2023年岳阳市初中学业水平考试试卷

数学

温馨提示：

1．本试卷共三大题，24小题，满分120分，考试时量90分钟；

2．本试卷分为试题卷和答题卡两部分，所有答案都必须填涂或填写在答题卡上规定的答题区域内；

3，考试结束后，考生不得将试题卷、答题卡、草稿纸带出考场．

一、选择题（本大题共8小题，每小题3分，满分24分．在每小题给出的四个选项中，选出符合要求的一项）

1. 2023的相反数是（　）

A. $\frac{1}{2023}$　　B. -2023　　C. 2023　　D. $-\frac{1}{2023}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据只有符号不同　两个数互为相反数进行解答即可得．

【详解】解：2023的相反数是-2023，

故选：B．

【点睛】本题考查了相反数的定义，熟练掌握相反数的定义是解题的关键．

2. 下列运算结果正确的是（　）

A. $a^2 \cdot a = a^3$　　B. $a^6 \div a^2 = a^3$　　C. $3a - a = 3$　　D. $(a-b)^2 = a^2 - b^2$

【答案】A

【解析】

【分析】根据同底数幂的乘法，同底数幂的除法，合并同类项法则，完全平方公式，进行计算即可求解．

【详解】解：A、$a^2 \cdot a = a^3$，故该选项正确，符合题意；

B、$a^6 \div a^2 = a^4$，故该选项不正确，不符合题意；

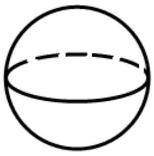
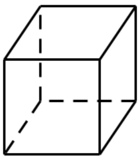
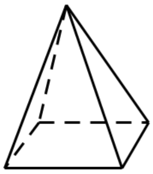
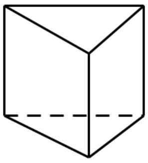
C、$3a - a = 2a$，故该选项不正确，不符合题意；

D、$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$，故该选项不正确，不符合题意；

故选：A．

【点睛】本题考查了同底数幂的乘法，同底数幂的除法，合并同类项，完全平方公式，熟练掌握同底数幂的乘法，同底数幂的除法，合并同类项法则，完全平方公式是解题的关键．

3. 下列几何体的主视图是圆的是（　）

A.  B.  C.  D. 

【答案】A

【解析】

【分析】根据主视图的概念找出各种几何体的主视图即可．

【详解】解：A、主视图为圆，符合题意；

B、主视图为正方形，不符合题意；

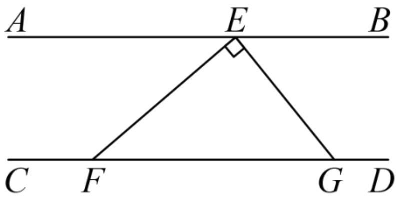
C、主视图为三角形，不符合题意；

D、主视图为并排的两个长方形，不符合题意．

故选：A．

【点睛】本题考查简单几何体的三视图，解题的关键是能够理解主视图的概念以及对常见的几何体的主视图有一定的空间想象能力．

4. 已知 $AB \parallel CD$，点 E 在直线 AB 上，点 F, G 在直线 CD 上，$EG \perp EF$ 于点 $E, \angle AEF = 40^\circ$，则 $\angle EGF$ 的度数是（　）



A. 40°　　B. 45°　　C. 50°　　D. 60°

【答案】C

【解析】

【分析】根据平行线的性质和直角三角形两锐角互余分析计算求解．

【详解】解：$\because AB \parallel CD$，

$\therefore \angle AEF = \angle EFG = 40^{\circ}$，

$\because EG \perp EF$，

$\therefore \angle EGF = 90^{\circ} - \angle EFG = 50^{\circ}$，

故选：C．

【点睛】本题考查平行线的性质和直角三角形两锐角互余，掌握两直线平行，内错角相等以及直角三角形两锐角互余是解题关键．

5. 在 5 月份跳绳训练中，妍妍同学一周成绩记录如下：$176, 178, 178, 180, 182, 185, 189$（单位：次/分钟），这组数据的众数和中位数分别是（　）

A. $180, 182$　　B. $178, 182$　　C. $180, 180$　　D. $178, 180$

【答案】D

【解析】

【分析】根据众数和中位数的定义即可得到答案．

【详解】解：数据从小到大排列为$176, 178, 178, 180, 182, 185, 189$，出现次数最多的是$178$，共出现 2 次，众数是$178$，中位数为$180$．

故选：D

【点睛】此题考查了众数和中位数，一组数据中出现次数最多的数据叫做众数，一组数据按照大小顺序排

列后，处在中间位置或中间两个数的平均数叫做中位数，熟练掌握定义是解题的关键．

6. 下列命题是真命题的是（　）

A. 同位角相等　　B. 菱形的四条边相等

C. 正五边形是中心对称图形　　D. 单项式 $5ab^2$ 次数是 4

【答案】B

【解析】

【分析】根据平行线的性质，菱形的性质，正五边形定义，中心对称图形的定义，单项式次数的定义求解．

【详解】A. 两平行线被第三条直线所截，同位角相等，故此命题为假命题；

B. 根据菱形的性质，菱形的四条边相等，故此命题为真命题；

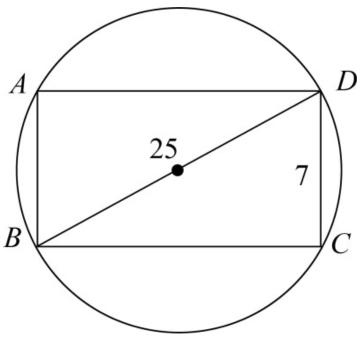
C. 正五边形不符合中心对称图形的定义，不是中心对称图形，故此命题为假命题；

D. 单项式 $5ab^2$ 的次数是 3，故此命题是假命题；

故选：B．

【点睛】本题考查平行线的性质，菱形的性质，正五边形定义，中心对称图形的定义，单项式次数的定义，熟练掌握上述知识是关键．

7. 我国古代数学名著《九章算术》中有这样一道题："今有圆材，径二尺五寸．欲为方版，令厚七寸，问广几何？"结合右图，其大意是：今有圆形材质，直径 BD 为 25 寸，要做成方形板材，使其厚度 CD 达到 7 寸．则 BC 的长是（　）



A. $\sqrt{674}$ 寸　　B. 25 寸　　C. 24 寸　　D. 7 寸

【答案】C

【解析】

【分析】根据矩形的性质，勾股定理求解．

【详解】由题意知，四边形$ABCD$是矩形，

$\therefore BC\perp CD$

$\therefore$在$\mathrm{Rt}\triangle BCD$中，$BC=\sqrt{BD^2-BC^2}=\sqrt{25^2-7^2}=24$

故选：C．

【点睛】本题考查矩形的性质，勾股定理；由矩形的性质得出直角三角形是解题的关键．

8. 若一个点的坐标满足$(k,2k)$，我们将这样的点定义为“倍值点”．若关于x的二次函数$y=(t+1)x^2+(t+2)x+s$（s,t为常数，$t\neq-1$）总有两个不同的倍值点，则s的取值范围是（　）

A. $s<-1$　　B. $s<0$　　C. $0<s<1$　　D. $-1<s<0$

【答案】D

【解析】

【分析】利用“倍值点”的定义得到方程$(t+1)x^2+tx+s=0$，则方程的$\Delta>0$，可得$t^2-4ts-4s>0$，利用对于任意的实数s总成立，可得不等式的判别式小于0，解不等式可得出s的取值范围．

【详解】解：由“倍值点”的定义可得：$2x=(t+1)x^2+(t+2)x+s$，

整理得，$(t+1)x^2+tx+s=0$

$\because$关于x的二次函数$y=(t+1)x^2+(t+2)x+s$（s,t为常数，$t\neq-1$）总有两个不同的倍值点，

$\therefore \Delta=t^2-4(t+1)s=t^2-4ts-4s>0,$

$\because$对于任意实数s总成立，

$\therefore (-4s)^2-4\times(-4s)<0,$

整理得，$16s^2+16s<0,$

$\therefore s^2+s<0,$

$\therefore s(s+1)<0$，

$\therefore \begin{cases} s<0 \\ s+1>0 \end{cases}$，或 $\begin{cases} s>0 \\ s+1<0 \end{cases}$

当 $\begin{cases} s<0 \\ s+1>0 \end{cases}$ 时，解得 $-1<s<0$，

当 $\begin{cases} s>0 \\ s+1<0 \end{cases}$ 时，此不等式组无解，

$\therefore -1<s<0$，

故选：D．

【点睛】本题主要考查了二次函数图象上点的坐标特征，一元二次方程根的判别式以及二次函数与不等式的关系，理解新定义并能熟练运用是解答本题的关键．

二、填空题（本大题共 8 小题，每小题 4 分，满分 32 分）

9. 函数 $y=\frac{1}{x-2}$ 中，自变量 x 的取值范围是____．

【答案】$x\neq 2$

【解析】

【详解】解：由题意知：x-2≠0，解得 x≠2；

故答案 x≠2．

10. 近年来，岳阳扛牢“守护好一江碧水”责任，水在变清，岸在变绿，洞庭湖真正成为鸟类的天堂．2022 年冬季，洞庭湖区越冬水鸟数量达 37.83 万只，数据 378300 用科学记数法表示为_________．

【答案】3.783×10^{5}

【解析】

【分析】用科学记数法表示绝对值较大的数时，一般形式为 $a\times 10^{n}$，其中 $1\leq|a|<10$，n 为整数．

【详解】解：$378300=3.783\times 10^{5}$．

故答案为：3.783×10^5．

【点睛】本题考查了科学记数法，科学记数法的表示形式为$a\times10^n$的形式，其中$1\le|a|<10$，n为整数．确定n的值时，要看把原来的数，变成a时，小数点移动了多少位，n的绝对值与小数点移动的位数相同．当原数绝对值≥10时，n是正数；当原数的绝对值<1时，n是负数，确定a与n的值是解题的关键．

11. 有两个女生小合唱队，各由6名队员组成，甲队与乙队的平均身高均为$\bar{x}=160\text{cm}$，甲队身高方差$s_{甲}^2=1.2$，乙队身高方差$s_{乙}^2=2.0$，两队身高比较整齐的是________队．（填“甲”或“乙”）

【答案】甲

【解析】

【分析】根据方差越小，波动越小，越稳定判断即可．

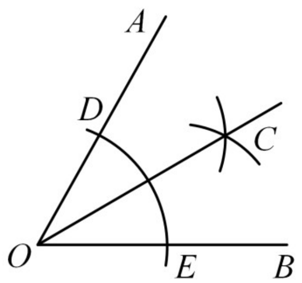
【详解】$\because s_{甲}^2=1.2$，$s_{乙}^2=2.0$，且$s_{甲}^2<s_{乙}^2$

∴甲队稳定，

故答案为：甲．

【点睛】本题考查了方差的决策性，熟练掌握方差的意义是解题的关键．

12. 如图，①在OA,OB上分别截取线段OD,OE，使$OD=OE$；②分别以D,E为圆心，以大于$\frac{1}{2}DE$的长为半径画弧，在$\angle AOB$内两弧交于点C；③作射线OC．若$\angle AOB=60^\circ$，则$\angle AOC=$________°．



【答案】30

【解析】

【分析】由作图可知OC是$\angle AOB$的角平分线，根据角平分线的定义即可得到答案．

【详解】解：由题意可知，OC是$\angle AOB$的角平分线，

$\therefore \angle AOC=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2}\times 60^{\circ}=30^{\circ}$．

故答案为：30

【点睛】此题考查角平分线的作图、角平分线相关计算，熟练掌握角平分线的作图是解题的关键．

13. 观察下列式子：

$1^2-1=1\times 0$；$2^2-2=2\times 1$；$3^2-3=3\times 2$；$4^2-4=4\times 3$；$5^2-5=5\times 4$；…

依此规律，则第n（n为正整数）个等式是_________．

【答案】$n^2-n=n(n-1)$

【解析】

【分析】根据等式的左边为正整数的平方减去这个数，等式的右边为这个数乘以这个数减1，即可求解．

【详解】解：$\because 1^2-1=1\times 0$；$2^2-2=2\times 1$；$3^2-3=3\times 2$；$4^2-4=4\times 3$；$5^2-5=5\times 4$；…

$\therefore$第n（n为正整数）个等式是$n^2-n=n(n-1)$，

故答案为：$n^2-n=n(n-1)$．

【点睛】本题考查了数字类规律，找到规律是解题的关键．

14. 已知关于x的一元二次方程$x^2+2mx+m^2-m+2=0$有两个不相等的实数根，且$x_1+x_2+x_1\cdot x_2=2$，则实数$m=$_________．

【答案】3

【解析】

【分析】利用一元二次方程$x^2+2mx+m^2-m+2=0$有两个不相等的实数根求出m的取值范围，由根与系数关系得到$x_1+x_2=-2m, x_1x_2=m^2-m+2$，代入$x_1+x_2+x_1\cdot x_2=2$，解得$m$的值，根据求得的$m$

的取值范围，确定 m 的值即可．

【详解】解：∵关于 x 的一元二次方程 $x^2+2mx+m^2-m+2=0$ 有两个不相等的实数根，

$\therefore \Delta=(2m)^2-4\left(m^2-m+2\right)=4m-8>0$，

解得 $m>2$ ，

$\because x_1+x_2=-2m, x_1x_2=m^2-m+2$ ，$x_1+x_2+x_1\cdot x_2=2$ ，

$\therefore -2m+m^2-m+2=2$ ，

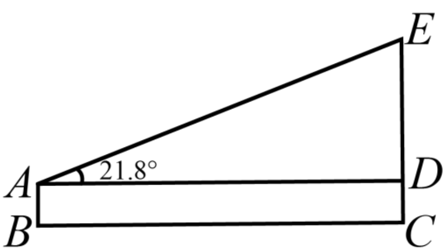
解得 $m_1=3, m_2=0$ （不合题意，舍去），

$\therefore m=3$

故答案为：3

【点睛】此题考查一元二次方程根的判别式和一元二次方程根与系数关系，熟练掌握根的判别式和根与系数关系的内容是解题的关键．

15. 2023 年岳阳举办以“跃马江湖”为主题的马拉松赛事．如图，某校数学兴趣小组在 A 处用仪器测得赛场一宣传气球顶部 E 处的仰角为 21.8° ，仪器与气球的水平距离 BC 为 20 米，且距地面高度 AB 为 1.5 米，则气球顶部离地面的高度 EC 是________米（结果精确到 0.1 米，$\sin 21.8^\circ\approx 0.3714, \cos 21.8^\circ\approx 0.9285, \tan 21.8^\circ\approx 0.4000$）．



【答案】9.5

【解析】

第一试卷网 Shijuan1.Com 提供下载

【分析】通过解直角三角形 ADE ，求出 DE ，再根据 $EC=ED+DC$ 求出结论即可．

【详解】解：根据题意得，四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore AD=BC=20\text{m}, DC=AB=1.5\text{m},$

在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 中， $\tan\angle DAE=\dfrac{DE}{AD},$

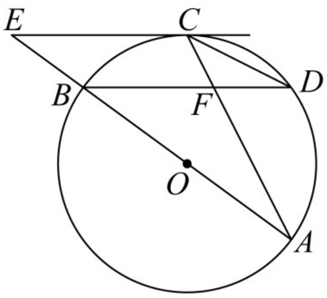
$\therefore DE=AD\tan\angle DAE\approx 20\times 0.400=8.0\text{m}$，

$\therefore EC=ED+DC=8.0+1.5=9.5\text{m}$

故答案为：9.5

【点睛】此题考查了解直角三角形的应用-仰角俯角问题．此题难度适中，注意能借助仰角构造直角三角形并解直角三角形是解此题的关键．

16. 如图，在 $\odot O$ 中， AB 为直径， BD 为弦，点 C 为 $\overset{\frown}{BD}$ 的中点，以点 C 为切点的切线与 AB 的延长线交于点 E ．



（1）若 $\angle A=30^{\circ}, AB=6$ ，则 $\overset{\frown}{BD}$ 的长是________（结果保留 π ）；

（2）若 $\dfrac{CF}{AF}=\dfrac{1}{3}$ ，则 $\dfrac{CE}{AE}=$________．

【答案】 ①. 2π ②. $\frac{1}{2}$

【解析】

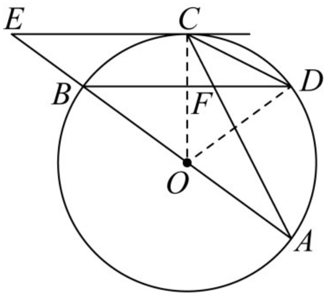
【分析】（1）连接 OC, OD ，根据点 C 为 $\overset{\frown}{BD}$ 的中点，根据已知条件得出 $\angle BOD=120^{\circ}$ ，然后根据弧长

公式即可求解；

（2）连接OC，根据垂径定理的推论得出$OC\perp BD$，EC是$\odot O$的切线，则$OC\perp EC$,得出$EC\parallel BD$，

根据平行线分线段成比例得出$\frac{EB}{AB}=\frac{1}{3}$，设$EB=2a$，则$AB=6a$，勾股定理求得$EC$,J进而即可求解．

【详解】解：（1）如图，连接OC,OD，



∵点C为$\overset{\frown}{BD}$的中点，

∴$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}$，

又∵$\angle A=30^{\circ}$，

∴$\angle BOC=\angle COD=2\angle A=60^{\circ}$，

∴$\angle BOD=120^{\circ}$，

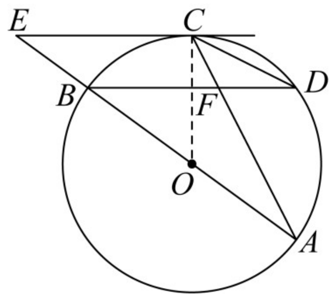
∵$AB=6$，

∴$OB=\frac{1}{2}AB=3$，

∴$l_{\overset{\frown}{BD}}=\frac{120}{180}\times\pi\times3=2\pi$，

故答案为：2π．

（2）解：如图，连接OC，



∵点 C 为 $\overset{\frown}{BD}$ 的中点，

∴ $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}$ ，

∴ $OC\perp BD$ ，

∵ EC 是 $\odot O$ 的切线，

∴ $OC\perp EC$ ，

∴ $EC\parallel BD$

∴ $\frac{CF}{AF}=\frac{EB}{AB}$ ，

∵ $\frac{CF}{AF}=\frac{1}{3}$ ，

∴ $\frac{EB}{AB}=\frac{1}{3}$ ，

设 $EB=2a$ ，则 $AB=6a$ ， $BO=3a, EO=EB+BO=5a$ ，

∴ $EC=\sqrt{EO^2-CO^2}=\sqrt{5^2-3^2}a=4a$ ， $AE=2a+6a=8a$ ，

∴ $\frac{CE}{AE}=\frac{4a}{8a}=\frac{1}{2}$ ．

故答案为： $\frac{1}{2}$ ．

【点睛】本题考查了垂径定理，圆周角定理，切线的性质，弧长公式，平行线分线段成比例定理等知识，综合性较强，熟练掌握和灵活运用相关知识是解题的关键．

三、解答题（本大题共8小题，满分24分．解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤）

17. 计算：$2^2-\tan 60^\circ+\left|\sqrt{3}-1\right|-(3-\pi)^0$．

【答案】2

【解析】

【分析】根据幂的运算，特殊角的函数值，零指数幂的运算，绝对值的化简计算即可．

【详解】$2^2-\tan 60^\circ+\left|\sqrt{3}-1\right|-(3-\pi)^0$

$=4-\sqrt{3}+\sqrt{3}-1-1=2$．

【点睛】本题考查了幂的运算，特殊角的函数值，零指数幂的运算，绝对值的化简，熟练掌握运算的法则是解题的关键．

18. 解不等式组：$\begin{cases}2x+1>x+3, ① \\ 2x-4<x. ②\end{cases}$

【答案】$2<x<4$

【解析】

【分析】按照解不等式组的基本步骤求解即可．

【详解】∵$\begin{cases}2x+1>x+3, ① \\ 2x-4<x. ②\end{cases}$，

解①的解集为$x>2$；

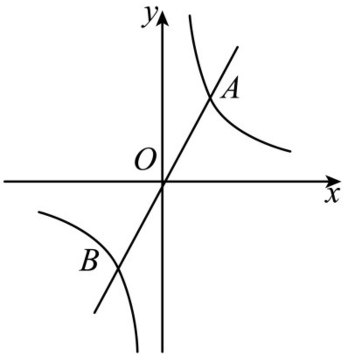
解②的解集为$x<4$，

∴原不等式组的解集为$2<x<4$．

【点睛】本题考查了不等式组的解法，熟练掌握解不等式组的基本步骤是解题的关键．

19. 如图，反比例函数$y=\frac{k}{x}$（k为常数，$k\neq 0$）与正比例函数$y=mx$（m为常数，$m\neq 0$）的图像交

于 $A(1,2),B$ 两点．



（1）求反比例函数和正比例函数的表达式；

（2）若 y 轴上有一点 $C(0,n)$，$\triangle ABC$ 的面积为 4，求点 C 的坐标．

【答案】（1）$y=\frac{2}{x}$；$y=2x$

（2）$C(0,4)$ 或 $C(0,-4)$

【解析】

【分析】（1）把 $A(1,2)$ 分别代入函数的解析式，计算即可．

（2）根据反比例函数的中对称性质，得到 $B(-1,-2)$，设 $C(0,n)$，根据 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|n|(x_A-x_B)$，列式计算即可．

【小问 1 详解】

∵反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（k 为常数，$k\neq0$）与正比例函数 $y=mx$（m 为常数，$m\neq0$）的图像交于 $A(1,2),B$ 两点，

$\therefore 2=\frac{k}{1},2=m\times1$，

解得 $k=2,m=2$，

故反比例函数的表达式为$y=\frac{2}{x}$，正比例函数的表达式$y=2x$．

【小问2详解】

∵反比例函数$y=\frac{k}{x}$（k为常数，$k\neq0$）与正比例函数$y=mx$（m为常数，$m\neq0$）的图像交于$A(1,2)$，B两点，

根据反比例函数图象的中心对称性质，

$\therefore B(-1,-2)$，设$C(0,n)$，

根据题意，得$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|n|(x_A-x_B)$，

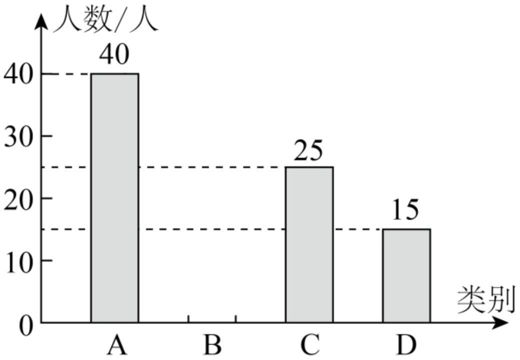
$\therefore \frac{1}{2}|n|\times2=4$，

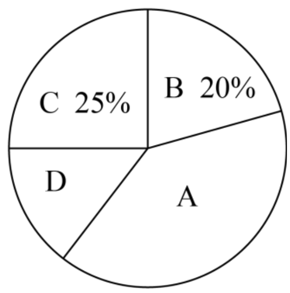
解得$n=4$或$n=-4$，

故点C的坐标为$C(0,4)$或$C(0,-4)$．

【点睛】本题考查了反比例函数与正比例函数的综合，反比例函数的中心对称性，三角形面积的特殊坐标表示法，熟练掌握反比例函数与正比例函数的综合，反比例函数的中心对称性是解题的关键．

20. 为落实中共中央办公厅、国务院办公厅印发的《关于实施中华优秀传统文化传承发展工程意见》，深入开展“我们的节日”主题活动，某校七年级在端午节来临之际，成立了四个社团：A包粽子，B腌咸蛋，C酿甜酒，D摘艾叶．每人只参加一个社团的情况下，随机调查了部分学生，根据调查结果绘制了两幅不完整的统计图：





第一试卷网 Shijuan1.Com 提供下载

（1）本次共调查了_________名学生；

（2）请补全条形统计图；

（3）学校计划从四个社团中任选两个社团进行成果展示，请用列表或画树状图的方法，求同时选中 A 和 C 两个社团的概率．

【答案】（1）100　（2）见解析

（3）$\frac{1}{6}$

【解析】

【分析】（1）根据样本容量=频数÷所占百分数，计算即可．

（2）先计算 B 的人数，再完善统计图即可．

（3）利用画树状图计算即可．

【小问1详解】

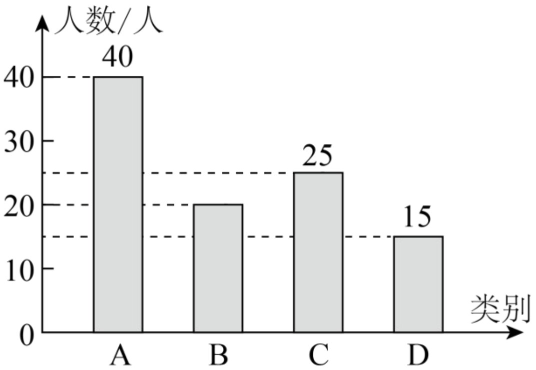
$\because 25\div 25\%=100$（人），

故答案为：100．

【小问2详解】

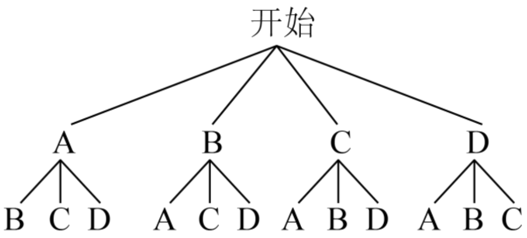
B 的人数：$100-40-25-15=20$（人），

补全统计图如下：



【小问3详解】

根据题意，画树状图如下：

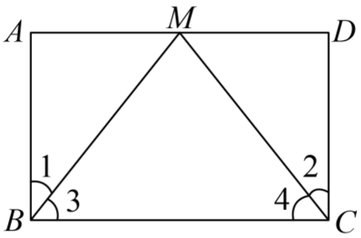


一共有 12 种等可能性，选中 A，C 等可能性有 2 种，

故同时选中 A 和 C 两个社团的概率为 $\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$．

【点睛】本题考查了条形统计图、扇形统计图，画树状图求概率，熟练掌握统计图的意义，准确画树状图是解题的关键．

21. 如图，点 M 在▱$ABCD$ 的边 AD 上，$BM=CM$，请从以下三个选项中① $\angle 1=\angle 2$；② $AM=DM$；③ $\angle 3=\angle 4$，选择一个合适的选项作为已知条件，使▱$ABCD$ 为矩形．



（1）你添加的条件是_________（填序号）；

（2）添加条件后，请证明▱$ABCD$ 为矩形．

【答案】（1）答案不唯一，①或②

（2）见解析

【解析】

【分析】（1）根据有一个角是直角的平行四边形是矩形进行选取；

（2）通过证明 $\triangle ABM\cong\triangle DCM$ 可得 $\angle A=\angle D$，然后结合平行线的性质求得 $\angle A=90^{\circ}$，从而得出▱$ABCD$ 为矩形．

【小问 1 详解】

解：①或②

第一试卷网 Shijuan1.Com 提供下载

【小问2详解】

添加条件①，▱$ABCD$为矩形，理由如下：

在▱$ABCD$中$AB=CD$，$AB\parallel CD$，

在$\triangle ABM$和$\triangle DCM$中$\begin{cases}AB=CD\\ \angle 1=\angle 2\\ BM=CM\end{cases}$，

$\therefore \triangle ABM\cong\triangle DCM$

$\therefore \angle A=\angle D$，

又$\because AB\parallel CD$，

$\therefore \angle A+\angle D=180^\circ$，

$\therefore \angle A=\angle D=90^\circ$，

$\therefore$▱$ABCD$为矩形；

添加条件②，▱$ABCD$为矩形，理由如下：

在▱$ABCD$中$AB=CD$，$AB\parallel CD$，

在$\triangle ABM$和$\triangle DCM$中$\begin{cases}AB=CD\\ AM=DM\\ BM=CM\end{cases}$，

$\therefore \triangle ABM\cong\triangle DCM$

$\therefore \angle A=\angle D$，

又$\because AB\parallel CD$，

$\therefore \angle A+\angle D=180^\circ$，

第一试卷网 Shijuan1.Com 提供下载

$\therefore \angle A=\angle D=90^{\circ}$，

$\therefore$ ▱$ABCD$ 为矩形

【点睛】本题考查矩形的判定，全等三角形的判定和性质，掌握平行四边形的性质和矩形的判定方法（有一个角是直角的平行四边形是矩形）是解题关键．

22. 水碧万物生，岳阳龙虾好．小龙虾产业已经成为岳阳乡村振兴的“闪亮名片”．已知翠翠家去年龙虾的总产量是 $4800\mathrm{kg}$，今年龙虾的总产量是 $6000\mathrm{kg}$，且去年与今年的养殖面积相同，平均亩产量去年比今年少 $60\mathrm{kg}$，求今年龙虾的平均亩产量．

【答案】今年龙虾的平均亩产量 $300\mathrm{kg}$．

【解析】

【分析】设今年龙虾的平均亩产量是 $x\mathrm{kg}$，则去年龙虾的平均亩产量是 $(x-60)\mathrm{kg}$，根据去年与今年的养殖面积相同列出分式方程，解方程并检验即可．

【详解】解：设今年龙虾的平均亩产量是 $x\mathrm{kg}$，则去年龙虾的平均亩产量是 $(x-60)\mathrm{kg}$，

由题意得，$\dfrac{6000}{x}=\dfrac{4800}{x-60}$，

解得 $x=300$，

经检验，$x=300$ 是分式方程的解且符合题意，

答：今年龙虾的平均亩产量 $300\mathrm{kg}$．

【点睛】此题考查了分式方程的实际应用，读懂题意，正确列出方程是解题的关键．

23. 如图 1，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，点 M,N 分别为边 AB,BC 的中点，连接 MN．

初步尝试：（1）MN 与 AC 的数量关系是________，MN 与 AC 的位置关系是________．

特例研讨：（2）如图 2，若 $\angle BAC=90^{\circ},BC=4\sqrt{2}$，先将 $\triangle BMN$ 绕点 B 顺时针旋转 α（α 为锐角），

第一试卷网 Shijuan1.Com 提供下载

得到$\triangle BEF$，当点A,E,F在同一直线上时，AE与BC相交于点D，连接CF．

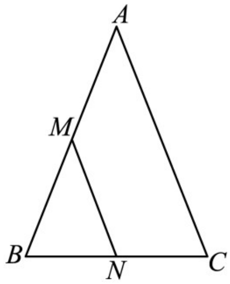


图1

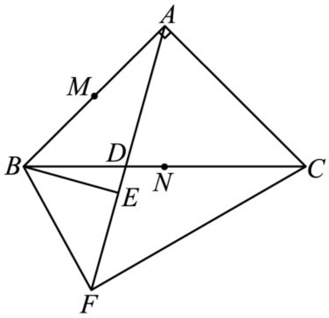
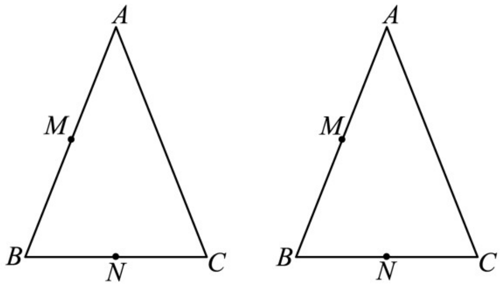


图2



备用图

（1）求$\angle BCF$的度数；

（2）求CD的长．

深入探究：（3）若$\angle BAC < 90^\circ$，将$\triangle BMN$绕点B顺时针旋转α，得到$\triangle BEF$，连接AE，CF．当旋转角α满足$0^\circ < \alpha < 360^\circ$，点$C,E,F$在同一直线上时，利用所提供的备用图探究$\angle BAE$与$\angle ABF$的数量关系，并说明理由．

【答案】初步尝试：（1）$MN = \frac{1}{2}AC$；$MN \parallel AC$；（2）特例研讨：（1）$\angle BCF = 30^\circ$；（2）$CD = 6\sqrt{2} - 2\sqrt{6}$；（3）$\angle BAE = \angle ABF$或$\angle BAE + \angle ABF = 180^\circ$

【解析】

【分析】（1）$AB = AC$，点M,N分别为边AB,BC的中点，则MN是$\triangle ABC$的中位线，即可得出结论；

（2）特例研讨：（1）连接EM，MN,NF，证明$\triangle BME$是等边三角形，$\triangle BNF$是等边三角形，得出$\angle FCB = 30^\circ$；（2）连接AN，证明$\triangle ADN \backsim \triangle BDE$，则$\frac{DN}{DE} = \frac{AN}{BE} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$，设$DE = x$，则$DN = \sqrt{2}x$，在$Rt\triangle ABE$中，$BE = 2, AE = 2\sqrt{3}$，则$AD = 2\sqrt{3} - x$，在$Rt\triangle ADN$中，

$AD^2=DN^2+AN^2$，勾股定理求得$x=4-2\sqrt{3}$，则$CD=DN+CN=\sqrt{2}x+2\sqrt{2}=6\sqrt{2}-2\sqrt{6}$；

（3）当点C, E, F在同一直线上时，且点E在FC上时，设$\angle ABC=\angle ACB=\theta$，则$\angle BAC=180^\circ-2\theta$，得出$\angle BEC+\angle BAC=180^\circ$，则$A, B, E, C$在同一个圆上，进而根据圆周角定理得出$\angle EAC=\angle EBC=\alpha-\theta$，表示$\angle BAE$与$\angle ABF$，即可求解；当$F$在$EC$上时，可得$A, B, E, C$在同一个圆上，设$\angle ABC=\angle ACB=\theta$，则$\angle BAC=\angle BEF=180^\circ-2\theta$，设$\angle NBF=\beta$，则$\angle EBM=\beta$，则$\alpha+\beta=360^\circ$，表示$\angle BAE$与$\angle ABF$，即可求解．

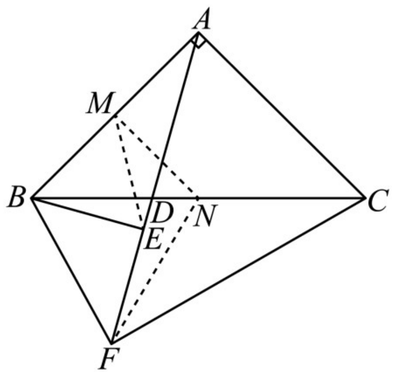
【详解】初步尝试：（1）$\because AB=AC$，点M, N分别为边AB, BC的中点，

$\therefore MN$是$\triangle ABC$的中位线，

$\therefore MN=\frac{1}{2}AC$；$MN \parallel AC$；

故答案是：$MN=\frac{1}{2}AC$；$MN \parallel AC$；

（2）特例研讨：（1）如图所示，连接EM，MN, NF，



$\because MN$是$\triangle BAC$的中位线，

$\therefore MN \parallel AC$，

$\therefore \angle BMN = \angle BAC = 90^\circ$

$\because$将$\triangle BMN$绕点B顺时针旋转α（α为锐角），得到$\triangle BEF$，

$\therefore BE = BM, BF = BN$；$\angle BEF = \angle BMN = 90^\circ$

$\because$点A, E, F在同一直线上时，

$\therefore \angle AEB = \angle BEF = 90^\circ$

又$\because$在$\mathrm{Rt}\triangle ABE$中，M是斜边AB的中点，

$\therefore ME = \frac{1}{2}AB = MB$

$\therefore BM = ME = BE$

$\therefore \triangle BME$是等边三角形，

$\therefore \angle ABE = 60^\circ$，即旋转角$\alpha = 60^\circ$

$\therefore \angle NBF = 60^\circ, BN = BF$

$\therefore \triangle BNF$是等边三角形，

又$\because BN = NC, BN = NF$，

$\therefore NF = NC$，

$\therefore \angle NCF = \angle NFC$，

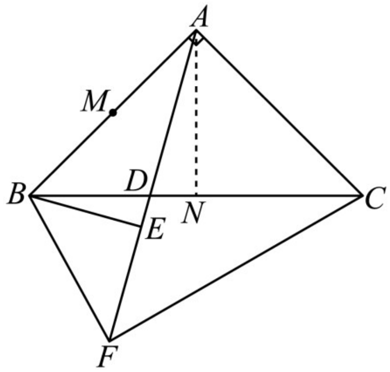
$\therefore \angle BNF = \angle NCF + \angle NFC = 2\angle NFC = 60^\circ$，

$\therefore \angle FCB = 30^\circ$，

（2）如图所示，连接AN，

$\because AB = AC$，$\angle BAC = 90^\circ, BC = 4\sqrt{2}$，

$\therefore AB=\frac{\sqrt{2}}{2}BC=4$，$\angle ACB=\angle ABC=45^{\circ}$，



$\because \angle ADN=\angle BDE, \angle ANB=\angle BED=90^{\circ}$，

$\therefore \triangle ADN \backsim \triangle BDE$，

$\therefore \frac{DN}{DE}=\frac{AN}{BE}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$，

设 $DE=x$，则 $DN=\sqrt{2}x$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 中，$BE=2, AE=2\sqrt{3}$，则 $AD=2\sqrt{3}-x$，

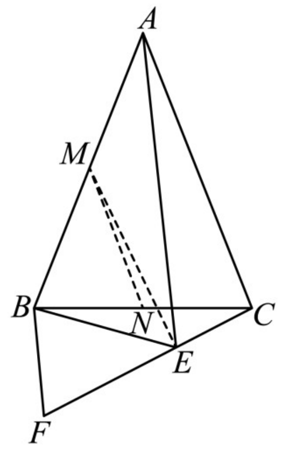
在 $\mathrm{Rt}\triangle ADN$ 中，$AD^{2}=DN^{2}+AN^{2}$，

$\therefore \left(2\sqrt{3}-x\right)^{2}=\left(\sqrt{2}x\right)^{2}+\left(2\sqrt{2}\right)^{2}$，

解得：$x=4-2\sqrt{3}$ 或 $x=-2\sqrt{3}-4$（舍去）

$\therefore CD=DN+CN=\sqrt{2}x+2\sqrt{2}=6\sqrt{2}-2\sqrt{6}$，

（3）如图所示，当点 C, E, F 在同一直线上时，且点 E 在 FC 上时，



$\because AB=AC$，

$\therefore \angle ABC=\angle ACB$，

设$\angle ABC=\angle ACB=\theta$，则$\angle BAC=180^{\circ}-2\theta$，

$\because MN$是$\triangle ABC$的中位线，

$\therefore MN\parallel AC$

$\therefore \angle MNB=\angle MBN=\theta$，

$\because$将$\triangle BMN$绕点B顺时针旋转α，得到$\triangle BEF$，

$\therefore \triangle EBF\cong\triangle MBN$，$\angle MBE=\angle NBF=\alpha$，

$\therefore \angle EBF=\angle EFB=\theta$

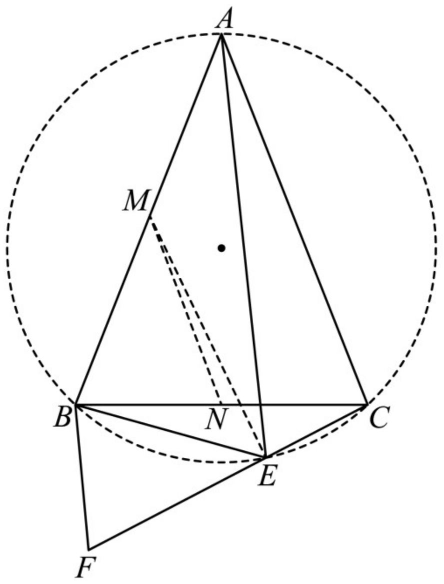
$\therefore \angle BEF=180^{\circ}-2\theta$，

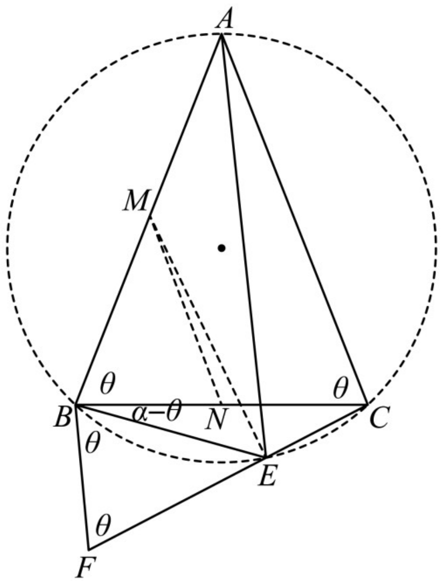
$\because$点C,E,F在同一直线上，

$\therefore \angle BEC=2\theta$

$\therefore \angle BEC+\angle BAC=180^{\circ}$，

$\therefore A,B,E,C$在同一个圆上，





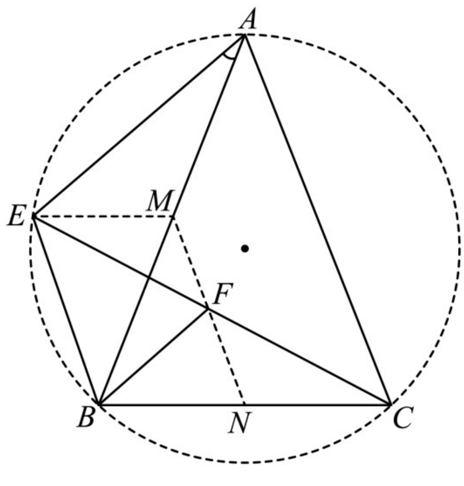
$\therefore \angle EAC = \angle EBC = \alpha - \theta$

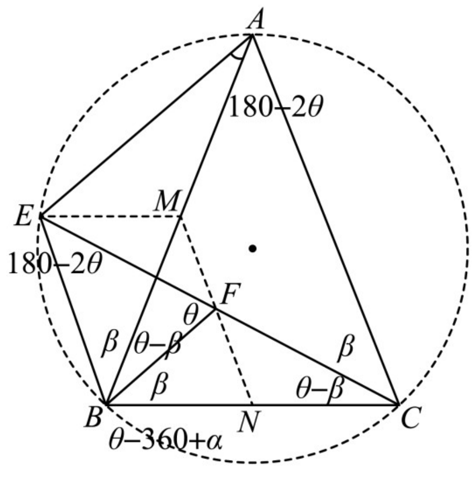
$\therefore \angle BAE = \angle BAC - \angle EAC = (180^\circ - 2\theta) - (\alpha - \theta) = 180^\circ - \alpha - \theta$

$\because \angle ABF = \alpha + \theta$，

$\therefore \angle BAE + \angle ABF = 180^\circ$；

如图所示，当 F 在 EC 上时，





$\because \angle BEF = \angle BAC, BC = BC$

$\therefore A, B, E, C$ 在同一个圆上，

设 $\angle ABC = \angle ACB = \theta$，则 $\angle BAC = \angle BEF = 180^\circ - 2\theta$，

将$\triangle BMN$绕点B顺时针旋转α，得到$\triangle BEF$，

设$\angle NBF=\beta$，则$\angle EBM=\beta$，则$\alpha+\beta=360^\circ$，

$\therefore \angle ABF=\theta-\beta$，

$\because \angle BFE=\angle EBF=\theta$，$\angle EFB=\angle FBC+\angle FCB$

$\therefore \angle ECB=\angle FCB=\angle EFB-\angle FBC=\theta-\beta$，

$\therefore \overset{\frown}{EB}=\overset{\frown}{EB}$

$\therefore \angle EAB=\angle ECB=\theta-\beta$

$\therefore \angle BAE=\angle ABF$

综上所述，$\angle BAE=\angle ABF$或$\angle BAE+\angle ABF=180^\circ$

【点睛】本题考查了圆周角定理，圆内接四边形对角互补，相似三角形的性质与判定，旋转的性质，中位线的性质与判定，等腰三角形的性质与判定，三角形内角和定理，三角形外角的性质，勾股定理，熟练掌握以上知识是解题的关键．

24. 已知抛物线$Q_1: y=-x^2+bx+c$与x轴交于$A(-3,0), B$两点，交y轴于点$C(0,3)$．

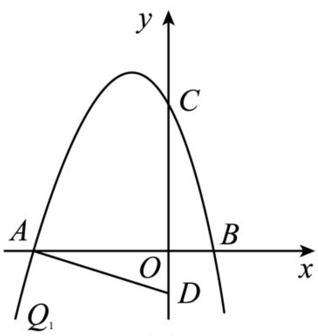


图1

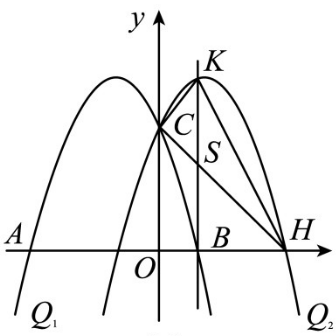
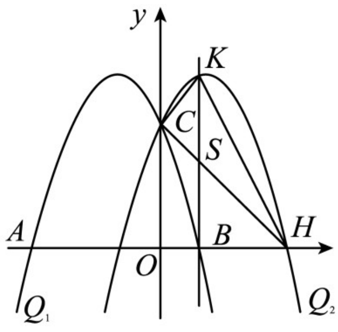


图2



备用图

（1）请求出抛物线Q_1的表达式．

（2）如图1，在y轴上有一点$D(0,-1)$，点E在抛物线Q_1上，点F为坐标平面内一点，是否存在点E,F使得四边形$DAEF$为正方形？若存在，请求出点E,F的坐标；若不存在，请说明理由．

第一试卷网 Shijuan1.Com 提供下载

（3）如图2，将抛物线Q_1向右平移2个单位，得到抛物线Q_2，抛物线Q_2 顶点为K，与x轴正半轴交于点H，抛物线Q_1上是否存在点P，使得$\angle CPK=\angle CHK$？若存在，请求出点P的坐标；若不存在，请说明理由．

【答案】（1）$y=-x^2-2x+3$

（2）$E(-2,3)$；$F(1,2)$

（3）点P的坐标为$(1,0)$或$(-2,3)$

【解析】

【分析】（1）把$A(-3,0)$，$C(0,3)$代入$Q_1:y=-x^2+bx+c$，求出$b=-2,c=3$即可；

（2）假设存在这样的正方形，过点E作$ER\perp x$于点R，过点F作$FI\perp y$轴于点I，证明$\triangle EAR\cong\triangle AOD,\triangle FID\cong\triangle DOA$,可得$ER=3,AR=1,FI=1,IO=2,$故可得$E(-2,3)$，$F(1,2)$；

（3）先求得抛物线Q_2的解析式为$y=-(x+1-2)^2+4=-(x-1)^2+4$，得出$K(1,4)$，$H(3,0)$，运用待定系数法可得直线$BC$的解析式为$y=-x+3$，过点$K$作$KT\perp y$轴于点$T$，连接$BC$，设$KP$交直线$BC$于$M$或$N$，如图2，过点$C$作$PS\perp y$轴交$BK$于点S，交抛物线$Q_1$于点$P$，连接$PK$，利用等腰直角三角形性质和三角函数定义可得$\tan\angle CHK=\frac{CK}{CH}=\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}=\frac{1}{3}$，进而可求得点$P$的坐标．

【小问1详解】

∵抛物线$Q_1:y=-x^2+bx+c$与x轴交于$A(-3,0),$两点，交y轴于点$C(0,3)$，

∴把$A(-3,0)$，$C(0,3)$代入$Q_1:y=-x^2+bx+c$，得，

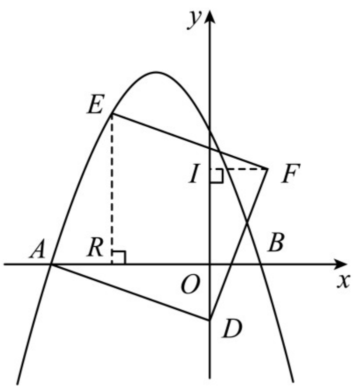
$\begin{cases}-9-3b+c=0\\c=3\end{cases}$,

解得，$\begin{cases}b=-2\\c=3\end{cases}$,

∴解析式为：$y=-x^2-2x+3$；

【小问2详解】

假设存在这样的正方形$DAEF$，如图，过点E作$ER\perp x$于点R，过点F作$FI\perp y$轴于点I，



∴$\angle AER+\angle EAR=90^{\circ}$,

∵四边形$DAEF$是正方形，

∴$AE=AD,\angle EAD=90^{\circ}$,

∴$\angle EAR+\angle DAR=90^{\circ}$,

∴$\angle AER=\angle DAO$,

又$\angle ERA=\angle AOD=90^{\circ}$,

∴$\triangle AER\cong\triangle DAO$

∴$AR=DO,ER=AO$,

∵$A(-3,0)$, $D(0,-1)$,

$\therefore OA=3, OD=1,$

$\therefore AR=1, ER=3,$

$\therefore OR=OA-AR=3-1=2,$

$\therefore E(-2,3)$；

同理可证明：$\triangle FID\cong\triangle DOA$，

$\therefore FI=DO=1, DI=AO=3,$

$\therefore IO=DI-DO=3-1=2,$

$\therefore F(1,2)$；

【小问 3 详解】

解：抛物线 Q_1 上存在点 P，使得 $\angle CPK=\angle CHK$．

$\because y=-x^2-2x+3=-(x+1)^2+4$，

$\therefore$ 抛物线 Q_1 的顶点坐标为 $(-1,4)$，

$\because$ 将抛物线 Q_1 向右平移 2 个单位，得到抛物线 Q_2，

$\therefore$ 抛物线 Q_2 的解析式为 $y=-(x+1-2)^2+4=-(x-1)^2+4$，

$\because$ 抛物线 Q_2 的顶点为 K，与 x 轴正半轴交于点 H，

$\therefore K(1,4)$，$H(3,0)$，

设直线 BC 的解析式为 $y=kx+n$，把 $C(0,3)$，$H(3,0)$ 代入得 $\begin{cases} n=3 \\ 3k+n=0 \end{cases}$，

解得：$\begin{cases} k=-1 \\ n=3 \end{cases}$，

$\therefore$直线BC的解析式为$y=-x+3$，

过点K作$KT\perp y$轴于点T，连接BC，设KP交直线BC于M或N，如图2，过点C作$PS\perp y$轴交BK于点S，交抛物线Q_1于点P，连接PK，

则$T(0,4)$，$M(m,-m+3)$，$N(t,-t+3)$，

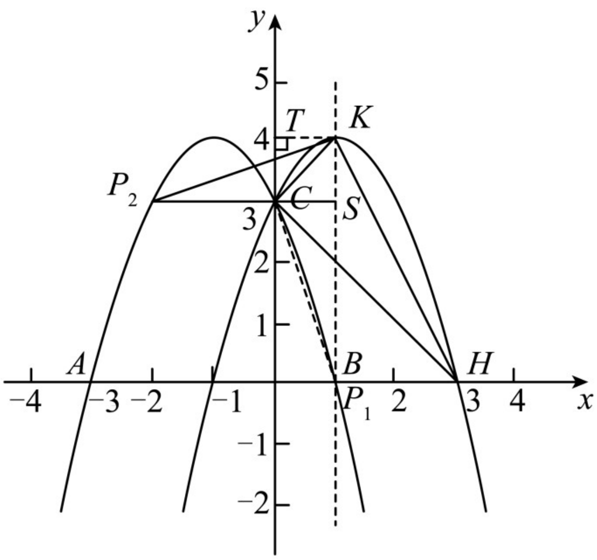


图2

$\therefore KT=TC=1$，$\angle KTC=90^\circ$，

$\therefore\triangle CKT$是等腰直角三角形，

$\therefore\angle KCT=45^\circ$，$CK=\sqrt{2}KT=\sqrt{2}$，

$OH=OC=3$，$\angle COH=90^\circ$，

$\therefore\triangle COH$是等腰直角三角形，

$\therefore\angle HCO=45^\circ$，$CH=\sqrt{2}OC=3\sqrt{2}$，

$\therefore\angle KCH=180^\circ-\angle KCT-\angle HCO=90^\circ$，

第一试卷网 Shijuan1.Com 提供下载

$\therefore \tan\angle CHK = \frac{CK}{CH} = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{3}$，

$\because \angle CPK = \angle CHK$，

$\therefore \tan\angle CPK = \tan\angle CHK = \frac{1}{3}$，

$\because \tan\angle BCO = \frac{OB}{OC} = \frac{1}{3}$，

$\therefore \angle BCO = \angle CHK$，

$\because BK \parallel OC$，

$\therefore \angle CBK = \angle BCO$，

$\therefore \angle CBK = \angle CHK$，

即点 P 与点 B 重合时，$\angle CPK = \angle CHK$，

$\therefore P_1(1,0)$；

$\because SK = 1$，$PS = 3$，

$\therefore \tan\angle CPK = \frac{SK}{PS} = \frac{1}{3}$，

$\therefore \angle CPK = \angle CHK$，

$\because$ 点 P 与点 C 关于直线 $x=-1$ 对称，

$\therefore P(-2,3)$；

综上所述，抛物线 Q_1 上存在点 P，使得 $\angle CPK = \angle CHK$，点 P 的坐标为 $(1,0)$ 或 $(-2,3)$．

【点睛】本题是二次函数综合题，考查了待定系数法求解析式，二次函数的性质，全等三角形的判定与性质，正方形的性质等知识，运用数形结合思想解决问题是解题的关键．

第一试卷网 Shijuan1.Com 提供下载

第一试卷网 Shijuan1.Com 提供下载