2023年湖北省宜昌市初中学业水平考试

数学试题

一、选择题（下列各题中，只有一个选项是符合题目要求的，请在答题卡上指定的位置填涂符合要求的选项前面的字母代号．每题3分，计33分．）

1. 下列运算正确的个数是（　）．

①$|2023|=2023$；②$2023^0=1$；③$2023^{-1}=\dfrac{1}{2023}$；④$\sqrt{2023^2}=2023$．

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

【答案】A

【解析】

【分析】根据$|a|=\begin{cases}a(a>0)\\0(a=0)\\-a(a<0)\end{cases}$，$a^0=1(a\neq 0)$，$a^{-p}=\dfrac{1}{a^p}(a\neq 0)$、$\sqrt{a^2}=|a|$，进行逐一计算即可．

【详解】解：①$\because 2023>0$，$\therefore |2023|=2023$，故此项正确；

②$\because 2023\neq 0$，$\therefore 2023^0=1$，故此项正确；

③$2023^{-1}=\dfrac{1}{2023}$，此项正确；

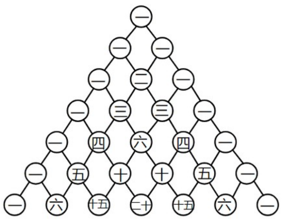
④$\sqrt{2023^2}=|2023|=2023$，故此项正确；

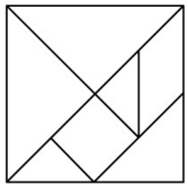
$\therefore$正确的个数是4个．

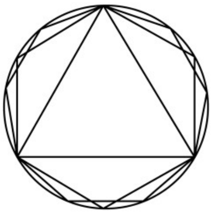
故选：A．

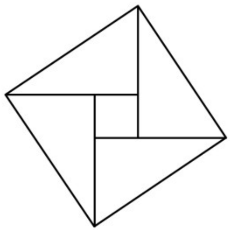
【点睛】本题考查了实数的运算，掌握相关的公式是解题的关键．

2. 我国古代数学的许多创新与发明都曾在世界上有重要影响．下列图形“杨辉三角”“中国七巧板”“刘微割圆术”“赵爽弦图”中，中心对称图形是（　）．

A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】D

【解析】

【分析】根据中心对称图形的概念进行判断即可．

【详解】解：A．不是中心对称图形，故此选项不合题意；

B．不是中心对称图形，故此选项不合题意；

C. 不是中心对称图形，故此选项不合题意；

D. 是中心对称图形，故此选项符合题意；

故选：D．

【点睛】本题考查的是中心对称图形．中心对称图形是要寻找对称中心，旋转 180 度后与自身重合．

3. “五一”假期，宜昌旅游市场接待游客 606.7 万人次，实现旅游总收入 41.5 亿元．数据“41.5 亿”用科学记数法表示为（　）．

A. 415×10^{7}　　B. 41.5×10^{8}　　C. 4.15×10^{9}　　D. 4.15×10^{10}

【答案】C

【解析】

【分析】根据科学记数法的定义，表示一个 $|a|>10$ 的数的方法：从右往左数到最后一个非“0”数字，小数点移动的位数为 n 就是 10^{n}，据此即可求解．

【详解】解：41.5 亿 $=4150000000$，

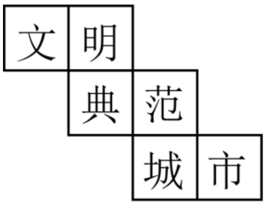
从右往左数到最后一个非“0”数字是 4，小数点共移动了 9 个位数，

$\therefore 41.5$亿$=4150000000=4.15\times 10^{9}$．

故选：C．

【点睛】本题考查了科学记数法的定义，掌握定义并会表示一个具体较大的数是解题的关键．

4.“争创全国文明典范城市，让文明成为宜昌人民　内在气质和城市的亮丽名片”．如图，是一个正方体的平面展开图，把展开图折叠成正方体后，“城”字对面的字是（　）．



A. 文　　B. 明　　C. 典　　D. 范

【答案】B

【解析】

【分析】根据正方体的平面展开图的特点，相对的两个面中间一定隔着一个小正方形，且没有公共边和公共顶点，即“对面无邻点”，以此来找相对面．

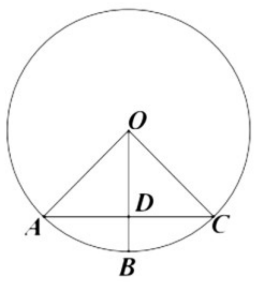
【详解】解：正方体的表面展开图，相对的面之间一定相隔一个正方形，

∴“城”字对面的字是“明”，

故选：B.

【点睛】本题考查了正方体相对面上的字，熟练掌握正方体的平面展开图特点是解题的关键．

5. 如图，OA，OB，OC都是$\odot O$的半径，AC，OB交于点D．若$AD=CD=8$，$OD=6$，则BD的长为（　）．



A. 5　　B. 4　　C. 3　　D. 2

【答案】B

【解析】

【分析】根据等腰三角形的性质得出$OD\perp AC$，根据勾股定理求出$OC=10$，进一步可求出BD的长．

【详解】解：∵$AD=CD=8$，

∴点D为AC的中点，

∵$AO=CO$,

∴$OD\perp AC$，

由勾股定理得，$OC=\sqrt{CD^2+OD^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$,

∴$OB=10$,

∴$BD=OB-OD=10-6=4$,

故选：B．

【点睛】本题主要考查了等腰三角形的性质，勾股定理以及圆的有关性质，正确掌握相关性质是解答本题的关键

6. 下列运算正确的是（　）．

A. $2x^4\div x^3=2x$　　B. $(x^3)^4=x^7$　　C. $x^4+x^3=x^7$　　D. $x^3\cdot x^4=x^{12}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据单项式除以单项式，幂的乘方、合并同类项以及同底数幂的乘法法则计算后再判断即可．

【详解】解：A. $2x^4\div x^3=2x$，计算正确，故选项A符合题意；

B. $(x^3)^4=x^{12}$，原选项计算错误，故选项B不符合题意；

C. x^4与x^3不是同类项不能合并，原选项计算错误，故选项C不符合题意；

D. $x^3\cdot x^4=x^7$，原选项计算错误，故选项D不符合题意．

故选：A．

【点睛】本题主要考查单项式除以单项式，幂的乘方、合并同类项以及同底数幂的乘法，解答的关键是对相应的运算法则的掌握．

7. 某反比例函数图象上四个点的坐标分别为$(-3,y_1),(-2,3),(1,y_2),(2,y_3)$，则，$y_1,y_2,y_3$的大小关系为

（　）

A. $y_2 < y_1 < y_3$　　B. $y_3 < y_2 < y_1$　　C. $y_2 < y_3 < y_1$　　D. $y_1 < y_3 < y_2$

【答案】C

【解析】

【分析】先根据点$(-2,3)$求出反比例函数的解析式，再根据反比例函数的性质即可得．

【详解】解：设反比例函数的解析式为$y=\frac{k}{x}$，

将点$(-2,3)$代入得：$k=-2\times3=-6$，

则反比例函数的解析式为$y=-\frac{6}{x}$，

所以这个函数的图象位于第二、四象限，且在每一象限内，y随x的增大而增大，

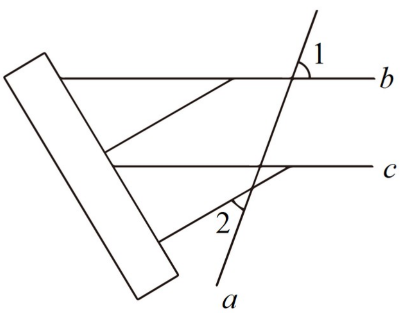
又∵点$(-3,y_1),(1,y_2),(2,y_3)$在函数$y=-\frac{6}{x}$的图象上，且$-3<0<1<2$，

$\therefore y_1>0>y_3>y_2$，即$y_2<y_3<y_1$，

故选：C．

【点睛】本题考查了求反比例函数的解析式、反比例函数的图象与性质，熟练掌握反比例函数的图象与性质是解题关键．

8. 如图，小颖按如下方式操作直尺和含30°角的三角尺，依次画出了直线a，b，c．如果$\angle 1=70^\circ$，则$\angle 2$的度数为（　）．



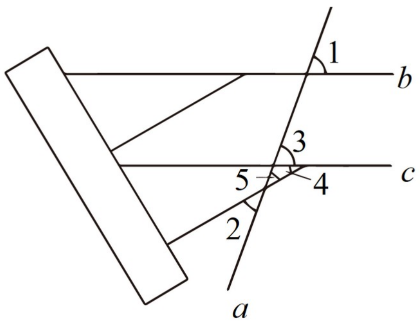
A. 110°　　B. 70°　　C. 40°　　D. 30°

【答案】C

【解析】

【分析】可求 $\angle3=\angle4+\angle5=70^\circ$ ，由 $\angle2=\angle5$ ，即可求解．

【详解】解：如图，



由题意得： $\angle4=30^\circ$ ， $a\parallel b$ ，

$\therefore\angle3=\angle1=70^\circ$ ，

$\angle3=\angle4+\angle5=70^\circ$ ，

$\therefore\angle5=40^\circ$ ，

$\therefore\angle2=\angle5=40^\circ$ ，

故选：C．

【点睛】本题考查了平行线的性质，对顶角的性质，三角形外角定理，掌握平行线的性质是解题的关键．

9. 在日历上，某些数满足一定的规律．如图是某年 8 月份的日历，任意选择其中所示的含 4 个数字的方框部分，设右上角的数字为 a，则下列叙述中正确的是（　）．

日	一	二	三	四	五	六
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25

26	27	28	29	30	31	

A. 左上角的数字为 $a+1$

B. 左下角的数字为 $a+7$

C. 右下角的数字为 $a+8$

D. 方框中 4 个位置的数相加，结果是 4 的倍数

【答案】D

【解析】

【分析】根据日历中的数字规律：同一行中后面的数字比它前面的大 1，同一列中上一行比下一行的大 7，然后用含 a 的式子表示其余三个数，表达规律即可．

【详解】解：日历中的数字规律：同一行中后面的数字比它前面的大 1，同一列中上一行比下一行的大 7，任意选择其中所示的含 4 个数字的方框部分，设右上角的数字为 a，则有：

左上角的数字为 $a-1$，故选项 A 错误，不符合题意；

左下角的数字为 $a+6$，故选项 B 错误，不符合题意；

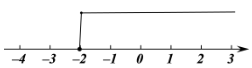
右下角的数字为 $a+7$，故选项 C 错误，不符合题意；

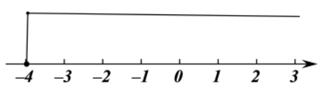
把方框中 4 个位置的数相加，即：$a-1+a+a+6+a+7=4a+12=4\left(a+3\right)$，结果是 4 的倍数，故选项 D 正确；

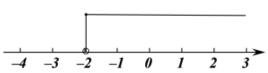
故选：D．

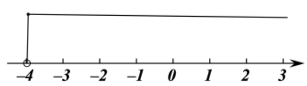
【点睛】本题考查整式的混合运算和列代数式，解题的关键是掌握整式相关运算的法则．

10. 解不等式 $\frac{1+4x}{3}>x-1$，下列在数轴上表示的解集正确的是（　）．

A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】D

【解析】

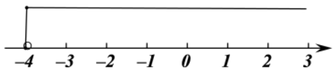
【分析】按去分母、去括号、移项、合并同类项，未知数系数化为1的步骤求出解集，再把解集在数轴上表示出来，注意包含端点值用实心圆点，不包含端点值用空心圆点，即可求解．

【详解】解：$1+4x>3x-3$

$4x-3x>-3-1$

$x>-4$，

解集在数轴上表示为



故选：D．

【点睛】本题考查了一元一次不等式的解法及解集在数轴上的表示方法，掌握解法及表示方法是解题的关键．

11. 某校学生去距离学校12km的博物馆参观，一部分学生骑自行车先走，过了20min后，其余学生乘汽车出发，结果他们同时到达．已知汽车的速度是骑车学生速度的2倍，汽车的速度是（　）．

A. $0.2\text{km}/\text{min}$　　B. $0.3\text{km}/\text{min}$　　C. $0.4\text{km}/\text{min}$　　D. $0.6\text{km}/\text{min}$

【答案】B

【解析】

【分析】设骑车学生的速度为$x\text{km}/\text{min}$，则汽车的速度为$2x\text{km}/\text{min}$，根据题意可得，乘坐汽车比骑自行车少用20min,据此列分式方程求解．

【详解】解：设骑车学生的速度为$x\text{km}/\text{min}$，则汽车的速度为$2x\text{km}/\text{min}$，

由题意得：$\frac{12}{x}-\frac{12}{2x}=20$，

解得：$x=0.3$，

经检验：$x=0.3$是原方程的解，且符合题意，

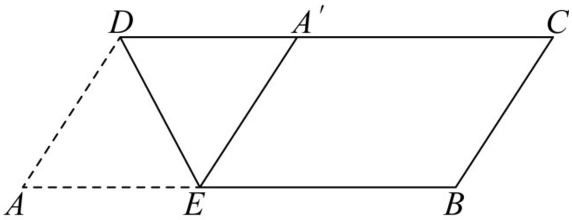
所以，骑车学生的速度为 $0.3\mathrm{km}/\mathrm{min}$ ．

故选：B．

【点睛】本题考查了分式方程的应用，解答本题的关键是读懂题意，设出未知数，找出合适的等量关系，列方程求解，注意检验．

二、填空题（将答案写在答题卡上指定的位置．每题3分，计12分．）

12. 如图，小宇将一张平行四边形纸片折叠，使点 A 落在长边 CD 上的点 A 处，并得到折痕 DE ，小宇测得长边 $CD=8$ ，则四边形 $A'EBC$ 的周长为________．



【答案】16

【解析】

【分析】可证 $\angle ADE=\angle AED$ ，从而可得 $AD=AE$ ，再证四边形 $A'EBC$ 是平行四边形，可得 $C_{\square A'EBC}=2(A'C+A'E)$ ，即可求解．

【详解】解：∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AB\parallel CD$ ，

$\therefore \angle AED=\angle A'DE$ ，

由折叠得：$\angle ADE=\angle A'DE$ ，

$AD=A'D$ ，$AE=A'E$ ，

$\therefore \angle ADE=\angle AED$ ，

$\therefore AD=AE$ ，

$\therefore AD = AE = A'D = A'E$，

$\therefore AB - BE = CD - A'D$，

$\therefore A'C = BE$，

$\therefore$ 四边形 $A'EBC$ 是平行四边形，

$\therefore C_{\square A'EBC} = 2(A'C + A'E)$

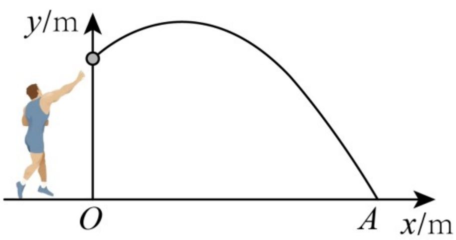
$= 2(A'C + A'D)$

$= 2CD = 16$．

故答案：16．

【点睛】本题考查了平行四边形判定及性质，折叠的性质，掌握相关的判定方法及性质是解题的关键．

13. 如图，一名学生推铅球，铅球行进高度 y（单位：m）与水平距离 x（单位：m）之间的关系是 $y = -\frac{1}{12}(x-10)(x+4)$，则铅球推出的距离 $OA =$_________m．



【答案】10

【解析】

【分析】令 $y=0$，则 $0 = -\frac{1}{12}(x-10)(x+4)$，再解方程，结合函数图象可得答案．

【详解】解：令 $y=0$，则 $0 = -\frac{1}{12}(x-10)(x+4)$，

解得：$x_1 = 10$，$x_2 = -4$，

$\therefore OA=10$，

故答案为：10．

【点睛】本题考查的是二次函数的实际应用，理解题意令$y=0$求解方程的解是解本题的关键．

14. 已知x_1、x_2是方程$2x^2-3x+1=0$的两根，则代数式$\frac{x_1+x_2}{1+x_1x_2}$的值为_________．

【答案】1

【解析】

【分析】根据x_1、x_2是一元二次方程$ax^2+bx+c=0$的两个根，则有$\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{b}{a}\\x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}\end{cases}$，求解即可．

【详解】解：由题意得

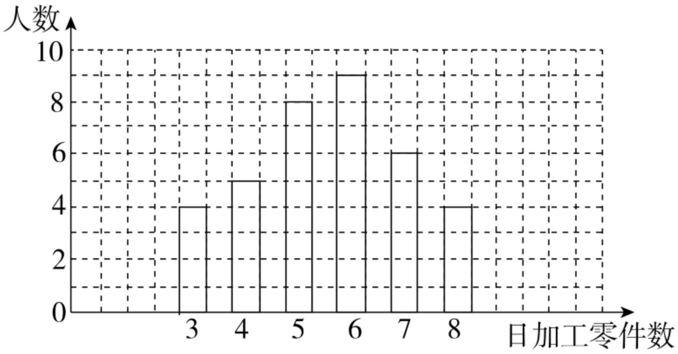
$\begin{cases}x_1+x_2=\frac{3}{2}\\x_1\cdot x_2=\frac{1}{2}\end{cases}$，

原式$=\frac{\frac{3}{2}}{1+\frac{1}{2}}=1$．

故答案：1．

【点睛】本题考查了韦达定理，掌握定理是解题的关键．

15. 如图，条形图描述了某车间工人日加工零件数的情况．这些工人日加工零件数的中位数是_________．



【答案】6

【解析】

【分析】将这组数据按从小到大的顺序排列，数据的个数是奇数时，中间的数为中位数，数据的个数为偶数时，中间两个数的平均数即可求解.

【详解】解：由图得：工人人数为$4+5+8+9+6+4=36$，

$\therefore$将这组数据按从小到大的顺序排列后，中间的两个数为第18、19个数，

$\because$第18、19个数都是6，

$\therefore \dfrac{6+6}{2}=6$，

故答案：6．

【点睛】本题考查了中位数的定义，理解定义是解题的关键．

三、解答题（将解答过程写在答题卡上指定的位置．本大题共有9题，计75分．）

16. 先化简，再求值：$\dfrac{a^2-4a+4}{a^2-4}\div\dfrac{a-2}{a^2+2a}+3$，其中$a=\sqrt{3}-3$．

【答案】$a+3,\sqrt{3}$

【解析】

【分析】先利用分式除法法则对原式进行化简，再把$a=\sqrt{3}-3$代入化简结果进行计算即可．

【详解】解：$\dfrac{a^2-4a+4}{a^2-4}\div\dfrac{a-2}{a^2+2a}+3$

$=\frac{(a-2)^2}{(a+2)(a-2)}\times\frac{a(a+2)}{a-2}+3$

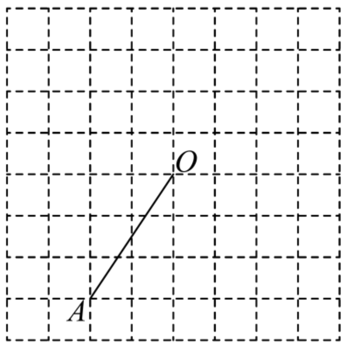
$=a+3$

当$a=\sqrt{3}-3$时，

原式$=\sqrt{3}-3+3=\sqrt{3}$.

【点睛】此题考查了分式的化简求值，熟练掌握分式的除法运算法则和二次根式的运算法则是解题的关键．

17. 如图，在方格纸中按要求画图，并完成填空．



（1）画出线段OA绕点O顺时针旋转90°后得到的线段OB，连接AB；

（2）画出与$\triangle AOB$关于直线OB对称的图形，点A的对称点是C；

（3）填空：$\angle OCB$的度数为_________．

【答案】（1）详见解析

（2）详见解析　（3）45°

【解析】

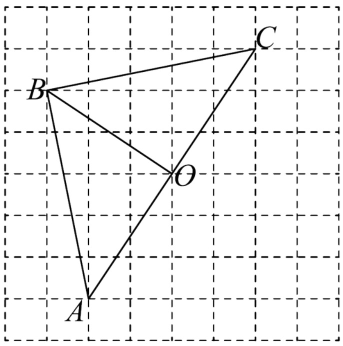
【分析】（1）根据题目叙述画出图形即可；

（2）根据题目叙述画出图形即可；

（3）由（1）作图可得$\triangle AOB$是等腰直角三角形，且$\angle A=45^\circ$，由对称的性质可得$\angle OCB=45^\circ$．

【小问1详解】

在方格纸中画出线段OA绕点O顺时针旋转90°后得到的线段OB，连接AB,如图；



【小问 2 详解】

画出与$\triangle AOB$关于直线OB对称的图形，点A的对称点是C；如上图所示：

【小问 3 详解】

由（1）作图可得$\triangle AOB$是等腰直角三角形，且$\angle A=45^{\circ}$，

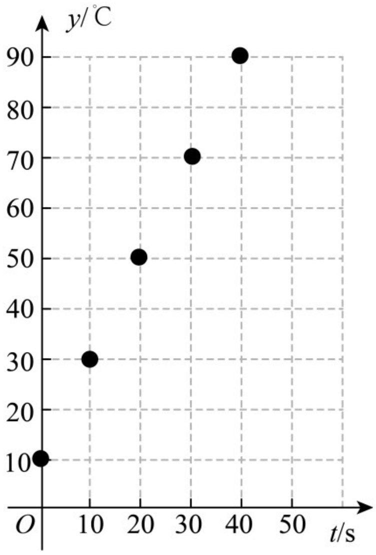
再根据对称的性质可得$\angle OCB=\angle A=45^{\circ}$．

故答案为：45°．

【点睛】此题考查了旋转作图及作轴对称图形，解答本题的关键是仔细审题，得出旋转三要素，进而得出旋转后的图形．

18. 某食用油　沸点温度远高于水的沸点温度．小聪想用刻度不超过$100^{\circ}\mathrm{C}$的温度计测算出这种食用油沸点的温度．在老师的指导下，他在锅中倒入一些这种食用油均匀加热，并每隔$10\mathrm{s}$测量一次锅中油温，得到的数据记录如下：

时间 t/s	0	10	20	30	40
油温 y/$^{\circ}\mathrm{C}$	10	30	50	70	90



（1）小聪在直角坐标系中描出了表中数据对应的点．经老师介绍，在这种食用油达到沸点前，锅中油温y（单位：$^{\circ}C$）与加热的时间t（单位：s）符合初中学习过的某种函数关系，填空：可能是_________函数关系（请选填“正比例”“一次”“二次”“反比例”）；

（2）根据以上判断，求y关于t的函数解析式；

（3）当加热$110s$时，油沸腾了，请推算沸点的温度．

【答案】（1）一次　（2）$y=2t+10$

（3）当加热$110s$时，油沸腾了，推算沸点的温度为$230^{\circ}C$

【解析】

【分析】（1）根据表格中两个变量变化的对应值进行解答即可．

（2）运用待定系数法求解即可；

（3）把$t=110$代入函数关系式，求出函数值即可．

【小问1详解】

由表格中两个变量对应值的变化规律可知，时间每增加$10s$，油的温度就升高$20℃$，

故可知可能是一次函数关系，

故答案为：一次；

【小问2详解】

设这个一次函数的解析式为 $y=kt+b(k\neq 0)$，

∵当 $t=0$ 时，$y=10$；当 $t=10$ 时，$y=30$，

$\therefore \begin{cases} 10=b \\ 30=10k+b \end{cases}$，

解得 $\begin{cases} k=2 \\ b=10 \end{cases}$，

∴y 关于 t 的函数解析式为 $y=2t+10$；

【小问 3 详解】

当 $t=110$ 时，$y=2\times 110+10=230$

答：当加热 $110\mathrm{s}$ 时，油沸腾了，推算沸点的温度为 $230^{\circ}\mathrm{C}$．

【点睛】本题考查函数的表示方法以及求函数值；能够通过表格确定自变量与因变量的变化关系是解题的关键．

19. 2023 年 5 月 30 日，“神舟十六号”航天飞船成功发射．如图，飞船在离地球大约 $330\mathrm{km}$ 圆形轨道上，当运行到地球表面 P 点的正上方 F 点时，从中直接看到地球表面一个最远的点是点 Q．在 $\mathrm{Rt}\triangle OQF$ 中，$OP=OQ\approx 6400\mathrm{km}$．

（参考数据：$\cos 16^{\circ}\approx 0.96$，$\cos 18^{\circ}\approx 0.95$，$\cos 20^{\circ}\approx 0.94$，$\cos 22^{\circ}\approx 0.93$，$\pi\approx 3.14$）

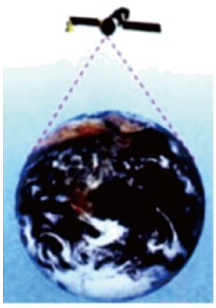


图 1

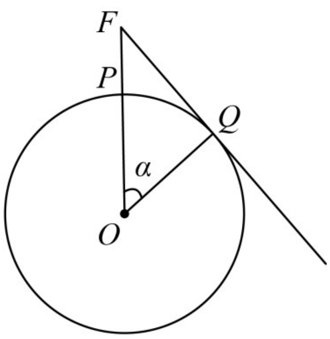


图 2

（1）求$\cos\alpha$的值（精确到0.01）；

（2）在$\odot O$中，求$\overset{\frown}{PQ}$的长（结果取整数）．

【答案】（1）0.95

（2）2010km

【解析】

【分析】（1）在$\text{Rt}\triangle OFQ$中，利用余弦函数即可求解；

（2）先求得α的度数，再利用弧长公式即可求解．

【小问1详解】

解：由题意可知，$PF=330\text{km}$，

$\because OP=OQ\approx 6400\text{km}$，

$\therefore OF=OP+PF=330+6400=6730\text{km}$，

$\therefore$在$\text{Rt}\triangle OFQ$中，$\cos\alpha=\dfrac{OQ}{OF}=\dfrac{6400}{6730}\approx 0.95$；

【小问2详解】

解：$\because\cos\alpha\approx 0.95$，$\cos 18^\circ\approx 0.95$，

$\therefore\alpha=18^\circ$，

$\therefore\overset{\frown}{PQ}$的长为$l=\dfrac{18\times\pi\times 6400}{180}=640\pi$

≈ 2009.6

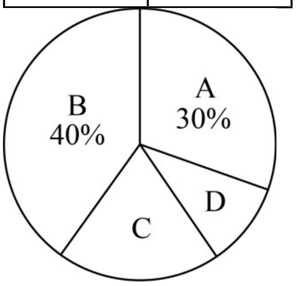
$\approx 2010\text{km}$．

【点睛】本题考查了求余弦函数的值，弧长公式的应用，解题的关键是灵活运用所学知识解决问题．

20. “阅读新时代，书香满宜昌”．在“全民阅读月”活动中，某校提供了四类适合学生阅读的书籍：A文学类，B科幻类，C漫画类，D数理类．为了解学生阅读兴趣，学校随机抽取了部分学生进行调查（每位学生仅

选一类）．根据收集到的数据，整理后得到下列不完整的图表：

书籍类别	学生人数
A 文学类	24
B 科幻类	m
C 漫画类	16
D 数理类	8



（1）本次抽查的学生人数是_________，统计表中的 $m=$_________；

（2）在扇形统计图中，“C 漫画类”对应的圆心角的度数是_________；

（3）若该校共有 1200 名学生，请你估计该校学生选择“D 数理类”书籍的学生人数；

（4）学校决定成立“文学”“科幻”“漫画”“数理”四个阅读社团．若小文、小明随机选取四个社团中的一个，请利用列表或画树状图的方法，求他们选择同一社团的概率．

【答案】（1）80，32

（2）72°

（3）120

（4）$\frac{1}{4}$

【解析】

【分析】（1）利用 A 文学类的人数除以对应的百分比即可得到本次抽查的学生人数，用抽查总人数乘以 B 科幻类的百分比即可得到 m 的值；

（2）用 360° 乘以“C 漫画类”对应的百分比即可得到“C 漫画类”对应的圆心角的度数；

（3）用该校共有学生数乘以抽查学生中选择“D 数理类”书籍的学生的百分比即可得到该校学生选择“D 数理

类”书籍的学生人数；

（4）画出树状图，找到等可能情况总数和小文、小明选择同一社团的情况数，利用概率公式求解即可．

【小问 1 详解】

解：由题意得，本次抽查的学生人数是 $24\div30\%=80$（人），

统计表中的 $m=80\times40\%=32$，

故答案为：80，32

【小问 2 详解】

在扇形统计图中，“C 漫画类”对应的圆心角的度数是：

$360^\circ\times\frac{16}{80}\times100\%=72^\circ$，

故答案为：72°

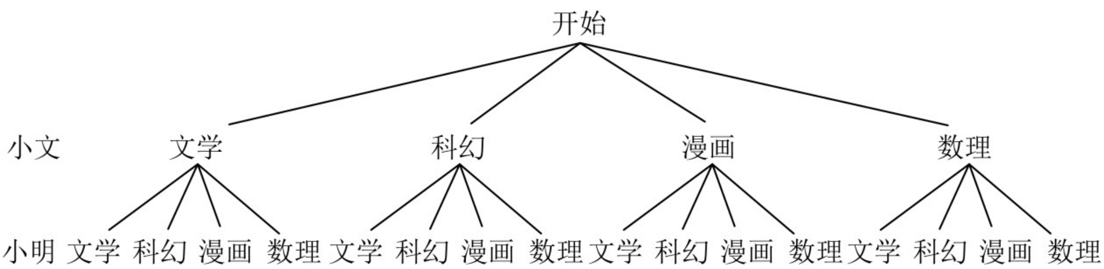
【小问 3 详解】

由题意得，$1200\times\frac{8}{80}\times100\%=120$（人），

即估计该校学生选择“D 数理类”书籍的学生为 120 人；

【小问 4 详解】

树状图如下：



从树状图可看出共有 16 种等可能的情况，小文、小明选择同一社团的情况数共有 4 种，

$\therefore P$（小文、小明选择同一社团）$=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$．

【点睛】此题考查了树状图或列表法求概率、样本估计总体、扇形统计图等相关知识，读懂题意，熟练掌握树状图或列表法求概率和准确计算是解题的关键．

21. 如图 1，已知 AB 是 $\odot O$ 的直径，PB 是 $\odot O$ 的切线，PA 交 $\odot O$ 于点 C，$AB=4$，$PB=3$．

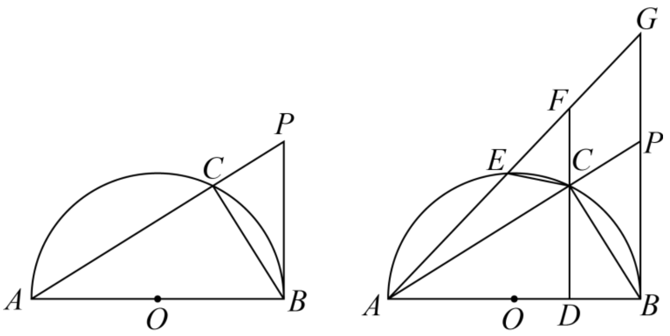


图1　　图2

（1）填空：$\angle PBA$ 的度数是_________，PA 的长为_________；

（2）求 $\triangle ABC$ 的面积；

（3）如图 2，$CD\perp AB$，垂足为 D．E 是 $\overset{\frown}{AC}$ 上一点，$AE=5EC$．延长 AE，与 DC，BP 的延长线分别交于点 F,G，求 $\dfrac{EF}{FG}$ 的值．

【答案】（1）90°，5；

（2）$\dfrac{96}{25}$

（3）$\dfrac{7}{18}$

【解析】

【分析】（1）根据切线性质和勾股定理分别求解即可；

（2）由面积法求出 $BC=\dfrac{12}{5}$，再利用勾股定理求 AC，则 $\triangle ABC$ 的面积可求；

（3）先证明 $\triangle EAC\backsim\triangle PAG$，得到 $\dfrac{AC}{AG}=\dfrac{AE}{AP}=\dfrac{EC}{GP}$，利用 $AE=5EC$，分别得到 $GP=1$，$AB=BG$

进而计算 $AG=4\sqrt{2}$，$AF=\frac{64\sqrt{2}}{25}$，在分别求出 EF,FG 则问题可解；

【小问1详解】

解：∵ AB 是 $\odot O$ 的直径，PB 是 $\odot O$ 的切线，

∴ $\angle PBA$ 的度数是 90°；

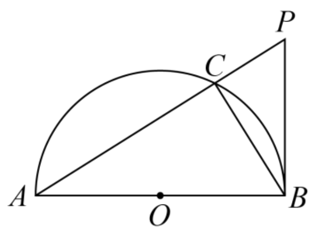
∵ $AB=4$，$PB=3$，

∴ $PA=\sqrt{AB^2+PB^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$；

故答案为：90°，5；

【小问2详解】

如图，



∵ AB 是 $\odot O$ 的直径，

∴ $\angle ACB=\angle PCB=90^\circ$，

$AB=4$，$PB=3$，$PA=5$，

∴由面积法 $\frac{1}{2}AB\cdot PB=\frac{1}{2}AP\cdot BC$，

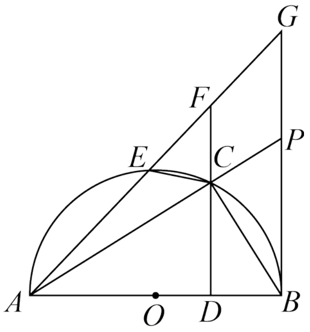
∴ $BC=\frac{12}{5}$

∴ $AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{4^2-\left(\frac{12}{5}\right)^2}=\frac{16}{5}$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times\frac{16}{5}\times\frac{12}{5}=\frac{96}{25}$；

【小问3详解】

方法一：如图，



由$\angle ACB=\angle ABP=90^{\circ}$

$\therefore \angle APB=\angle ABC$

$\because \angle FEC=\angle ABC$

$\therefore \angle FEC=\angle APB$

$\therefore \angle AEC=\angle APG$

$\because \angle EAC=\angle PAG$

$\therefore \triangle EAC\backsim\triangle PAG$

$\therefore \frac{AC}{AG}=\frac{AE}{AP}=\frac{EC}{GP}$

设$EC=x,\quad AE=5x$

$\because AP=5$

$\therefore GP=1$

$\therefore BG=BP+PG=3+1=4$

$\therefore AB=BG$

$\therefore \triangle ABG$是等腰直角三角形，$AG=4\sqrt{2}$

$\because AC=\frac{16}{5}$，

$\therefore x=\frac{2\sqrt{2}}{5}$

$\therefore AE=5x=2\sqrt{2}$

$\because \angle GAB=45^{\circ}$

$\therefore \triangle FAD$ 是等腰直角三角形

$\because \cos\angle CAD=\frac{AD}{AC}=\frac{AC}{AB}$，

$\therefore \frac{AD}{\frac{16}{5}}=\frac{\frac{16}{5}}{4}$，

$\therefore AD=\frac{64}{25}$，

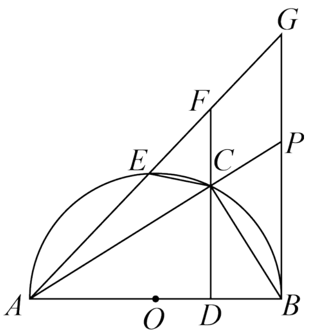
$\therefore AF=\frac{64\sqrt{2}}{25}$，

$\therefore EF=AF-AE=\frac{14\sqrt{2}}{25}$，

$\therefore FG=AG-AF=\frac{36\sqrt{2}}{25}$，

$\therefore \frac{EF}{FG}=\frac{14}{25}\sqrt{2}:\frac{36}{25}\sqrt{2}=\frac{7}{18}$.

方法二：如图



由$\angle ACB = \angle ADC = 90^{\circ}$

$\therefore \angle ACD = \angle ABC$

$\angle FEC = \angle ABC$

$\therefore \angle FEC = \angle ACD$

$\therefore \angle AEC = \angle ACF$

$\angle EAC = \angle CAF$

$\therefore \triangle EAC \backsim \triangle CAF$

$\therefore \frac{AC}{AF} = \frac{AE}{AC} = \frac{EC}{FC}$

设$EC = x, AE = 5x$

$\because AC = \frac{16}{5}$

$\therefore FC = \frac{16}{25}$，

$AD = \frac{64}{25}$，$CD = \frac{48}{25}$

$\therefore FD = FC + CD = \frac{16}{25} + \frac{48}{25} = \frac{64}{25}$

$\therefore AD = DF$

$\therefore \triangle ADF$是等腰直角三角形，$AF = \frac{64}{25}\sqrt{2}$

$\therefore x=\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$

$\therefore AE=5x=2\sqrt{2}$

$\therefore EF=AF-AE=\dfrac{14\sqrt{2}}{25}$

$\because \angle FAD=45^\circ$

$\therefore \triangle GAB$ 是等腰直角三角形，$AG=4\sqrt{2}$，

$\therefore GF=AG-AF=\dfrac{36\sqrt{2}}{25}$

$\therefore \dfrac{EF}{FG}=\dfrac{14}{25}\sqrt{2}:\dfrac{36}{25}\sqrt{2}=\dfrac{7}{18}$．

【点睛】本题考查了圆的切线的性质和相似三角形的性质和判定，解答关键是根据条件证明三角形相似，再根据相似三角形的性质解答问题．

22. 为纪念爱国诗人屈原，人们有了端午节吃粽子的习俗．某顾客端午节前在超市购买豆沙粽 10 个，肉粽 12 个，共付款 136 元，已知肉粽单价是豆沙粽的 2 倍．

（1）求豆沙粽和肉粽的单价；

（2）超市为了促销，购买粽子达 20 个及以上时实行优惠，下表列出了小欢妈妈、小乐妈妈的购买数量（单位：个）和付款金额（单位：元）；

	豆沙粽数量	肉粽数量	付款金额
小欢妈妈	20	30	270
小乐妈妈	30	20	230

① 根据上表，求豆沙粽和肉粽优惠后的单价；

② 为进一步提升粽子的销量，超市将两种粽子打包成 A，B 两种包装销售，每包都是 40 个粽子（包装成本忽略不计），每包的销售价格按其中每个粽子优惠后的单价合计．A，B 两种包装中分别有 m 个豆沙粽，m 个肉粽，A 包装中的豆沙粽数量不超过肉粽的一半．端午节当天统计发现，A，B 两种包装的销量分别为

$(80-4m)$包，$(4m+8)$包，A，B两种包装的销售总额为17280元．求m的值．

【答案】（1）豆沙粽的单价为4元，肉粽的单价为8元

（2）①豆沙粽优惠后的单价为3元，肉粽优惠后的单价为7元；②$m=10$

【解析】

【分析】（1）设豆沙粽的单价为x元，则肉粽的单价为$2x$元，依题意列一元一次方程即可求解；

（2）①设豆沙粽优惠后的单价为a元，则肉粽优惠后的单价为b元，依题意列二元一次方程组即可求解；②根据销售额=销售单价×销售量，列一元二次方程，解之即可得出m的值．

【小问1详解】

解：设豆沙粽的单价为x元，则肉粽的单价为$2x$元，

依题意得$10x+12\times 2x=136$，

解得$x=4$；

则$2x=8$；

所以豆沙粽的单价为4元，肉粽的单价为8元；

【小问2详解】

解：①设豆沙粽优惠后的单价为a元，则肉粽优惠后的单价为b元，

依题意得$\begin{cases}20a+30b=270\\30a+20b=230\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=3\\b=7\end{cases}$，

所以豆沙粽优惠后的单价为3元，肉粽优惠后的单价为7元；

②依题意得$[3m+(40-m)\times 7]\times(80-4m)+[3\times(40-m)+7m]\times(4m+8)=17280$，

解得$m=19$或$m=10$，

$\because m<\frac{1}{2}(40-m)$，

$\therefore m<\frac{40}{3}$，

$\therefore m=10$．

【点睛】本题考查了一元二次方程的应用、二元一次方程组的应用和一元一次方程的应用，根据题意找到题中的等量关系列出方程或方程组是解题的关键．

23. 如图，在正方形$ABCD$中，E，F分别是边AD，AB上的点，连接CE，EF，CF．

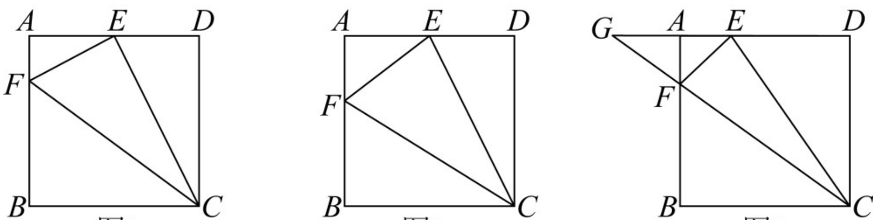


图1　　图2　　图3

（1）若正方形$ABCD$的边长为2，E是AD的中点．

① 如图1，当$\angle FEC=90^{\circ}$时，求证：$\triangle AEF\backsim\triangle DCE$；

② 如图2，当$\tan\angle FCE=\frac{2}{3}$时，求$AF$的长；

（2）如图3，延长CF，DA交于点G，当$GE=DE,\sin\angle FCE=\frac{1}{3}$时，求证：$AE=AF$．

【答案】（1）①详见解析；②$AF=\frac{6}{7}$

（2）详见解析

【解析】

【分析】（1）①由$\angle ADC=\angle BAD=\angle FEC=90^{\circ}$，证明$\angle AEF=\angle ECD$，可得结论；②如图，延长

DA，CF交于点G作$GH\perp CE$，垂足为H，证明$\triangle CED\backsim\triangle GEH$，可得$\frac{GE}{CE}=\frac{GH}{CD}=\frac{EH}{ED}$，可得

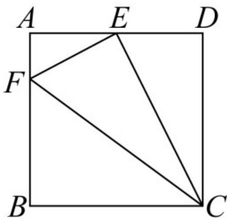
$CE=\sqrt{5}$，设$EH=m,GH=2m,EG=\sqrt{5}m$可得$\tan\angle FCE=\frac{GH}{CH}=\frac{2m}{\sqrt{5}+m}=\frac{2}{3}$，可得$m=\frac{\sqrt{5}}{2}$，可

得 $EG=\sqrt{5}m=\frac{5}{2}$，证明 $\triangle AGF\backsim\triangle DGC$，可得 $\frac{AG}{DG}=\frac{AF}{DC}$，从而可得答案；

（2）如图，延长 CE，作 $GH\perp CE$，垂足为 H，证明 $\triangle CED\backsim\triangle GEH$，设 $AD=CD=a,GE=DE=t,EH=x,GH=y,CE=n$，可得 $x=\frac{t^2}{n},y=\frac{at}{n}$，由 $\sin\angle FCE=\frac{1}{3}$，可得 $\tan\angle FCE=\frac{1}{2\sqrt{2}}$，可得 $2\sqrt{2}at=t^2+n^2$，由 $n^2=t^2+a^2$ 可得 $a^2-2\sqrt{2}at+2t^2=0$，可得 $a=\sqrt{2}t$，证明 $\triangle AGF\backsim\triangle DGC$，可得 $\frac{AG}{DG}=\frac{AF}{DC}$，$AF=\frac{a(2t-a)}{2t}=a-\frac{a^2}{2t}=a-\frac{2t^2}{2t}=a-t$，从而可得答案．

【小问 1 详解】

解：如图，



正方形 $ABCD$ 中，$CD=AD=2$，

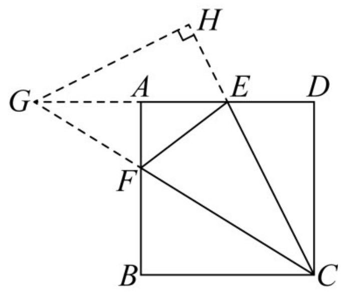
① $\angle ADC=\angle BAD=\angle FEC=90^\circ$，

$\therefore \angle AEF+\angle CED=90^\circ=\angle CED+\angle DCE$，

$\therefore \angle AEF=\angle ECD$，

$\therefore \triangle AEF\backsim\triangle DCE$，

② 如图，



延长 DA，CF 交于点 G，

作 $GH \perp CE$，垂足为 H，

$\because \angle EDC = \angle EHG = 90^\circ$ 且 $\angle CED = \angle GEH$，

$\therefore \triangle CED \backsim \triangle GEH$，

$\therefore \dfrac{GE}{CE} = \dfrac{GH}{CD} = \dfrac{EH}{ED}$，

$\because CD = 2, DE = 1$，

$\therefore CE = \sqrt{5}$，

方法一：设 $EH = m$，

$\therefore \dfrac{GE}{\sqrt{5}} = \dfrac{GH}{2} = \dfrac{m}{1}$，

$\therefore GH = 2m, EG = \sqrt{5}m$，

$\therefore$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle CHG$ 中，$\tan \angle FCE = \dfrac{GH}{CH} = \dfrac{2m}{\sqrt{5} + m} = \dfrac{2}{3}$，

$\therefore m = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$，

$\therefore EG = \sqrt{5}m = \dfrac{5}{2}$，

方法二：在$\mathrm{Rt}\triangle GHE$中，由$\tan\angle FCE=\dfrac{2}{3}$，设$GH=2n, CH=3n$，

$\therefore \dfrac{3n-\sqrt{5}}{1}=\dfrac{2n}{2}=\dfrac{GE}{\sqrt{5}}$，

$\therefore n=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，

$\therefore GE=\sqrt{5}n=\dfrac{5}{2}$，

又$\because$ $\angle GAF=\angle GDC=90^{\circ}$且$\angle AGF=\angle DGC$，

$\therefore \triangle AGF\backsim\triangle DGC$，

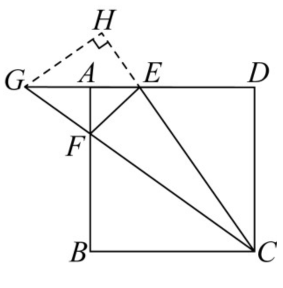
$\therefore \dfrac{AG}{DG}=\dfrac{AF}{DC}$，

$\therefore \dfrac{3}{2}:\dfrac{7}{2}=AF:2$，

$\therefore AF=\dfrac{6}{7}$；

【小问2详解】

如图



延长CE，作$GH\perp CE$，垂足为H，

$\because$ $\angle EDC=\angle EHG=90^{\circ}$且$\angle CED=\angle GEH$，

$\therefore \triangle CED \backsim \triangle GEH$，

设 $AD=CD=a, GE=DE=t, EH=x, GH=y, CE=n$，

$\therefore \frac{x}{t}=\frac{y}{a}=\frac{t}{n}$，

$\therefore x=\frac{t^2}{n}, y=\frac{at}{n}$，

在Rt$\triangle CHG$中，$\sin\angle FCE=\frac{1}{3}$，

$\therefore \tan\angle FCE=\frac{1}{2\sqrt{2}}$，

$\therefore \frac{y}{x+n}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$，

$\therefore 2\sqrt{2}y=x+n$，

$\therefore \frac{2\sqrt{2}at}{n}=\frac{t^2}{n}+n$，

$\therefore 2\sqrt{2}at=t^2+n^2$，

在Rt$\triangle CDE$中，$n^2=t^2+a^2$，

$\therefore 2\sqrt{2}at=t^2+t^2+a^2$，

$\therefore a^2-2\sqrt{2}at+2t^2=0$，

$\therefore (a-\sqrt{2}t)^2=0$，则 $a=\sqrt{2}t$，

又 $\angle GAF=\angle GDC=90^\circ$ 且 $\angle AGF=\angle DGC$，

$\therefore \triangle AGF \backsim \triangle DGC$，

$\therefore \frac{AG}{DG}=\frac{AF}{DC}$，

$\therefore \frac{AF}{a}=\frac{2t-a}{2t}$，

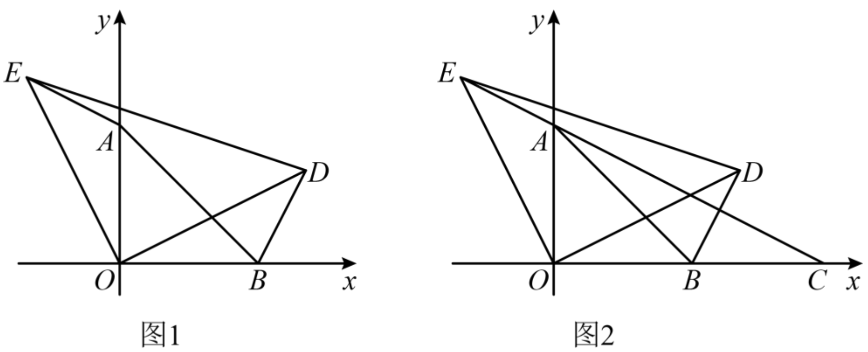
$\therefore AF=\frac{a(2t-a)}{2t}=a-\frac{a^2}{2t}=a-\frac{2t^2}{2t}=a-t$，

$\because AE=a-t$，

$\therefore AE=AF$．

【点睛】本题考查的是正方形的性质，勾股定理的应用，相似三角形的判定与性质，锐角三角函数的应用，本题计算量大，对学生的要求高，熟练的利用参数建立方程是解本题的关键．

24. 如图，已知 $A(0,2), B(2,0)$．点 E 位于第二象限且在直线 $y=-2x$ 上，$\angle EOD=90^\circ$，$OD=OE$，连接 AB，DE，AE，DB．



（1）直接判断 $\triangle AOB$ 的形状：$\triangle AOB$ 是_________三角形；

（2）求证：$\triangle AOE\cong\triangle BOD$；

（3）直线 EA 交 x 轴于点 $C(t,0), t>2$．将经过 B，C 两点的抛物线 $y_1=ax^2+bx-4$ 向左平移 2 个单位，得到抛物线 y_2．

① 若直线 EA 与抛物线 y_1 有唯一交点，求 t 的值；

② 若抛物线 y_2 的顶点 P 在直线 EA 上，求 t 的值；

③ 将抛物线 y_2 再向下平移，$\frac{2}{(t-1)^2}$ 个单位，得到抛物线 y_3．若点 D 在抛物线 y_3 上，求点 D 的坐标．

【答案】（1）等腰直角三角形

（2）详见解析　（3）① $t=3$；② $t=6$；③ $D\left(\frac{12}{5},\frac{6}{5}\right)$

【解析】

分析】（1）由 $A(0,2), B(2,0)$ 得到 $OA=OB=2$，又由 $\angle AOB=90^\circ$，即可得到结论；

（2）由 $\angle EOD=90^\circ$，$\angle AOB=90^\circ$ 得到 $\angle AOE=\angle BOD$，又有 $AO=OB$，$OD=OE$，利用SAS即可证明 $\triangle AOE\cong\triangle BOD$；

（3）①求出直线 AC 的解析式和抛物线 y_1 的解析式，联立得 $x^2-(t+3)x+3t=0$，由 $\Delta=(t+3)^2-4\times3t=(t-3)^2=0$ 即可得到 t 的值；

② 抛物线 $y_1=-\frac{2}{t}x^2+\frac{2}{t}(t+2)x-4$ 向左平移 2 个单位得到抛物线 $y_2=-\frac{2}{t}\left(x-\frac{t-2}{2}\right)^2+\frac{(t-2)^2}{2t}$，则抛物线 y_2 的顶点 $P\left(\frac{t-2}{2},\frac{(t-2)^2}{2t}\right)$，将顶点 $P\left(\frac{t-2}{2},\frac{(t-2)^2}{2t}\right)$ 代入 $y_{AC}=-\frac{2}{t}x+2$ 得到 $t^2-6t=0$，解得 $t_1=0,t_2=6$,根据 $t>2$ 即可得到 t 的值；

③ 过点 E 作 $EM\perp x$ 轴，垂足为 M，过点 D 作 $DN\perp x$ 轴，垂足为 N，先证明 $\triangle ODN\cong\triangle EOM(AAS)$，则 $ON=EM, DN=OM$，设 $EM=2OM=2m$,由 $OA\parallel EM$ 得到 $OC:CM=OA:EM$,则

$\frac{t}{t+m}=\frac{2}{2m}$,求得$m=\frac{t}{t-1}$,得到$D\left(\frac{2t}{t-1},\frac{t}{t-1}\right)$，由抛物线$y_2$再向下平移$\frac{2}{(t-1)^2}$个单位，得到抛物线

$y_3=-\frac{2}{t}x^2+\frac{2}{t}(t-2)x-\frac{2}{(t-1)^2}$,把$D\left(\frac{2t}{t-1},\frac{t}{t-1}\right)$代入抛物线$y_3=-\frac{2}{t}x^2+\frac{2}{t}(t-2)x-\frac{2}{(t-1)^2}$,得到

$3t^2-19t+6=0$,解得$t_1=\frac{1}{3},t_2=6$,由$t>2$，得$t=6$,即可得到点D的坐标．

【小问1详解】

证明：∵$A(0,2),B(2,0)$，

∴$OA=OB=2$，

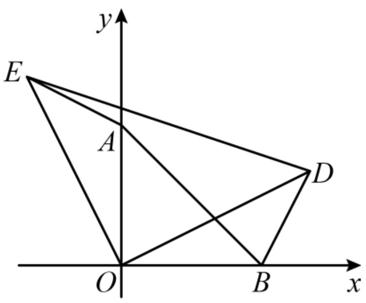
∵$\angle AOB=90^\circ$，

∴$\triangle AOB$是等腰直角三角形，

故答案为：等腰直角三角形

【小问2详解】

如图，



∵$\angle EOD=90^\circ$，$\angle AOB=90^\circ$，

$\therefore\angle AOB-\angle AOD=\angle DOE-\angle AOD$，

$\therefore\angle AOE=\angle BOD$，

∵$AO=OB,OD=OE$，

$\therefore \triangle AOE \cong \triangle BOD(\mathrm{SAS})$；

【小问 3 详解】

① 设直线 AC 的解析式为 $y=kx+b$，

$\because A(0,2),C(t,0)$，

$\therefore \begin{cases} b=2 \\ kt+b=0 \end{cases}$，

$\therefore y_{AC}=-\dfrac{2}{t}x+2$，

将 $C(t,0),B(2,0)$ 代入抛物线 $y_1=ax^2+bx-4$ 得，

$\begin{cases} 0=at^2+bt-4 \\ 0=4a+2b-4 \end{cases}$，

解得 $a=-\dfrac{2}{t},b=\dfrac{2}{t}(t+2)$，

$\therefore y_1=-\dfrac{2}{t}x^2+\dfrac{2}{t}(t+2)x-4$，

$\because$ 直线 $y_{AC}=-\dfrac{2}{t}x+2$ 与抛物线 $y_1=-\dfrac{2}{t}x^2+\dfrac{2}{t}(t+2)x-4$ 有唯一交点

∴联立解析式组成方程组解得 $x^2-(t+3)x+3t=0$

$\therefore \Delta=(t+3)^2-4\times 3t=(t-3)^2=0$

$\therefore t=3$

②∵抛物线 $y_1=-\dfrac{2}{t}x^2+\dfrac{2}{t}(t+2)x-4$ 向左平移 2 个单位得到 y_2，

∴抛物线 $y_2=-\dfrac{2}{t}\left(x-\dfrac{t-2}{2}\right)^2+\dfrac{(t-2)^2}{2t}$，

$\therefore$ 抛物线 y_2 的顶点 $P\left(\frac{t-2}{2},\frac{(t-2)^2}{2t}\right)$，

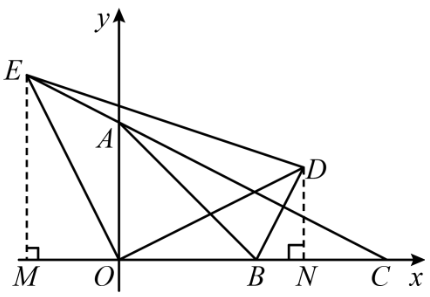
将顶点 $P\left(\frac{t-2}{2},\frac{(t-2)^2}{2t}\right)$ 代入 $y_{AC}=-\frac{2}{t}x+2$，

$\therefore t^2-6t=0$，解得 $t_1=0,t_2=6$，

$\because t>2$，

$\therefore t=6$；

③过点 E 作 $EM\perp x$ 轴，垂足为 M，过点 D 作 $DN\perp x$ 轴，垂足为 N，



$\therefore \angle EMO=\angle OND=90^\circ$，

$\because \angle DOE=90^\circ$，

$\therefore \angle EOM+\angle MEO=\angle EOM+\angle NOD=90^\circ$，

$\therefore \angle MEO=\angle NOD$，

$\because OD=OE$，

$\therefore \triangle ODN\cong\triangle EOM(\text{AAS})$，

$\therefore ON=EM, DN=OM$，

$\because OE$ 的解析式为 $y=-2x$，

$\therefore$ 设 $EM=2OM=2m$，

$\therefore DN=OM=m$，

$\because EM\perp x$ 轴,

$\therefore OA\parallel EM$，

$\therefore \triangle CAO\sim\triangle CEM$，

$\therefore OC:CM=OA:EM$，

$\therefore \dfrac{t}{t+m}=\dfrac{2}{2m}$，

$\therefore m=\dfrac{t}{t-1}$，

$\therefore EM=ON=2OM=2m=\dfrac{2t}{t-1}$，$DN=OM=m=\dfrac{t}{t-1}$，

$\therefore D\left(\dfrac{2t}{t-1},\dfrac{t}{t-1}\right)$，

$\because$ 抛物线 y_2 再向下平移 $\dfrac{2}{(t-1)^2}$ 个单位，得到抛物线 y_3，

$\therefore$抛物线 $y_3=-\dfrac{2}{t}x^2+\dfrac{2}{t}(t-2)x-\dfrac{2}{(t-1)^2}$

$\therefore D\left(\dfrac{2t}{t-1},\dfrac{t}{t-1}\right)$ 代入抛物线 $y_3=-\dfrac{2}{t}x^2+\dfrac{2}{t}(t-2)x-\dfrac{2}{(t-1)^2}$，

$\therefore 3t^2-19t+6=0$，

解得 $t_1=\dfrac{1}{3},t_2=6$，

由 $t>2$，得 $t=6$，

$\therefore \frac{2t}{t-1}=\frac{12}{6-1}=\frac{12}{5}, \frac{t}{t-1}=\frac{6}{6-1}=\frac{6}{5}$ ，

$\therefore D\left(\frac{12}{5}, \frac{6}{5}\right)$ ．

【点睛】此题是二次函数和几何综合题，考查了二次函数的平移、二次函数与一次函数的交点问题、待定系数法求函数解析式、解一元二次方程、全等三角形的判定和性质及相似三角形的判定与性质等知识点，综合性较强，熟练掌握二次函数的平移和数形结合是解题的关键．