2023年湖北省襄阳市中考数学试卷

一、选择题（本大题共10小题，每小题3分，共30分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 下列四个有理数中，最小的数是（　）

A. -1　　B. -2　　C. 1　　D. 0

【答案】B

【解析】

【分析】直接利用有理数比较大小方法进而得出答案．

【详解】解：∵$-2<-1<0<1$，

∴最小的数是-2．

故选：B

【点睛】此题主要考查了有理数大小比较，正确掌握比较方法是解题关键．

2. 下列各式中，计算结果等于a^2的是（　）

A. $a^2\cdot a^3$　　B. $a^5\div a^3$　　C. a^2+a^3　　D. a^5-a^0

【答案】B

【解析】

【分析】分别利用合并同类项法则以及同底数幂的乘法运算法则和幂的乘方运算法则分别计算即可．

【详解】解：$a^2\cdot a^3=a^5$，故选项A不符合题意；

$a^5\div a^3=a^2$，故选项B符合题意；

a^2+a^3无法合并同类项，故选项C不符合题意；

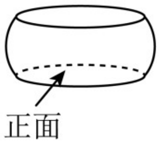
$a^5-a^0=a^5-1$，故选项D不符合题意．

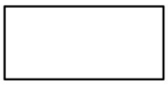
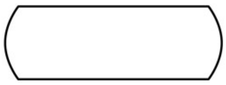
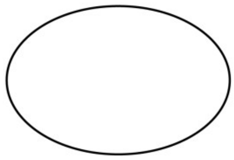
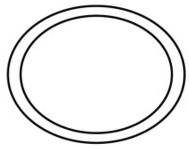
故选B．

【点睛】本题主要考查合并同类项法则以及同底数幂的乘法运算法则和幂的乘方运算法则，熟练掌握运算

法则是解题的关键．

3. 先贤孔子曾说过“鼓之舞之”，这是“鼓舞”一词最早的起源，如图是喜庆集会时击鼓瞬间的情景及鼓的立体图形，该立体图形的主视图是（ ）

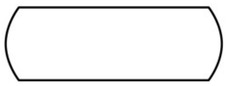


A. 　B. 　C. 　D. 

【答案】B

【解析】

【分析】通过观察立体图形即可．

【详解】解：该立体图形的主视图是  ，

故选：B．

【点睛】本题考查简单几何体的三视图，理解视图的定义，掌握解答几何体三视图的画法是正确解答．

4. 襄阳气象台发布的天气预报显示，明天襄阳某地下雨的可能性是 75% ，则“明天襄阳某地下雨”这一事件是（ ）

A. 必然事件　B. 不可能事件　C. 随机事件　D. 确定性事件

【答案】C

【解析】

【分析】随机事件（不确定事件）：无法预先确定在一次实验中会不会发生的事件，称它们为不确定事件或随机事件；不可能事件：称那些在每一次实验中都一定不会发生的事件为不可能事件．

【详解】解：明天襄阳某地下雨这一事件　随机事件，

故选：C．

【点睛】本题主要考查随机事件，熟记必然事件、随机事件、不可能事件　概念是解题的关键．

5. 五边形的外角和等于（）

A. 180°　　B. 360°　　C. 540°　　D. 720°

【答案】B

【解析】

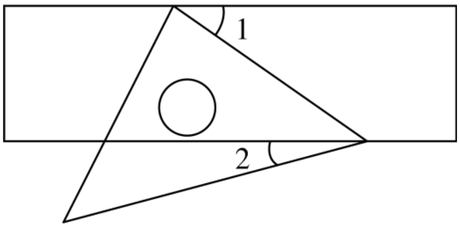
【分析】根据多边形的外角和等于360°解答．

【详解】解：五边形的外角和是360°．

故选B．

【点睛】本题考查了多边形的外角和定理，多边形的外角和与边数无关，任意多边形的外角和都是360°．

6. 将含有45°角的三角板和直尺按如图方式叠放在一起，若$\angle 1=30^\circ$，则$\angle 2$度数（　）



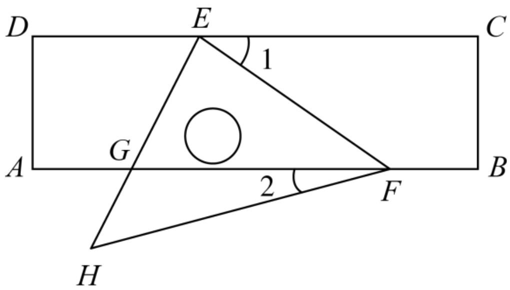
A. 30°　　B. 20°　　C. 15°　　D. 10°

【答案】C

【解析】

【分析】根据条件可得$\angle EFG=\angle 1=30^\circ$，再根据$\angle 2=\angle EFH-\angle EFG$即可求解．

【详解】解：如图所示，



$\because AB\parallel CD,\angle EFH=45^\circ$，

$\therefore \angle 1=\angle EFG$，

$\because \angle 1=30^\circ$，

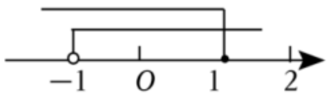
$\therefore \angle EFG = \angle 1 = 30^\circ$，

$\therefore \angle 2 = \angle EFH - \angle EFG = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$，

故选：C．

【点睛】本题主要考查了平行线的性质，准确识图，熟练掌握平行线的性质是解答此题的关键．

7. 如图，数轴上表示的是组成不等式组的两个不等式组的解集，则这个不等式组的解集是（　）



A. $x \le 1$　　B. $x > 1$　　C. $-1 < x$　　D. $-1 < x \le 1$

【答案】D

【解析】

【分析】根据不等式组解集的定义和数轴表示不等式组解集的方法即可得出答案．

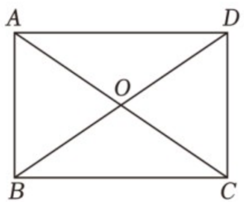
【详解】解：由不等式组解集的定义可知，数轴所表示的两个不等式组的解集，则这个不等式组的解集是

$-1 < x \le 1$，

故选：D．

【点睛】本题考查在数轴上表示不等式的解集，掌握不等式组解集的定义和数轴表示不等式组解集的方法是正确解答的前提．

8. 如图，矩形$ABCD$的对角线相交于点O，下列结论一定正确的是（　）



A. AC平分$\angle BAD$　　B. $AB = BC$　　C. $AC = BD$　　D. $AC \perp BD$

【答案】C

【解析】

【分析】根据矩形的对角线相等，以及矩形与菱形性质的区别判断即可．

【详解】解：由矩形$ABCD$的对角线相交于点O，

根据矩形的对角线相等，

可得 $AC=BD$ ．

故选：C．

【点睛】本题主要考查了矩形的性质，关键是掌握矩形的性质．

9. 我国南宋数学家杨辉在 1275 年提出的一个问题："直田积八百六十四步，只云阔不及长一十二步．问阔及长各几步．"意思是：长方形的面积是 864 平方步，宽比长少 12 步，问宽和长各是几步．设宽为 x 步，根据题意列方程正确的是（ ）

A. $2x+2(x+12)=864$　　B. $x^2+(x+12)^2=864$

C. $x(x-12)=864$　　D. $x(x+12)=864$

【答案】D

【解析】

【分析】设宽为 x 步，则长为 $(x+12)$ 步，根据题意列方程即可．

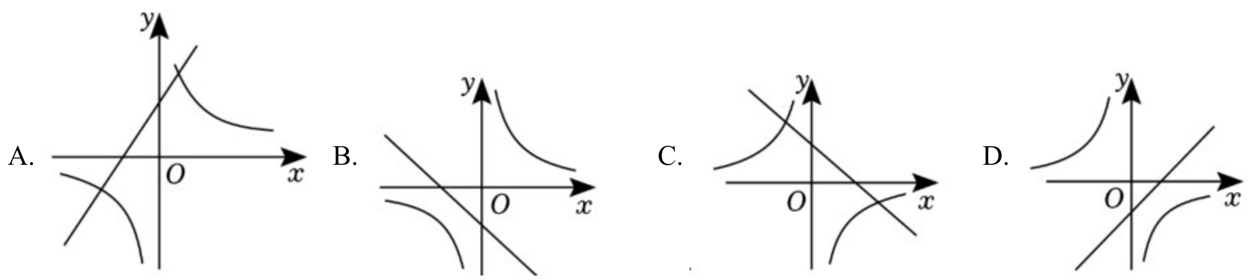
【详解】解：设宽为 x 步，则长为 $(x+12)$ 步，

由题意得：$x(x+12)=864$ ，

故选：D．

【点睛】本题考查一元二次方程的实际应用，正确理解题意是关键．

10. 在同一平面直角坐标系中，一次函数 $y=kx+k$ 与反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象可能是（ ）



【答案】A

【解析】

【分析】分两种情况讨论：当 $k>0$ 时，可排除 B；当 $k<0$ 时，排除 C、D．

【详解】解：当$k>0$时，反比例函数$y=\frac{k}{x}$过一三象限，一次函数$y=kx+k$与y轴正半轴有交点，过一二三象限，故A正确，排除B；

当$k<0$时，反比例函数$y=\frac{k}{x}$过二四象限，一次函数$y=kx+k$与y轴负半轴有交点，过二三四象限，排除C、D；

故选：A．

【点睛】本题考查反比例函数、一次函数综合问题，掌握数形结合的思想是关键．

二、填空题（本大题共6小题，每小题3分，共18分．请把答案填在题中的横线上）

11. 5月5日，记者从襄阳市文化和旅游局获悉，五一长假期间，我市41家A级景区全部开放，共接待游客约2270000人次．数据2270000用科学记数法表示为_____．

【答案】2.27×10^{6}

【解析】

【分析】科学记数法的表现形式为$a\times10^{n}$的形式，其中$1\le|a|<10$，n为整数，确定n的值时，要看把原数变成a时，小数点移动了多少位，n的绝对值与小数点移动的位数相同，当原数绝对值大于等于10时，n是正整数，当原数绝对值小于1时，n是负整数．

【详解】解：2270000用科学记数法表示为2.27×10^{6}，

故答案为：2.27×10^{6}．

【点睛】本题考查了科学记数法—表示较大的数，科学记数法的表现形式为$a\times10^{n}$的形式，其中$1\le|a|<10$，n为整数，表示时关键是要正确确定a的值以及n的值．

12. 古隆中、米公祠、水镜庄、习家池是襄阳市4处有代表性的充满浓厚人文气息的旅游景点，若小平同学随机选择一处去游览，她选择古隆中的概率是____．

【答案】$\frac{1}{4}$##0.25

【解析】

【分析】根据概率公式进行解答即可．

【详解】解：古隆中、米公祠、水镜庄、习家池是襄阳市4处有代表性的充满浓厚人文气息的旅游景点，

小平同学随机选择一处去游览，她选择古隆中的概率是$\frac{1}{4}$．

故答案为：$\frac{1}{4}$

【点睛】此题考查了概率，熟练掌握求简单事件概率是解题的关键．

13. 点$A(1,y_1)$，$B(2,y_2)$都在反比例函数$y=\frac{2}{x}$的图象上，则y_1___y_2．（填“>”或“<”）

【答案】>

【解析】

【分析】由反比例函数的图像性质得到在同一象限内，y随x的增大而减小，即可得到答案．

【详解】解：$\because k=2>0$，

∴在同一象限内，y随x的增大而减小，

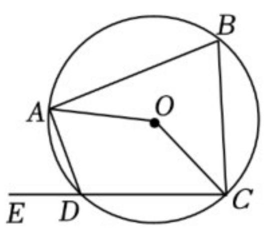
$\because 0<1<2$，

$\therefore y_1>y_2$，

故答案为：>．

【点睛】本题主要考查根据反比例函数的图像性质判断出函数的增减性，熟练掌握函数的增减性是解题的关键．

14. 如图，四边形$ABCD$内接于$\odot O$，点E在CD的延长线上．若$\angle ADE=70^{\circ}$，则$\angle AOC=$_____度．



【答案】140

【解析】

【分析】首先根据圆内接四边形的性质得$\angle B=\angle ADE=70^{\circ}$，再根据圆心角与圆周角的关系即可得出$\angle AOC$的度数．

【详解】解：∵四边形$ABCD$内接于$\odot O$，$\angle ADE=70^{\circ}$，

∴$\angle B+\angle ADC=180^{\circ}$，

又∵$\angle ADE+\angle ADC=180^{\circ}$，

∴$\angle B=\angle ADE=70^{\circ}$，

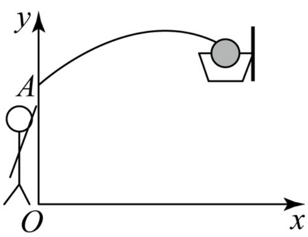
∴$\angle AOC=2\angle B=140$°．

故答案为：140．

【点睛】此题主要考查了圆内接四边形的性质，圆心角与圆周角之间的关系，熟练掌握圆内接四边形的对角互补，理解圆心角与圆周角之间的关系是解答此题的关键．

15. 如图，一位篮球运动员投篮时，球从A点出手后沿抛物线行进，篮球出手后距离地面的高度$y(\mathrm{m})$与篮球距离出手点的水平距离$x(\mathrm{m})$之间的函数关系式是$y=-\frac{1}{5}(x-\frac{3}{2})^{2}+\frac{7}{2}$．下列说法正确的是_____（填序号）．

① 篮球行进过程中距离地面的最大高度为$3.5\mathrm{m}$；②篮球出手点距离地面的高度为$2.25\mathrm{m}$．



【答案】①

【解析】

【分析】先求$y=-\frac{1}{5}(x-\frac{3}{2})^{2}+\frac{7}{2}$的顶点为$(1.5,3.5)$，再求$x=0$时$y$的值即可判断．

【详解】解：由$y=-\frac{1}{5}(x-\frac{3}{2})^2+\frac{7}{2}$的顶点为$(1.5,3.5)$，

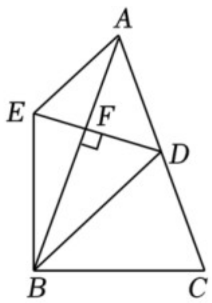
得篮球行进过程中距离地面的最大高度为3.5m，即①正确；

由$y=-\frac{1}{5}(x-\frac{3}{2})^2+\frac{7}{2}$当$x=0$时，$y=-0.2\times2.25+3.5=3.05$，即②不正确；

故答案为：①．

【点睛】本题主要考查了二次函数图象的应用，充分利用函数表达式是关键．

16. 如图，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，点D是AC的中点，将BCD沿BD折叠得到$\triangle BED$，连接AE.若$DE\perp AB$于点F，$BC=10$，则AF的长为____．



【答案】$2\sqrt{10}$

【解析】

【分析】取BC中点H，连接AH，取CH中点G，连接DG，作$DM\perp BE$于点M．设$EF=a$，由折叠可知$AD=CD=DE=x$则$DF=x-a$，得到$\cos\angle ABC=\cos\angle BED$，从而推导出$a=\frac{25}{x}$，由三角形中位线定理得到$BG=\frac{15}{2}$，从而推导出$\triangle EMD\cong\triangle CGD(\text{AAS})$，得到四边形$MBGD$是正方形，$DG=\frac{15}{2}$，$AH=15$，最后利用勾股定理解答即可．

【详解】解：取BC中点H，连接AH，取CH中点G，连接DG，作$DM\perp BE$于点M．

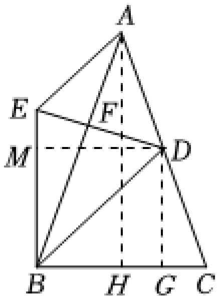
$\because AB=AC$，H为BC的中点，

$\therefore AH\perp BC$，$AD=CD$，$BH=HC=5$．

$\because$点D是AC的中点，

$\therefore DG$是$\triangle AHC$的中位线，

$\therefore DG\parallel AH$，则$DG\perp BC$于点$G$，



设$EF=a$，由折叠可知$AD=CD=DE=x$则$DF=x-a$，

$\because AB=AC$，

$\therefore AB=2x$，$\angle ABC=\angle ACB$，

又由折叠得$\angle ACB=\angle BED$，$BE=BC=10$，

$\therefore \angle ABC=\angle BED$，

$\therefore \cos\angle ABC=\cos\angle BED$，即$\frac{BH}{AB}=\frac{EF}{EB}$，

$\therefore \frac{5}{2x}=\frac{a}{10}$，

解得：$a=\frac{25}{x}$，

$\therefore DF = x - a = x - \frac{25}{x}$，

$\because DG$ 是 $\triangle AHC$ 的中位线，

$\therefore CG = \frac{1}{2}CH = \frac{5}{2}$，$AH = 2DG$，

$\therefore BG = \frac{15}{2}$，

由折叠知 $\angle DEM = \angle DCG$，$ED = CD$，

在 $\triangle EMD$ 和 $\triangle CGD$ 中，$\begin{cases} \angle DEM = \angle DCG \\ \angle DME = \angle DGC \\ ED = CD \end{cases}$，

$\therefore \triangle EMD \cong \triangle CGD(\mathrm{AAS})$，

$\therefore DG = MD$．

$\because DE \perp AB$，

$\therefore \angle EFB = 90^\circ$，

$\therefore \angle DEB + \angle EBF = 90^\circ$．

又$\because \angle CAH + \angle ACB = 90^\circ$，且 $\angle ACB = \angle DEB$，

$\therefore \angle EBF = \angle CAH$，

$\therefore \angle EBF + \angle ABC = 90^\circ$，

$\therefore \angle DMB = \angle MBG = \angle BGD = 90^\circ$，

$\therefore$四边形 $MBGD$ 是正方形，

$\therefore DG = BG = \frac{15}{2}$，

$\therefore AH = 2DG = 15$．

在 $\mathrm{Rt}\triangle AHC$ 中，$AH^2 + HC^2 = AC^2$，

$\therefore 15^2 + 5^2 = (2x)^2$，

解得：$x = \frac{5\sqrt{10}}{2}$，

$\therefore a = \sqrt{10}$，$x - a = \frac{3\sqrt{10}}{2}$，即 $AD = \frac{5\sqrt{10}}{2}$，$DF = \frac{3\sqrt{10}}{2}$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle AFD$ 中，$AF = \sqrt{AD^2 - DF^2} = 2\sqrt{10}$．

故答案为：$2\sqrt{10}$．

【点睛】本题考查了折叠的性质，等腰三角形的性质，勾股定理，解直角三角形，正方形的判定及性质等，解答本题的关键是设边长，根据勾股定理列方程求解．

三、解答题（本大题共 9 小题，共 72 分．解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤）

17. 化简：$\left(1 - \frac{a}{a+1}\right) \div \frac{a^2 - a}{a^2 - 1}$．

【答案】$\frac{1}{a}$

【解析】

【分析】先根据同分母分式相加减法则计算，再利用提公因式和平方差公式分解因式，把除法换成乘法，即可求解；

【详解】解：原式 $= \left(\frac{a+1}{a+1} - \frac{a}{a+1}\right) \div \frac{a(a-1)}{(a-1)(a+1)}$

$=\frac{1}{a+1}\cdot\frac{a+1}{a}$

$=\frac{1}{a}$.

【点睛】本题主要考查了分式的混合计算，熟知相关计算法则是解题的关键．

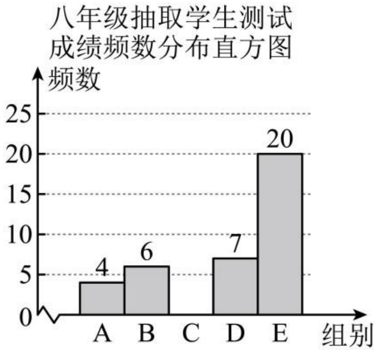
18. 三月是文明礼貌月，我市某校以“知文明礼仪，做文明少年”为主题开展了一系列活动，并在活动后期对七、八年级学生进行了文明礼仪知识测试，测试结果显示所有学生成绩都不低于75分（满分100分）．

【收集数据】随机从七、八年级各抽取50名学生的测试成绩，进行整理和分析（成绩得分都是整数）．

【整理数据】将抽取的两个年级的成绩进行整理（用x表示成绩，分成五组：*A*.$75\le x<80$，*B*.$80\le x<85$，*C*.$85\le x<90$，*D*.$90\le x<95$，*E*.$95\le x\le 100$）．

① 八年级学生成绩在D组的具体数据是：91，92，94，94，94，94，94．

② 将八年级的样本数据整理并绘制成不完整的频数分布直方图（如图）：



【分析数据】两个年级样本数据的平均数、中位数、众数、方差如下表：

年级	平均数	中位数	众数	方差
七年级	92	92	100	57.4
八年级	92.6	m	100	49.2

根据以上信息，解答下列问题：

（1）本次抽取八年级学生的样本容量是______；

（2）频数分布直方图中，C组的频数是_______；

（3）本次抽取八年级学生成绩的中位数$m=$_______；

（4）分析两个年级样本数据的对比表，你认为______年级的学生测试成绩较整齐（填“七”或“八”）；

（5）若八年级有 400 名学生参加了此次测试，估计此次参加测试的学生中，该年级成绩不低于 95 分的学生有______人．

【答案】（1）50

（2）13

（3）93

（4）八　（5）该年级成绩不低于 95 分的学生约有 80 人；

【解析】

【分析】（1）根据样本容量是抽取的个数求解即可得到答案；

（2）利用总数减去其它频数即可得到答案；

（3）找到最中间两个数求平均即可得到答案；

（4）根据方差越大波动越大，方差越小波动越小即可得到答案；

（5）利用总人数乘以符合的频率即可得到答案；

【小问 1 详解】

解：∵随机从七、八年级各抽取 50 名学生的测试成绩，进行整理和分析，

∴本次抽取八年级学生的样本容量是 50，

故答案为：50；

【小问 2 详解】

解：∵ $50-4-6-7-20=13$，

∴ C 组的频数是 13；

【小问 3 详解】

解：∵ $4+6+13=23<25$，$4+6+13+7=30>25$，

∴中位数落在 D 组上，

∴25，26两个数是：92，94，

∴中位数：$m=\frac{92+94}{2}=93$；

【小问4详解】

解：∵$57.4>49.2$，

∴八年级的学生测试成绩较整齐；

【小问5详解】

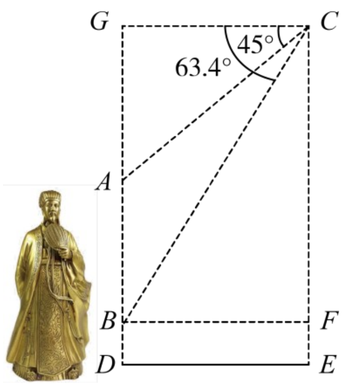
解：由题意可得，

$400\times\frac{20}{50}=80$（人），

答：该年级成绩不低于95分的学生约有80人；

【点睛】本题考查中位数，方差，样本容量，利用频率估算，解题的关键是熟练掌握几个定义．

19. 在襄阳市诸葛亮广场上矗立着一尊诸葛亮铜像．某校数学兴趣小组利用热气球开展综合实践活动，测量诸葛亮铜像的高度．如图，在点C处，探测器显示，热气球到铜像底座底部所在水平面的距离CE为32m，从热气球C看铜像顶部A的俯角为45°，看铜像底部B的俯角为63.4°．已知底座BD的高度为4m，求铜像AB的高度．（结果保留整数．参考数据：$\sin 63.4^{\circ}\approx 0.89$，$\cos 63.4^{\circ}\approx 0.45$，$\tan 63.4^{\circ}\approx 2.00$，$\sqrt{2}\approx 1.41$）



【答案】铜像AB的高度是14m；

【解析】

【分析】根据题意可得$\dfrac{CF}{BF}=\tan 63.4^{\circ}\approx 2.00$，从而求出$CG=BF=14\text{m}$，即可求解．

【详解】解：由题意得：$CE=32\text{m}$，$EF=BD=4\text{m}$，

$\therefore CF=CE-EF=28\text{m}$，

$\because$四边形$BFCG$是矩形，

$\therefore BG=CF=14\text{m}$，

$\because \angle ACG=45^{\circ}$，$\angle BCG=63.4^{\circ}$，

$\therefore \angle FBC=\angle BCG=63.4^{\circ}$，

$\therefore \dfrac{CF}{BF}=\tan 63.4^{\circ}\approx 2.00$，

$\therefore BF=14\text{m}$，

$\therefore CG=BF=14\text{m}$，

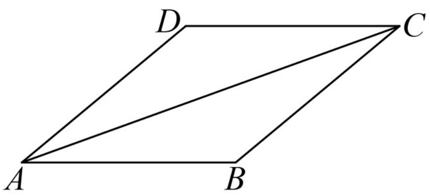
$\therefore CG=AG=14\text{m}$，

$\therefore AB=BG-AG=14\text{m}$，

$\therefore$铜像AB的高度是14m；

【点睛】本题考查解直角三角形的应用，关键是求出CF．

20. 如图，AC是菱形$ABCD$的对角线．



（1）作边AB的垂直平分线，分别与AB，AC交于点E，F（尺规作图，不写作法，保留作图痕迹）；

（2）在（1）的条件下，连接FB，若$\angle D=140^\circ$，求$\angle CBF$的度数．

【答案】（1）见解析　（2）120°

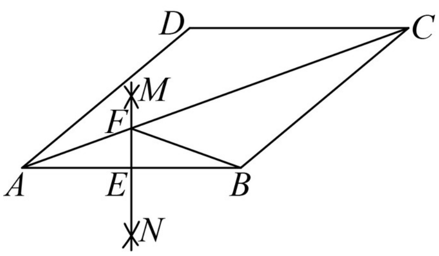
【解析】

【分析】（1）分别以点A，点B为圆心，大于$\frac{1}{2}AB$的长为半径作弧，交于点M，点N，作直线MN交AB于点E，交AC于点F，连接EF即可；

（2）连接FB，由菱形的性质得到$\angle ABC=\angle D=140^\circ$，$AB=CB$，则$\angle BAC=\angle BCA=20^\circ$，由线段的垂直平分线的性质可得$AF=BF$，故得到$\angle ABF=\angle BAC=20^\circ$，则$\angle CBF=\angle ABC-\angle ABF=120^\circ$．

【小问1详解】

解：



【小问2详解】

解：连接FB，

$\because$菱形$ABCD$，

$\therefore \angle ABC=\angle D=140^{\circ}$，$AB=CB$，

$\therefore \angle BAC=\angle BCA=\frac{1}{2}(180^{\circ}-140^{\circ})=20^{\circ}$，

$\because MN$垂直平分AB，

$\therefore AF=BF$，

$\therefore \angle ABF=\angle BAC=20^{\circ}$，

$\therefore \angle CBF=\angle ABC-\angle ABF=120^{\circ}$．

【点睛】本题主要考查基本作图，菱形的性质，等腰三角形的性质，线段的垂直平分线的性质．按照要求作出边AB的垂直平分线是解题的关键．

21. 关于x的一元二次方程$x^2+2x+3-k=0$有两个不相等的实数根．

（1）求k的取值范围；

（2）若方程的两个根为α，β，且$k^2=\alpha\beta+3k$，求k的值．

【答案】（1）$k>2$

（2）$k=3$

【解析】

【分析】（1）根据一元二次方程有两个不相等的实数根，得出$b^2-4ac>0$，把字母和数代入求出k的取值范围；

（2）根据两根之积为：$\frac{c}{a}$，把字母和数代入求出k的值．

【小问1详解】

解：$b^2-4ac=2^2-4\times1\times(3-k)=-8+4k$，

∵有两个不相等的实数，

∴$-8+4k>0$，

解得：$k>2$；

【小问2详解】

∵方程的两个根为α，β，

∴$\alpha\beta=\frac{c}{a}=3-k$，

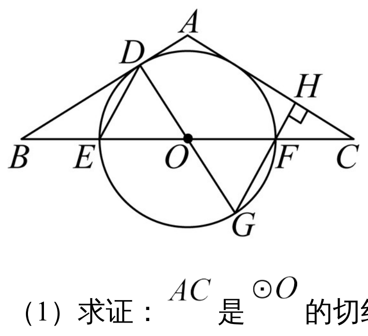
∴$k^2=3-k+3k$，

解得：$k_1=3$，$k_2=-1$（舍去）．

即：$k=3$．

【点睛】本题主要考查根与系数的关系、根的判别式，解题的关键是掌握x_1，x_2是方程$ax^2+bx+c=0$的两根时，$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$．

22. 如图，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，O是BC的中点，$\odot O$与AB相切于点D，与BC交于点E，F，DG是$\odot O$的直径，弦GF的延长线交AC于点H，且$GH\perp AC$．



（1）求证：AC是$\odot O$的切线；

（2）若$DE=2$，$GH=3$，求$\overset{\frown}{DE}$的长l．

【答案】（1）见解析　（2）$\frac{4\pi}{3}$

【解析】

【分析】（1）连接OA，过点O作$OM\perp AC$于点M，根据等腰三角形的性质得AO为$\angle BAC$的平分线，再根据$\odot O$与AB相切于点D，DG是$\odot O$的直径得$OM=OD$，进而根据切线的判定可得到结论；

（2）过点E作$EN\perp AB$于点N，先证$\triangle ODE\cong\triangle OGF$得到$DE=GF=2$，进而得到$FH=1$，再证$\triangle BNE\cong\triangle CHF$得到$EN=FH=1$，然而在$Rt_{\triangle DEN}$中利用三角函数可求出$\angle EDN=30^{\circ}$，进而得$\triangle ODE$为等边三角形，据此得$\angle DOE=60^{\circ}$，$OD=OE=DE=2$，则$\angle DOF=120^{\circ}$，最后得到弧长公式即可得到答案．

【小问1详解】

证明：连接OA，过点O作$OM\perp AC$于点M，

∵$AB=AC$，O是BC的中点，

$\therefore AO$为$\angle BAC$的平分线，

∵$\odot O$与AB相切于点D，DG是$\odot O$的直径，

$\therefore OD$为$\odot O$的半径，

$\therefore OD\perp AB$，

又$OM\perp AC$，

$\therefore OM=OD$，

即OM为$\odot O$的半径，

$\therefore AC$是$\odot O$的切线；

【小问2详解】

解：过点E作$EN \perp AB$于点N，

∵点O为$\odot O$的圆心，

$\therefore OD = OG, OE = OF$，

在$\triangle ODE$和$\triangle OGF$中，

$$\begin{cases} OD = OG \\ \angle DOE = \angle GOF \\ OE = OF \end{cases},$$

$\therefore \triangle ODE \cong \triangle OGF(\text{SAS})$，

$\therefore DE = GF$，

∵$DE = 2, GH = 3$，

$\therefore GF = 2$，

$\therefore FH = GH - GF = 3 - 2 = 1$，

∵$\text{AB} = \text{AC}$，O是BC的中点，

$\therefore OB = OC, \angle B = \angle C$，

又$OE = OF$，

$\therefore BE = CF$，

∵$GH \perp AC, EN \perp AB$，

$\therefore \angle BNE = \angle CHF = 90^\circ$，

在$\triangle BNE$和$\triangle CHF$中，

$$\begin{cases}\angle BNE=\angle CHF\\ \angle B=\angle C\\ BE=CF\end{cases},$$

$\therefore\triangle BNE\cong\triangle CHF(\text{AAS})$,

$\therefore EN=FH=1$,

在$\text{Rt}_{\triangle DEN}$中，$DE=2,EN=1$，

$\therefore\sin\angle EDN=\dfrac{EN}{DE}=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore\angle EDN=30^{\circ}$,

$\because OD\perp AB$,

$\therefore\angle ODE=90^{\circ}-\angle EDN=90^{\circ}-30^{\circ}=60^{\circ}$,

又$OD=OE$，

$\therefore\triangle ODE$为等边三角形，

$\therefore\angle DOE=60^{\circ},OD=OE=DE=2$,

$\therefore\angle DOF=180^{\circ}-\angle DOE=180^{\circ}-60^{\circ}=120^{\circ}$,

$\therefore l=\dfrac{120\pi\times2}{180}=\dfrac{4\pi}{3}$.

【点睛】此题主要考查了切线的判定和性质，等腰三角形的性质，全等三角形的判定和性质，等边三角形的判定和性质，弧长的计算公式，熟练掌握切线的判定和性质，全等三角形的判定和性质是解答此题的关键．

23. 在襄阳市创建“经济品牌特色品牌”政策的影响下．每到傍晚，市内某网红烧烤店就食客如云，这家烧烤店的海鲜串和肉串非常畅销，店主从食品加工厂批发以上两种产品进行加工销售，其中海鲜串的成本为m元/支，肉串的成本为n元/支；两次购进并加工海鲜串和肉串的数量与成本如下表所示（成本包括进价和其他费用）：

次数	数量（支）		总成本（元）
	海鲜串	肉串	
第一次	3000	4000	17000
第二次	4000	3000	18000

针对团以消费，店主决定每次消费海鲜串不超过 200 支时，每支售价 5 元；超过 200 支时、不超过 200 支的部分按原价，超过 200 支的部分打八折．每支肉串的售价为 3.5 元．

（1）求 m、n 的值；

（2）五一当天，一个旅游团去此店吃烧烤，一次性消费海鲜串和肉串共 1000 支，且海鲜串不超过 400 支．在本次消费中，设该旅游团消费海鲜串 x 支，店主获得海鲜串的总利润为 y 元，求 y 与 x 的函数关系式，并写出自变量 x 的取值范围；

（3）在（2）的条件下，该旅游团消费的海鲜串超过了 200 支，店主决定给该旅游团更多优惠，对每支肉串降价 a（$0<a<1$）元，但要确保本次消费获得肉串的总利润始终不低于海鲜串的总利润，求 a 的最大值．

【答案】（1）m 的值为 3，n 的值为 2

（2）$y=\begin{cases}2x\left(0<x\le 200\right)\\ x+200\left(200<x\le 400\right)\end{cases}$

（3）0.5

【解析】

【分析】（1）根据表格数据列出方程组，解方程组即可求出 m、n 的值；

（2）分两种情况讨论，根据题意，结合“总利润 =每支利润 ×数量”分别列出代数式即可求出 y 与 x 的函数关系式，注意写出自变量 x 的取值范围；

（3）设降价后获得肉串的总利润为 z 元，令 $W=z-y$，先根据题意列出 z 关于 x 的关系式，再写出 W 关于 x 的关系式，根据函数增减性和题中数量关系即可求出结果．

【小问 1 详解】

解：根据表格可得：$\begin{cases}3000m+4000n=17000\\ 4000m+3000n=18000\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}m=3\\ n=2\end{cases}$，

$\therefore m$ 的值为 3，n 的值为 2；

【小问2详解】

当$0<x\le 200$时，店主获得海鲜串的总利润$y=(5-3)x=2x$；

当$200<x\le 400$时，店主获得海鲜串的总利润$y=(5-3)\times 200+(5\times 0.8-3)(x-200)=x+200$；

$\therefore y=\begin{cases}2x(0<x\le 200)\\x+200(200<x\le 400)\end{cases}$；

【小问3详解】

设降价后获得肉串的总利润为z元，令$W=z-y$，

$\because 200<x\le 400$，

$\therefore z=(3.5-a-2)(1000-x)=(a-1.5)x+1500-1000a$，

$\therefore W=z-y=(a-2.5)x+1300-1000a$，

$\because 0<a<1$，

$\therefore a-2.5<0$，

$\therefore W$随x的增大而减小，

当$x=400$时，W的值最小，

由题意可得：$z\ge y$，

$\therefore W\ge 0$，

即$(a-2.5)\times 400+1300-1000a\ge 0$，

解得：$a\le 0.5$，

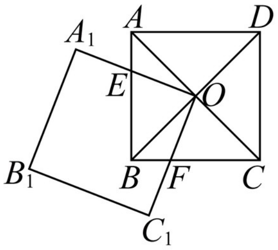
$\therefore a$的最大值是0.5．

【点睛】本题主要考查一次函数的应用，熟练掌握一次函数的性质和应用以及二元一次方程组的应用是解决问题的关键．

24.【问题背景】

人教版八年级下册数学教材第63页“实验与探究”问题1如下：如图，正方形$ABCD$的对角线相交于点O，点O又是正方形$A_1B_1C_1D_1O$的一个顶点，而且这两个正方形的边长相等，无论正方形$A_1B_1C_1D_1O$绕点O怎样转动，两个正方形重叠部分的面积，总等于一个正方形面积的$\frac{1}{4}$.想一想，这是为什么？（此问题不需要作答）

九年级数学兴趣小组对上面的问题又进行了拓展探究、内容如下：正方形$ABCD$的对角线相交于点O，点P落在线段OC上，$\frac{PA}{PC}=k$（k为常数）．



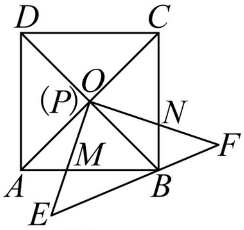


图1

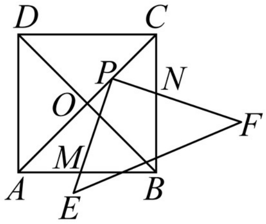


图2

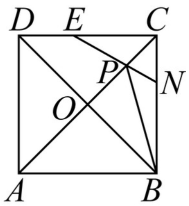


图3

【特例证明】

（1）如图1，将$\mathrm{Rt}\triangle PEF$的直角顶点P与点O重合，两直角边分别与边AB，BC相交于点M，N.

① 填空：$k=$______；

② 求证：$PM=PN$．（提示：借鉴解决【问题背景】　思路和方法，可直接证明$\triangle PAM\cong\triangle PBN$；也可过点$P$分别作$AB$，$BC$的垂线构造全等三角形证明．请选择其中一种方法解答问题②．）

【类比探究】

（2）如图2，将图1中的$\triangle PEF$沿OC方向平移，判断PM与PN的数量关系（用含k的式子表示），并说明理由．

【拓展运用】

（3）如图3，点 N 在边 BC 上，$\angle BPN=45^{\circ}$，延长 NP 交边 CD 于点 E，若 $EN=kPN$，求 k 的值．

【答案】（1）①1；②见解析；（2）$\frac{PM}{PN}=k$，理由见解析；（3）3

【解析】

【分析】（1）①利用正方形性质即可得出答案；

②根据正方形的性质可得 $\angle PAB=\angle PBC=45^{\circ}$，$PA=PB$，$\angle APM=\angle BPN$，利用ASA证明 $\triangle PAM\cong\triangle PBN$ 即可；

（2）过点 P 作 $PG\parallel BD$ 交 BC 于 G，利用平行线的性质及正方形的性质易证得 $\angle PGC=\angle PCG=\angle PAM$，$\angle APM=\angle GPN$，可证明 $\triangle PAM\backsim\triangle PGN$，利用相似三角形性质即可得出答案；

（3）过点 P 作 $PM\perp PN$ 交 AB 于 M，作 $PH\perp BC$ 于 H，作 $PG\perp AB$ 于 G，利用AAS证得 $\triangle PGM\cong\triangle ECN$，可得：$GM=CN$，$PG=EC$，再证得 $\triangle BPN\backsim\triangle BCP$，可得 $PB^{2}=BC\cdot BN$，同理可得：$PB^{2}=BA\cdot BM$，推出 $EC=2CN$，进而可得 $\tan\angle ENC=\frac{PH}{HN}=\frac{EC}{CN}=2$，令 $HN=a$，则 $PH=2a$，$CN=3a$，$EC=6a$，利用勾股定理即可求得答案．

【详解】解：（1）①由正方形的性质可知：$OA=OC$，

∵将 $\mathrm{Rt}\triangle PEF$ 的直角顶点 P 与点 O 重合，

$\therefore k=\frac{PA}{PC}=\frac{OA}{OC}=1$，

故答案为：1；

②证明：∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴$\angle APB=\angle MPN=90^{\circ}$，$\angle PAB=\angle PBC=45^{\circ}$，$PA=PB$，

∴$\angle APB-\angle BPM=\angle MPN-\angle BPM$，

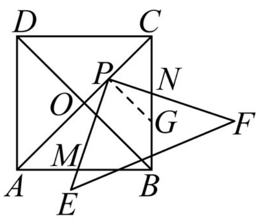
即$\angle APM=\angle BPN$，

∴$\triangle PAM\cong\triangle PBN$(ASA)，

∴$PM=PN$．

（2）$\frac{PM}{PN}=k$，理由如下：

过点P作$PG\parallel BD$交BC于G，



∴$\angle AOB=\angle APG$，$\angle PGC=\angle OBC$，

∵四边形$ABCD$是正方形，

∴$\angle PAM=\angle OCB=\angle OBC=45^{\circ}$，$\angle AOB=90^{\circ}$，

∴$\angle APG=\angle MPN=\angle AOB=90^{\circ}$，$\angle PGC=\angle PCG=\angle PAM$，

∴$PG=PC$，$\angle APG-\angle MPG=\angle MPN-\angle MPG$，

即$\angle APM=\angle GPN$，

∴$\triangle PAM\backsim\triangle PGN$，

∴$\frac{PM}{PN}=\frac{PA}{PC}=k$．

（3）过点 P 作 $PM \perp PN$ 交 AB 于 M ，作 $PH \perp BC$ 于 H ，作 $PG \perp AB$ 于 G ，

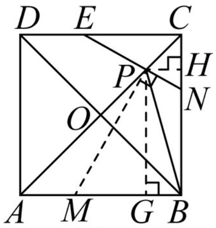


图3

则 $\angle MPN = \angle GPH = \angle PGM = \angle ECN = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle MPN - \angle GPN = \angle GPH - \angle GPN$ ，

即 $\angle MPG = \angle NPH$ ，

$\therefore \angle PMG = \angle PNH$ ，

由（2）和已知条件可得：$PM = kPN$ ，$EN = kPN$ ，

$\therefore PM = EN$ ，

$\therefore \triangle PGM \cong \triangle ECN(\mathrm{AAS})$ ，

$\therefore GM = CN$ ，$PG = EC$ ，

$\because \angle BPN = \angle PCB = 45^\circ$ ，$\angle PBN = \angle CBP$ ，

$\therefore \triangle BPN \backsim \triangle BCP$ ，

$\therefore \dfrac{PB}{BC} = \dfrac{BN}{PB}$ ，

$\therefore PB^2 = BC \cdot BN$ ，

同理可得：$PB^2 = BA \cdot BM$ ，

$\because BC = BA$ ，

$\therefore BM = BN$，

$\therefore AM = CN$，

$\therefore AG = 2CN$，

$\because \angle PAB = 45^{\circ}$，

$\therefore PG = AG$，

$\therefore EC = 2CN$，

$\therefore \tan\angle ENC = \dfrac{PH}{HN} = \dfrac{EC}{CN} = 2$，

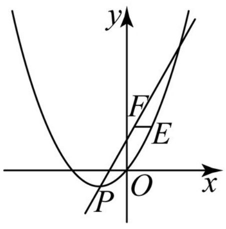
令 $HN = a$，则 $PH = 2a$，$CN = 3a$，$EC = 6a$，

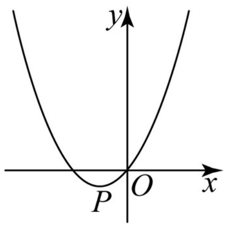
$\therefore EN = \sqrt{(3a)^2 + (6a)^2} = 3\sqrt{5}a$，

$\therefore k = \dfrac{EN}{PN} = \dfrac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5}a} = 3$．

【点睛】此题是相似三角形综合题，主要考查了正方形的性质，全等三角形的判定和性质，相似三角形的判定和性质，作出辅助线构造出相似三角形和全等三角形是解本题的关键．

25. 在平面直角坐标系中，直线 $l: y = kx + b$ 经过抛物线 $y = x^2 + 2mx + 2m^2 - m(m \neq 0)$ 的顶点．





备用图

（1）如图，当抛物线经过原点时，其顶点记为 P．

① 求抛物线的解析式并直接写出点 P 的坐标；

② $t \leq x \leq t+1$ 时，y 的最小值为 2，求 t 的值；

③当$k=2$时.动点E在直线l下方的抛物线上，过点E作$EF\parallel x$轴交直线l于点F，令$S=EF$，求S的最大值．

（2）当抛物线不经过原点时，其顶点记为Q.当直线l同时经过点Q和（1）中抛物线的顶点P时，设直线l与抛物线的另一个交点为B，与y轴的交点为A.若$|QB-QA|\geq 1$，直接写出k的取值范围．

【答案】（1）①抛物线的解析式为$y=x^2+x$，顶点P的坐标为$\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$；②$t$的值为$-3$或1；③$S$取得最大值$\frac{1}{2}$

（2）k的取值范围为$k\leq-\sqrt{3}$或$k\geq\sqrt{3}$

【解析】

【分析】（1）由抛物线经过原点，可得$2m^2-m=0$，即可求得$m=\frac{1}{2}$，①利用配方法将抛物线解析式化为顶点式即可求得答案；

②分三种情况：当$t+1<-\frac{1}{2}$，即$t<-\frac{3}{2}$时，y随x增大而减小，当$-\frac{3}{2}\leq t\leq-\frac{1}{2}$时，则若$t\leq x\leq t+1$时，$y$的最小值为$-\frac{1}{4}$，不符合题意，当$t>-\frac{1}{2}$时，$y$随$x$增大而增大，分别列方程求解即可；

③把$P\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$代入$y=2x+b$，可得$y=2x+\frac{3}{4}$，设点$E\left(m,m^2+m\right)$，可得$F\left(\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{2}m-\frac{3}{8},m^2+m\right)$，进而可得$S=EF=m-\left(\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{2}m-\frac{3}{8}\right)=-\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{2}m+\frac{3}{8}=-\frac{1}{2}\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$，利用二次函数的性质即可求得

答案；

（2）利用配方法可得$Q(-m,m^2-m)$，运用待定系数法可得直线l的解析式为$y=\left(-m+\frac{1}{2}\right)x-\frac{1}{2}m$，可得$A\left(0,-\frac{1}{2}m\right)$，$B\left(-2m+\frac{1}{2},2m^2-2m+\frac{1}{4}\right)$，分两种情况：当$m>\frac{1}{2}$时，点$B$在第二象限，点A在$y$轴的负半轴上，作点A关于点$Q$的对称点$A'$，则$A'\left(-2m,2m^2-\frac{3}{2}m\right)$，$QA=QA'$，再由$|QB-QA|\geq 1$，即$|A'B|^2\geq 1$，可得$\left[\left(-2m+\frac{1}{2}\right)-(-2m)\right]^2+\left[\left(2m^2-2m+\frac{1}{4}\right)-\left(2m^2-\frac{3}{2}m\right)\right]^2\geq 1$，解不等式即可求得答案；当$m<\frac{1}{2}$时，点$B$在第一象限，点$Q$在A、$B$之间，作点A关于点$Q$的对称点$A'$，同理可求得答案．

【小问1详解】

∵抛物线经过原点，

∴$2m^2-m=0$，

解得：$m=0$或$m=\frac{1}{2}$，

∵$m\neq 0$，

∴$m=\frac{1}{2}$，

①抛物线的解析式为$y=x^2+x$，

∴$y=x^2+x=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$，

∴顶点P的坐标为$\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$；

②当$t+1<-\frac{1}{2}$，即$t<-\frac{3}{2}$时，y随x增大而减小，

由题意得：$(t+1)^2+t+1=2$，

解得：$t_1=-3$，$t_2=0$（舍去），

∴t的值为-3，

当$-\frac{3}{2}\le t\le-\frac{1}{2}$时，则若$t\le x\le t+1$时，$y$的最小值为$-\frac{1}{4}$，不符合题意，

当$t>-\frac{1}{2}$时，y随x增大而增大，

由题意得：$t^2+t=2$，

解得：$t_1=-2$（舍去），$t_2=1$，

∴t的值为1，

综上所述，t的值为-3或1；

③由题意得：当$k=2$时，则$y=2x+b$，

∵$y=2x+b$经过点$P\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$，

∴$2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+b=-\frac{1}{4}$，可得$b=\frac{3}{4}$，

∴$y=2x+\frac{3}{4}$，

由$2x+\frac{3}{4}=x^2+x$，可得$x_1=-\frac{1}{2}$，$x_2=\frac{3}{2}$，

设点$E(m,m^2+m)$，且$-\frac{1}{2}<m<\frac{3}{2}$，

$\because EF\parallel x$轴，

$\therefore y_E=y_F=m^2+m=2x_F+\frac{3}{4}$，

可得：$x_F=\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{2}m-\frac{3}{8}$，则$F\left(\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{2}m-\frac{3}{8},m^2+m\right)$，

$\therefore S=EF=m-\left(\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{2}m-\frac{3}{8}\right)=-\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{2}m+\frac{3}{8}=-\frac{1}{2}\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$，

$\because -\frac{1}{2}<0$，$-\frac{1}{2}<m<\frac{3}{2}$，

$\therefore$当$m=\frac{1}{2}$时，S取得最大值$\frac{1}{2}$；

【小问2详解】

$\because y=x^2+2mx+2m^2-m=(x+m)^2+m^2-m$，

$\therefore Q(-m,m^2-m)$，

$\because$直线l：$y=kx+b$经过点P、Q，

$\therefore \begin{cases}-\frac{1}{2}k+b=-\frac{1}{4}\\-mk+b=m^2-m\end{cases}$，解得：$\begin{cases}k=-m+\frac{1}{2}\\b=-\frac{1}{2}m\end{cases}$，

$\therefore$直线l的解析式为$y=\left(-m+\frac{1}{2}\right)x-\frac{1}{2}m$，

令$x=0$，得$y=-\frac{1}{2}m$，

$\therefore A\left(0,-\frac{1}{2}m\right)$，

联立方程得：$x^2+2mx+2m^2-m=\left(-m+\frac{1}{2}\right)x-\frac{1}{2}m$，

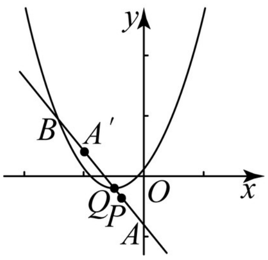
解得：$x_1=-m$，$x_2=-2m+\frac{1}{2}$，

当 $x=-2m+\frac{1}{2}$ 时，$y=\left(-m+\frac{1}{2}\right)\left(-2m+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}m=2m^2-2m+\frac{1}{4}$，

$\therefore B\left(-2m+\frac{1}{2},2m^2-2m+\frac{1}{4}\right)$，

当 $m>\frac{1}{2}$ 时，点 B 在第二象限，点 A 在 y 轴的负半轴上，作点 A 关于点 Q 的对称点 A'，如图，

则 $A'\left(-2m,2m^2-\frac{3}{2}m\right)$，$QA=QA'$，



$\therefore\left|QB-QA\right|\geq 1$，

$\therefore\left|QB-QA'\right|\geq 1$，

即 $\left|A'B\right|^2\geq 1$，

$\therefore\left[\left(-2m+\frac{1}{2}\right)-(-2m)\right]^2+\left[\left(2m^2-2m+\frac{1}{4}\right)-\left(2m^2-\frac{3}{2}m\right)\right]^2\geq 1$，

化简得：$m^2-m-\frac{11}{4}\geq 0$，

令 $m^2-m-\frac{11}{4}=0$ ，

解得：$m_1=-\sqrt{3}+\frac{1}{2}$（舍去），$m_2=\sqrt{3}+\frac{1}{2}$，

$\therefore m\geq\sqrt{3}+\frac{1}{2}$，

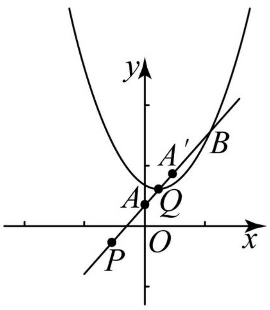
$\because m=-k+\frac{1}{2}$，

$\therefore -k+\frac{1}{2}\geq\sqrt{3}+\frac{1}{2}$，

$\therefore k\leq-\sqrt{3}$；

当 $m<\frac{1}{2}$ 时，点 B 在第一象限，点 Q 在 A 、 B 之间，作点 A 关于点 Q 的对称点 A'，如图，

则 $A'\left(-2m,2m^2-\frac{3}{2}m\right)$，$QA=QA'$，



$\therefore\left|QB-QA\right|\geq1$，

$\therefore\left|QB-QA'\right|\geq1$，

即 $\left|A'B\right|^2\geq1$，

$\therefore\left[\left(-2m+\frac{1}{2}\right)-(-2m)\right]^2+\left[\left(2m^2-2m+\frac{1}{4}\right)-\left(2m^2-\frac{3}{2}m\right)\right]^2\geq1$，

化简得：$m^2-m-\frac{11}{4}\geq 0$，

令$m^2-m-\frac{11}{4}=0$，

解得：$m_1=-\sqrt{3}+\frac{1}{2}$，$m_2=\sqrt{3}+\frac{1}{2}$（舍去），

$\therefore m\leq -\sqrt{3}+\frac{1}{2}$，

$\because m=-k+\frac{1}{2}$，

$\therefore -k+\frac{1}{2}\leq -\sqrt{3}+\frac{1}{2}$，

$\therefore k\geq\sqrt{3}$；

综上所述，k的取值范围为$k\leq -\sqrt{3}$或$k\geq\sqrt{3}$．

【点睛】本题是二次函数综合题，考查了待定系数法，二次函数 图象和性质，一次函数的图象和性质，一次函数图象与抛物线的交点等，涉及知识点多，难度大，熟练掌握二次函数的图象和性质，运用分类讨论思想是解题关键．