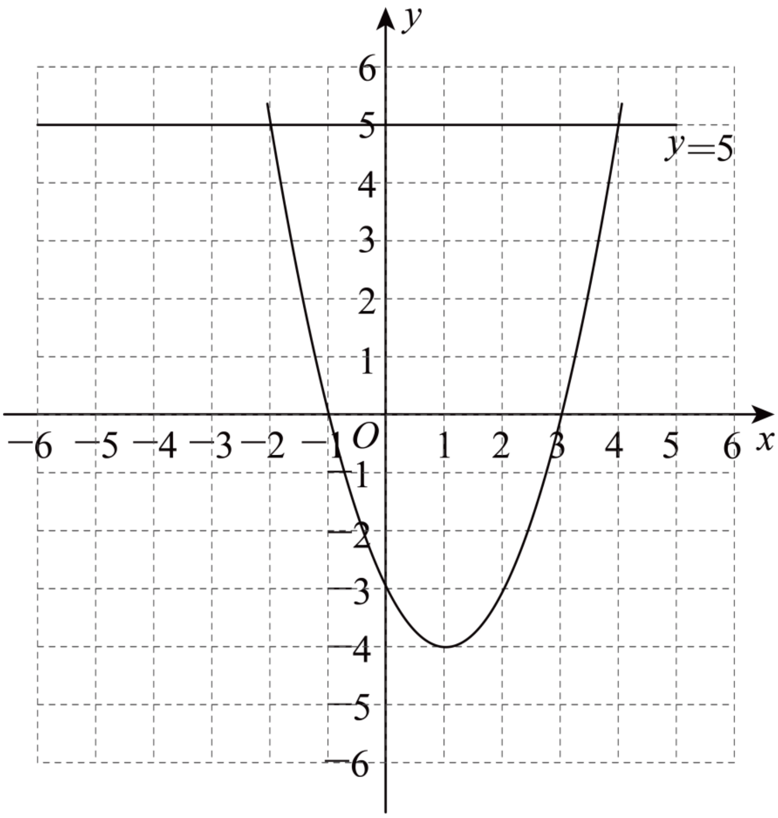
故答案为：-2，$(-1,0)$；

② $y=x^2-2x-3$，

列表如下：

x	…	-2	-1	1	3	4	…
y	…	5	0	-4	0	5	…

画出函数图像如下：



由图可知：当$0<y<5$时，$-2<x<-1$或$3<x<4$；

【小问2详解】

$\because y=x^2+bx-3=\left(x+\dfrac{b}{2}\right)^2-3-\dfrac{b^2}{4}$，

$\therefore$当$x=-\dfrac{b}{2}$时，y有最小值为$-3-\dfrac{b^2}{4}$；

$\because$对于一切实数x，若函数值$y>t$总成立，

$\therefore t<-3-\dfrac{b^2}{4}$；

【小问3详解】

$\because y=x^2+bx-3=\left(x+\dfrac{b}{2}\right)^2-3-\dfrac{b^2}{4}$，

$\therefore$抛物线的开口向上，对称轴为$x=-\dfrac{b}{2}$，

又当 $m<y<n$ 时（其中 m、n 为实数，$m<n$），自变量 x 的取值范围是 $1<x<2$，

∴直线 $y=n$ 与抛物线的两个交点为 $(1,n),(2,n)$，直线 $y=m$ 过抛物线顶点或在抛物线的下方，

∴$(1,n),(2,n)$ 关于对称轴对称，

∴$-\frac{b}{2}=\frac{1+2}{2}$，

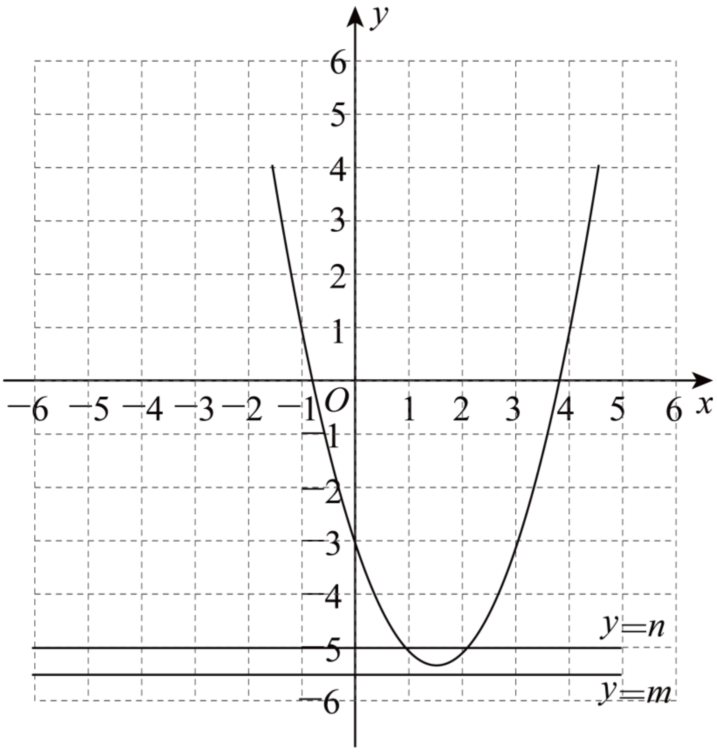
∴$b=-3$，

∴$y=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-3-\frac{9}{4}=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{21}{4}$，

∴$n=\left(1-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{21}{4}=-5$，

当 $x=\frac{3}{2}$ 时，y 有最小值 $-\frac{21}{4}$，

∴$m<-\frac{21}{4}$．



【点睛】本题考查二次函数的图像和性质，熟练掌握二次函数的图像和性质，利用数形结合和分类讨论的思想进行求解，是解题的关键．本题的综合性较强，属于中考压轴题．

27. 综合与实践

定义：将宽与长的比值为$\frac{\sqrt{2^{2n}+1}-1}{2^n}$（$n$为正整数）的矩形称为$n$阶奇妙矩形．

（1）概念理解：

当$n=1$时，这个矩形为1阶奇妙矩形，如图（1），这就是我们学习过的黄金矩形，它的宽（AD）与长(CD)的比值是________．

（2）操作验证：

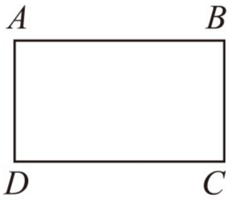
用正方形纸片$ABCD$进行如下操作（如图（2））：

第一步：对折正方形纸片，展开，折痕为EF，连接CE；

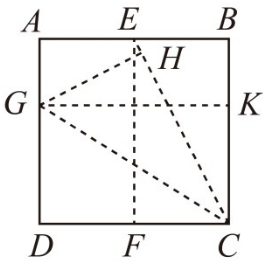
第二步：折叠纸片使CD落在CE上，点D的对应点为点H，展开，折痕为CG；

第三步：过点G折叠纸片，使得点A、B分别落在边AD、BC上，展开，折痕为GK．

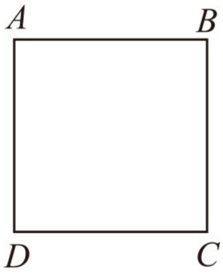
试说明：矩形$GDCK$是1阶奇妙矩形．



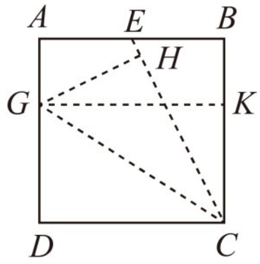
图（1）



图（2）



图（3）



图（4）

（3）方法迁移：

用正方形纸片$ABCD$折叠出一个2阶奇妙矩形．要求：在图（3）中画出折叠示意图并作简要标注．

（4）探究发现：

小明操作发现任一个n阶奇妙矩形都可以通过折纸得到．他还发现：如图（4），点E为正方形$ABCD$边

AB上（不与端点重合）任意一点，连接CE，继续（2）中操作的第二步、第三步，四边形$AGHE$的周

长与矩形$GDCK$的周长比值总是定值．请写出这个定值，并说明理由．

【答案】（1）$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$；（2）见解析；（3）$\frac{1}{2}$，理由见解析

【解析】

【分析】（1）将$n=1$代入$\frac{\sqrt{2^{2n}+1}-1}{2^n}$，即可求解．

（2）设正方形的边长为2，根据折叠的性质，可得$AE=EB=1$，设$DG=x$，则$AG=2-x$，在

$Rt\triangle AEG, Rt\triangle GHE$中，勾股定理建立方程，解方程，即可求解；

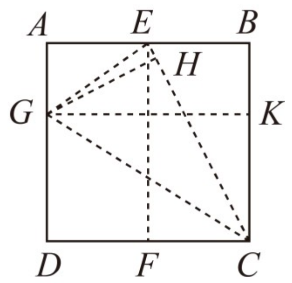
（3）仿照（2）的方法得出2阶奇妙矩形．

（4）根据（2）的方法，分别求得四边形$AGHE$的周长与矩形$GDCK$的周长，即可求解．

【详解】解：（1）当$n=1$时，$\frac{\sqrt{2^{2n}+1}-1}{2^{n}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，

故答案为：$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$．

（2）如图（2），连接EG，



图（2）

设正方形的边长为2，根据折叠的性质，可得$AE=EB=1$

设$DG=x$，则$AG=2-x$

根据折叠，可得$GH=GD=x$，$CH=CD=2$，

在$\mathrm{Rt}\triangle BEC$中，$EC=\sqrt{EB^2+BC^2}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，

$\therefore EH=\sqrt{5}-2$，

在$\mathrm{Rt}\triangle AEG,\mathrm{Rt}\triangle GHE$中，

$AG^2+AE^2=GE^2,GH^2+EH^2=GE^2$

$\therefore(2-x)^2+1^2=\left(\sqrt{5}-2\right)^2+x^2$

解得：$x=\sqrt{5}-1$

$\therefore\frac{GD}{DC}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

∴矩形$GDCK$是1阶奇妙矩形．

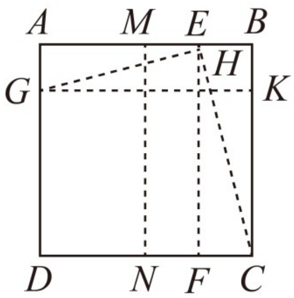
（3）用正方形纸片$ABCD$进行如下操作（如图）：

第一步：对折正方形纸片，展开，折痕为MN，再对折，折痕为EF，连接CE；

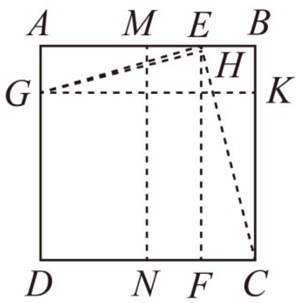
第二步：折叠纸片使CD落在CE上，点D的对应点为点H，展开，折痕为CG；

第三步：过点G折叠纸片，使得点A, B分别落在边AD、BC上，展开，折痕为GK．

矩形$GDCK$是2阶奇妙矩形，



理由如下，连接GE，设正方形的边长为4，根据折叠可得$EB=1$，则$AE=4-1=3$，



设$DG=x$，则$AG=4-x$

根据折叠，可得$GH=GD=x$，$CH=CD=4$，

在$\mathrm{Rt}\triangle BEC$中，$EC=\sqrt{EB^2+BC^2}=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$，

$\therefore EH=\sqrt{17}-4$，

在$\mathrm{Rt}\triangle AEG, \mathrm{Rt}\triangle GHE$中，

$AG^2+AE^2=GE^2, GH^2+EH^2=GE^2$

$\therefore (4-x)^2+3^2=\left(\sqrt{17}-4\right)^2+x^2$

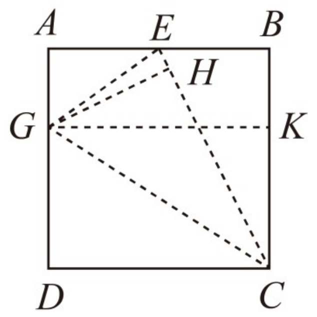
解得：$x=\sqrt{17}-1$

$\therefore \frac{GD}{DC}=\frac{\sqrt{17}-1}{4}$

当 $n=2$ 时，$\frac{\sqrt{2^{2n}+1}-1}{2^n}=\frac{\sqrt{17}-1}{4}$

$\therefore$矩形$GDCK$是2阶奇妙矩形．

（4）如图（4），连接诶GE，设正方形的边长为1，设$EB=m$，则$AE=1-m$，



图（4）

设$DG=x$，则$AG=1-x$

根据折叠，可得$GH=GD=x$，$CH=CD=1$，

在Rt△BEC中，$EC=\sqrt{EB^2+BC^2}=\sqrt{1+m^2}$，

$\therefore EH=\sqrt{1+m^2}-1$，

在Rt$\triangle AEG$, Rt$\triangle GHE$中，

$AG^2+AE^2=GE^2, GH^2+EH^2=GE^2$

$\therefore (1-x)^2+(1-m)^2=\left(\sqrt{1+m^2}-1\right)^2+x^2$

整理得，$x=\sqrt{m^2+1}-m$

$\therefore$四边形$AGHE$的边长为$1-x+x+\sqrt{1+m^2}-1+1-m=\sqrt{1+m^2}-m+1=x+1$

矩形$GDCK$的周长为$2(GD+DC)=2(x+1)$，

$\therefore$四边形$AGHE$的周长与矩形$GDCK$的周长比值总是定值$\frac{1}{2}$

【点睛】本题考查了正方形的折叠问题，勾股定理，熟练掌握折叠的性质是解题的关键．