数学试题

一、选择题（本大题共有 8 小题，每小题 3 分，共 24 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，请将正确选项前的字母代号填涂在答题卡相应位置上）

1. 实数 -6 的相反数是（　）

A. $-\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{6}$　　C. -6　　D. 6

【答案】D

【解析】

【分析】根据相反数　意义，相反数是只有符号不同的两个数，改变 -6 前面的符号，即可得 -6 的相反数．

【详解】解：-6 的相反数是 6．

故选：D．

【点睛】本题考查了相反数．解题的关键是掌握相反数的意义，一个数的相反数就是在这个数前面添上“−”号；一个正数的相反数是负数，一个负数的相反数是正数，0 的相反数是 0．

2. 在美术字中，有些汉字可以看成是轴对称图形．下列汉字中，是轴对称图形的是（　）

A. 我　　B. 爱　　C. 中　　D. 国

【答案】C

【解析】

【分析】根据轴对称图形的概念逐项分析判断即可，轴对称图形的概念：平面内，一个图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够完全重合的图形．

【详解】解：选项 A、B、D 均不能找到这样的一条直线，使直线两旁的部分能够完全重合的图形，所以不是轴对称图形；

选项 C 能找到这样的一条直线，使直线两旁的部分能够完全重合的图形，所以是轴对称图形；

故选：C．

【点睛】本题考查了轴对称图形的概念，轴对称图形的关键是寻找对称轴，图形两部分折叠后可重合．

3. 2023 年 4 月 26 日，第十二届江苏园艺博览会在我市隆重开幕．会场所在地园博园分为“山海韵”“丝路情”

"田园画"三大片区，共占地约 2370000 平方米．其中数据"2370000"用科学记数法可表示为（　）

A. 2.37×10^{6}　　B. 2.37×10^{5}　　C. 0.237×10^{7}　　D. 237×10^{4}

【答案】A

【解析】

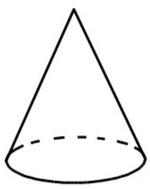
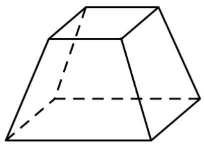
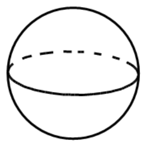
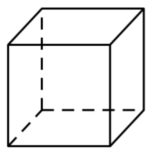
【分析】用科学记数法表示较大的数时，一般形式为 $a\times10^{n}$，其中 $1\le|a|<10$，n 为整数，据此判断即可．

【详解】解：$2370000=2.37\times10^{6}$．

故选：A．

【点睛】此题主要考查了用科学记数法表示较大的数，一般形式为 $a\times10^{n}$，其中 $1\le|a|<10$，确定 a 与 n 的值是解题的关键．

4. 下列水平放置的几何体中，主视图是圆形的是（　）

A. 　B. 　C. 　D. 

【答案】C

【解析】

【分析】分别找出从图形的正面看所得到的图形即可．

【详解】解：A．主视图是等腰三角形，故此选项不合题意；

B．主视图是梯形，故此选项不合题意；

C．主视图是圆，故此选项符合题意；

D．主视图是矩形，故此选项不合题意；

故选：C．

【点睛】此题主要考查了简单几何体的三视图，关键是掌握主视图是从几何体的正面看所得到的图形．

5. 如图，甲是由一条直径、一条弦及一段圆弧所围成的图形：乙是由两条半径与一段圆弧所围成的图形；丙是由不过圆心 O 的两条线段与一段圆弧所围成的图形，下列叙述正确的是（　）

A. 只有甲是扇形　　　　B. 只有乙是扇形　　　　C. 只有丙是扇形　　　　D. 只有乙、丙是扇形

【答案】B

【解析】

【分析】根据扇形的定义，即可求解．扇形，是圆的一部分，由两个半径和和一段弧围成．

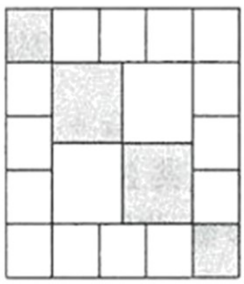
【详解】解：甲是由一条直径、一条弦及一段圆弧所围成的图形：乙是由两条半径与一段圆弧所围成的图形；丙是由不过圆心 O 的两条线段与一段圆弧所围成的图形，

只有乙　扇形，

故选：B．

【点睛】本题考查了扇形的定义，熟练掌握扇形的定义是解题的关键．

6. 如图是由 16 个相同的小正方形和 4 个相同的大正方形组成的图形，在这个图形内任取一点 P ，则点 P 落在阴影部分的概率为（　）



A. $\frac{5}{8}$　　　　B. $\frac{13}{50}$　　　　C. $\frac{13}{32}$　　　　D. $\frac{5}{16}$

【答案】B

【解析】

【分析】设小正方形的边长为 1，则大正方形的边长为 $\frac{3}{2}$ ，根据题意，分别求得阴影部分面积和总面积，根据概率公式即可求解．

【详解】解：设小正方形的边长为1，则大正方形的边长为$\frac{3}{2}$，

∴总面积为$16\times1^2+4\times\left(\frac{3}{2}\right)^2=16+9=25$，

阴影部分的面积为$2\times1^2+2\times\left(\frac{3}{2}\right)^2=2+\frac{9}{2}=\frac{13}{2}$，

∴点P落在阴影部分的概率为$\frac{\frac{13}{2}}{25}=\frac{13}{50}$，

故选：B．

【点睛】本题考查了几何概率，分别求得阴影部分的面积是解题的关键．

7. 元朝朱世杰所著的《算学启蒙》中，记载了这样一道题：良马日行二百四十里，鸡马日行一百五十里，驽马先行一十二日，问良马几何日追及之？其大意是：快马每天行240里，慢马每天行150里，驽马先行12天，快马几天可追上慢马？若设快马x天可追上慢马，由题意得（　）

A. $\frac{x}{240}=\frac{x+12}{150}$　　B. $\frac{x}{240}=\frac{x}{150}-12$

C. $240(x-12)=150x$　　D. $240x=150(x+12)$

【答案】D

【解析】

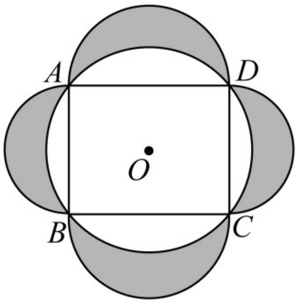
【分析】设快马x天可追上慢马，根据路程相等，列出方程即可求解．

【详解】解：设快马x天可追上慢马，由题意得$240x=150(x+12)$

故选：D．

【点睛】本题考查了一元一次方程的应用，根据题意列出方程是解题的关键．

8. 如图，矩形$ABCD$内接于$\odot O$，分别以AB、BC、CD、AD为直径向外作半圆．若$AB=4, BC=5$，则阴影部分的面积是（　）



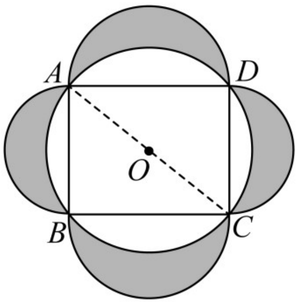
A. $\frac{41}{4}\pi - 20$　　B. $\frac{41}{2}\pi - 20$　　C. 20π　　D. 20

【答案】D

【解析】

【分析】根据阴影部分面积为 2 个直径分别为 AB, BC 的半圆的面积加上矩形的面积减去直径为矩形对角线长的圆的面积即可求解．

【详解】解：如图所示，连接 AC，



∵矩形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$，$AB = 4, BC = 5$

∴ $AC^2 = AB^2 + BC^2$

∴阴影部分的面积是 $S_{矩形ABCD} + \pi \times \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + \pi \times \left(\frac{BC}{2}\right)^2 - \pi\left(\frac{AC}{2}\right)^2$

$S_{矩形ABCD} + \pi \times \frac{1}{4}\left(AB^2 + BC^2 - AC^2\right)$

$= S_{矩形ABCD}$

$= 4 \times 5 = 20$，

故选：D．

【点睛】本题考查了勾股定理，矩形的性质，熟练掌握勾股定理是解题的关键．

二、填空题（本大题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分．不需要写出解答过程，请把答案直接填写在答题卡相应位置上）

9. 计算：$(\sqrt{5})^2$ =__________．

【答案】5

【解析】

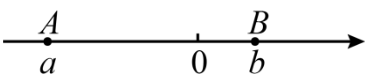
【分析】根据二次根式的性质即可求解．

【详解】解：$(\sqrt{5})^2=5$

故答案为：5．

【点睛】本题考查了二次根式的性质，熟练掌握二次根式的性质是解题的关键．

10. 如图，数轴上的点 A, B 分别对应实数 a、b，则 $a+b$ __________0.(用“＞”“＜”或“＝”填空)



【答案】$<$

【解析】

【分析】根据数轴可得 $a<0<b, |a|>|b|$，进而即可求解．

【详解】解：由数轴可得 $a<0<b, |a|>|b|$

$\therefore a+b<0$

【点睛】本题考查了实数与数轴，有理数加法的运算法则，数形结合是解题的关键．

11. 一个三角形的两边长分别是 3 和 5，则第三边长可以是__________．（只填一个即可）

【答案】4（答案不唯一，大于 2 且小于 8 之间的数均可）

【解析】

【分析】根据三角形的三边关系定理：三角形两边之和大于第三边，三角形的两边差小于第三边可得

$5-3<x<5+3$，再解即可．

【详解】解：设第三边长为x，由题意得：

$5-3<x<5+3$，

则$2<x<8$，

故答案可为：4（答案不唯一，大于2且小于8之间的数均可）．

【点睛】此题主要考查了三角形的三边关系：第三边的范围是：大于已知的两边的差，而小于两边的和．

12. 若关于x的一元二次方程$x^2-2x+k=0$有两个不相等的实数根，则k的取值范围是_________．

【答案】$k<1$

【解析】

【分析】若一元二次方程有两个不相等的实数根，则根的判别式$\Delta=b^2-4ac>0$，建立关于k的不等式，解不等式即可得出答案．

【详解】解：∵关于x的方程$x^2-2x+k=0$有两个不相等的实数根，

$\therefore\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4k>0$，

解得$k<1$．

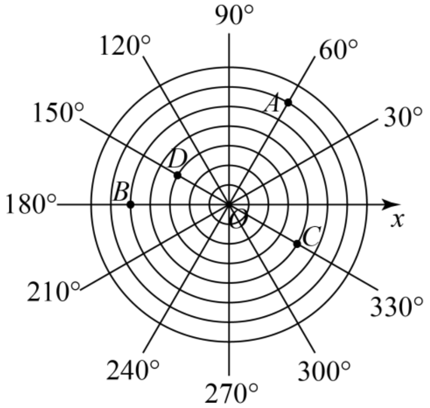
故答案为：$k<1$．

【点睛】此题考查了根的判别式．一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$的根与$\Delta=b^2-4ac$有如下关系：

（1）$\Delta>0$⇔方程有两个不相等的实数根；（2）$\Delta=0$⇔方程有两个相等的实数根；（3）$\Delta<0$⇔方程没有实数根．

13. 画一条水平数轴，以原点O为圆心，过数轴上的每一刻度点画同心圆，过原点O按逆时针方向依次画出与正半轴的角度分别为30°、60°、90°、120°、$\cdots$、330°的射线，这样就建立了“圆”坐标系．如图，在建立的

"圆"坐标系内，我们可以将点 A、B、C 的坐标分别表示为 $A\left(6,60^\circ\right)$、$B\left(5,180^\circ\right)$、$C\left(4,330^\circ\right)$，则点 D 的坐标可以表示为__________．



【答案】$\left(3,150^\circ\right)$

【解析】

【分析】根据题意，可得 D 在第三个圆上，OD 与正半轴的角度 150°，进而即可求解．

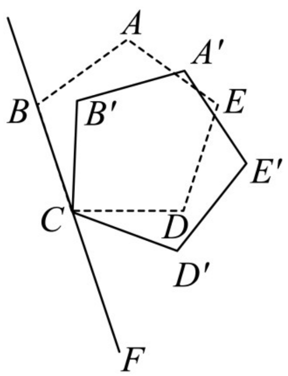
【详解】解：根据图形可得 D 在第三个圆上，OD 与正半轴的角度 150°，

∴点 D 的坐标可以表示为 $\left(3,150^\circ\right)$

故答案为：$\left(3,150^\circ\right)$．

【点睛】本题考查了有序实数对表示位置，数形结合，理解题意是解题的关键．

14. 以正五边形 $ABCDE$ 的顶点 C 为旋转中心，按顺时针方向旋转，使得新五边形 $A'B'CD'E'$ 的顶点 D¢落在直线 BC 上，则正五边 $ABCDE$ 旋转的度数至少为______°．

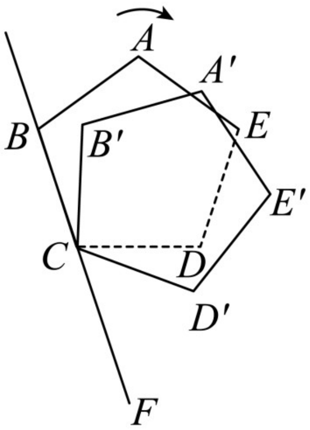


【答案】 72

【解析】

【分析】依据正五边形的外角性质，即可得到$\angle DCF$ 的度数，进而得出旋转的角度．

【详解】解：∵五边形$ABCDE$是正五边形，



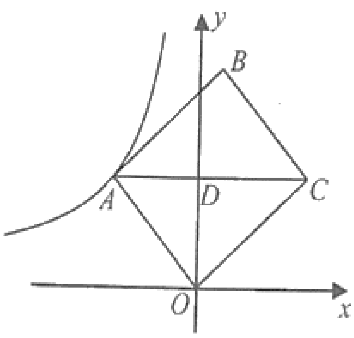
$\therefore \angle DCF=360^{\circ}\div 5=72^{\circ}$，

∴新五边形$A'B'CD'E'$的顶点D¢落在直线BC上，则旋转的最小角度是72°，

故答案为：72．

【点睛】本题主要考查了正多边形、旋转性质，关键是掌握正多边形的外角和公式的运用．

15. 如图，矩形$OABC$的顶点A在反比例函数$y=\frac{k}{x}(x<0)$的图像上，顶点B、C在第一象限，对角线$AC\parallel x$轴，交y轴于点D．若矩形$OABC$的面积是6，$\cos\angle OAC=\frac{2}{3}$，则$k=$________．



【答案】$-\frac{8}{3}$

【解析】

【分析】方法一：根据$\triangle AOC$的面积为3，得出$OC=\frac{6}{3a}=\frac{2}{a}$，$AC=\frac{9}{2}a$，在$Rt\triangle AOC$中，

$AC^2=AO^2+OC^2$，得出$a^2=\frac{4\sqrt{5}}{15}$，根据勾股定理求得$DO=\sqrt{5}a$，根据k的几何意义，即可求解．

方法二：根据已知得出$\frac{AD}{AC}=\frac{4}{9}$则$S_{\triangle AOD}=\frac{4}{9}S_{\triangle AOC}$，即可求解．

【详解】解：方法一：∵$\cos\angle OAC=\frac{2}{3}$，

∴$\cos\angle OAC=\frac{AD}{AO}=\frac{AO}{AC}=\frac{2}{3}$

设$AD=2a$，则$AO=3a$，

∴$AC=\frac{9}{2}a$

∵矩形$OABC$的面积是6，AC是对角线，

∴$\triangle AOC$的面积为3，即$\frac{1}{2}AO\times OC=3$

∴$OC=\frac{6}{3a}=\frac{2}{a}$

在$Rt\triangle AOC$中，$AC^2=AO^2+OC^2$

即$\left(\frac{9}{2}a\right)^2=(3a)^2+\left(\frac{2}{a}\right)^2$

即 $\frac{81-36}{4}a^2=\frac{4}{a^2}$

解得：$a^2=\frac{4\sqrt{5}}{15}$

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADC$ 中，$DO=\sqrt{AO^2-AD^2}=\sqrt{5}a$

∵对角线 $AC\parallel x$ 轴，则 $AD\perp OD$ ，

$\therefore |k|=2S_{\triangle AOD}=2a\times\sqrt{5}a=2\sqrt{5}a^2=2\sqrt{5}\times\frac{4\sqrt{5}}{15}=\frac{8}{3}$,

∵反比例函数图象在第二象限，

$\therefore k=-\frac{8}{3}$，

方法二：∵ $\cos\angle OAC=\frac{2}{3}$ ，

$\therefore \cos\angle OAC=\frac{AD}{AO}=\frac{AO}{AC}=\frac{2}{3}$

设 $AD=2a$ ，则 $AO=3a$ ，

$\therefore AC=\frac{9}{2}a$ ，

$\therefore \frac{AD}{AC}=\frac{2a}{\frac{9}{2}a}=\frac{4}{9}$ ，

$\therefore 2S_{\triangle AOD}=\frac{4}{9}\times 2S_{\triangle AOC}=\frac{8}{9}\times 6=\frac{8}{3}$ ，

$\because k<0$ ，

$\therefore k=-\dfrac{8}{3}$，

故答案为：$-\dfrac{8}{3}$．

【点睛】本题考查了矩形的性质，反比例函数k的几何意义，余弦的定义，熟练掌握反比例函数的性质是解题的关键．

16. 若$W=5x^2-4xy+y^2-2y+8x+3$（x、y为实数），则W的最小值为__________．

【答案】-2

【解析】

【分析】运用配方法将$W=5x^2-4xy+y^2-2y+8x+3$变形为$W=(2x-y+1)^2+(x+2)^2-2$，然后根据非负数的性质求出W的最小值即可．

【详解】解：$W=5x^2-4xy+y^2-2y+8x+3$

$=4x^2-4xy+y^2+4x-2y+1+x^2+4x+4-2$

$=(2x-y)^2+2(2x-y)+1+(x+2)^2-2$

$=(2x-y+1)^2+(x+2)^2-2$

$\because x$、y为实数，

$\therefore (2x-y+1)^2\geq 0,(x+2)\geq 0,$

$\therefore W$的最小值为-2，

故答案为：-2．

【点睛】本题主要考查了配方法的应用，非负数的性质，解题时注意配方的步骤，注意在变形的过程 中不要改变式子的值．

三、解答题（本大题共11小题，共102分．请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤，作图过程需保留作图痕迹）

17. 计算$\left|-4\right|+\left(\pi-\sqrt{2}\right)^{0}-\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$．

【答案】3

【解析】

【分析】根据化简绝对值，零指数幂以及负整数指数幂进行计算即可求解．

【详解】解：原式$=4+1-2=3$．

【点睛】本题考查了实数的混合运算，熟练掌握化简绝对值，零指数幂以及负整数指数幂是解题的关键．

18. 解方程组$\begin{cases}3x+y=8\\2x-y=7\end{cases}$

【答案】$\begin{cases}x=3\\y=-1\end{cases}$

【解析】

【分析】方程组运用加减消元法求解即可．

【详解】解：$\begin{cases}3x+y=8①\\2x-y=7②\end{cases}$

①+②得$5x=15$，

解得$x=3$，

将$x=3$代入①得$3\times3+y=8$，

解得$y=-1$．

∴原方程组的解为$\begin{cases}x=3,\\y=-1.\end{cases}$

【点睛】本题主要考查了解二元一次方程组，方法主要有：代入消元法和加减消元法．

19. 解方程：$\frac{2x-5}{x-2}=\frac{3x-3}{x-2}-3$.

【答案】$x=4$

【解析】

【分析】方程两边同时乘以$x-2$，再解整式方程得$x=4$，经检验$x=4$是原方程的根．

【详解】解：方程两边同时乘以$x-2$得，

$2x-5=3x-3-3(x-2)$，

解得：$x=4$

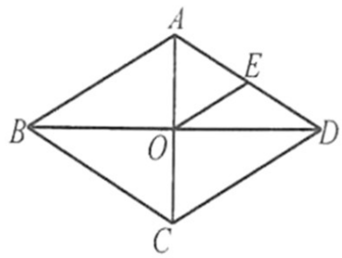
检验：当$x=4$时，$x-2\neq 0$，

$\therefore x=4$是原方程的解，

∴原方程的解为$x=4$．

【点睛】本题考查了解分式方程，熟练掌握分式方程的解法，切勿遗漏对根的检验是解题的关键．

20. 如图，菱形$ABCD$的对角线AC、BD相交于点O, E为AD的中点，$AC=4$，$OE=2$．求OD的长及$\tan\angle EDO$的值．



【答案】$OD=2\sqrt{3}$，$\tan\angle EDO=\frac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【分析】根据菱形的性质得出$AC\perp BD, AC=2AO$，$\mathrm{Rt}\triangle AOD$中，勾股定理求得OD的长，根据正切的定义即可求解．

【详解】在菱形$ABCD$中，$AC\perp BD, AC=2AO$．

$\because AC=4$，$\therefore AO=2$．

在$\mathrm{Rt}\triangle AOD$中，$\because E$为AD中点，

$\therefore OE=\dfrac{1}{2}AD$．

$\because OE=2$．

$\therefore AD=4$．

$\therefore OD=\sqrt{AD^2-AO^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$．

$\therefore \tan\angle EDO=\dfrac{AO}{OD}=\dfrac{2}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．

【点睛】本题考查了菱形的性质，勾股定理，求正切，熟练掌握以上知识是解题的关键．

21. 为了解本校八年级学生的暑期课外阅读情况，某数学兴趣小组抽取了 50 名学生进行问卷调查．

（1）下面的抽取方法中，应该选择（　）

A.从八年级随机抽取一个班的 50 名学生

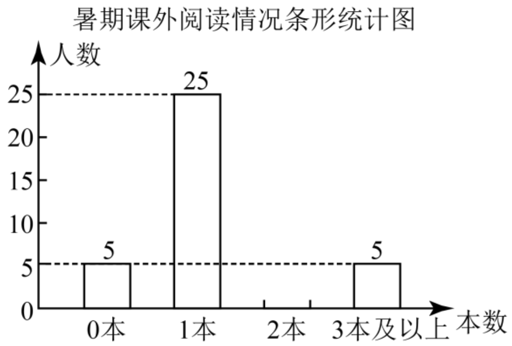
B.从八年级女生中随机抽取 50 名学生

C.从八年级所有学生中随机抽取 50 名学生

（2）对调查数据进行整理，得到下列两幅尚不完整的统计图表：

暑期课外阅读情况统计表

阅读数量（本）	人数
0	5
1	25
2	a
3 本及以上	5
合计	50



统计表中的$a=$__________，补全条形统计图；

（3）若八年级共有 800 名学生，估计八年级学生暑期课外阅读数量达到 2 本及以上的学生人数；

（4）根据上述调查情况，写一条你的看法．

【答案】（1）C　（2）15；见解析

（3）320 人　（4）答案不唯一，见解析

【解析】

【分析】（1）根据所抽取的样本必须具有广泛性和代表性，即可解答；

（2）用样本容量减去总计量为 0 本，1 本以及 3 本及以上的人数可得 a 的值，再补全条形统计图即可；

（3）用 800 乘以样本中暑期课外阅读数量达到 2 本及以上所占百分比即可得出结论；

（4）根据统计表的数据提出建议即可．

【小问 1 详解】

为了解本校八年级学生的暑期课外阅读情况，应该选择从八年级所有学生中随机抽取 50 名学生，这样抽取的样本具有广泛性和代表性，

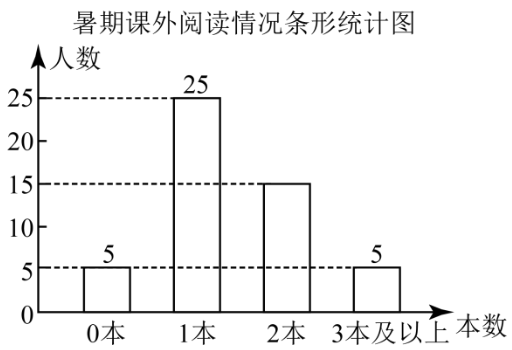
故选：C；

【小问 2 详解】

$a=50-5-25-5=15$；

故答案为：15；

补全条形统计图如图所示：



【小问 3 详解】

$800\times\frac{15+5}{50}=320$（人）

答：八年级学生暑期课外阅读数量达到2本及以上的学生约为320人．

【小问4详解】

本次调查大部分同学一周暑期课外阅读数量达不到3本，建议同学们多阅读，培养热爱读书的良好习惯（答案不唯一）．

【点睛】本题考查了抽样调查的可靠性，频数分布表以及条形统计图，熟练掌握条形统计图是解题的关键．

22. 如图，有4张分别印有Q版西游图案的卡片：A唐僧、B孙悟空、C猪八戒、D沙悟净．

现将这4张卡片（卡片的形状、大小、质地都相同）放在不透明的盒子中，搅匀后从中任意取出1张卡片

记录后放回、搅匀，再从中任意取出1张卡片求下列事件发生的概率：

（1）第一次取出的卡片图案为“B孙悟空”的概率为__________；

（2）用画树状图或列表的方法，求两次取出的2张卡片中至少有1张图案为“A唐僧”的概率．

【答案】（1）$\frac{1}{4}$

（2）$\frac{7}{16}$

【解析】

【分析】（1）根据概率公式即可求解；

（2）根据题意，画出树状图，进而根据概率公式即可求解．

【小问1详解】

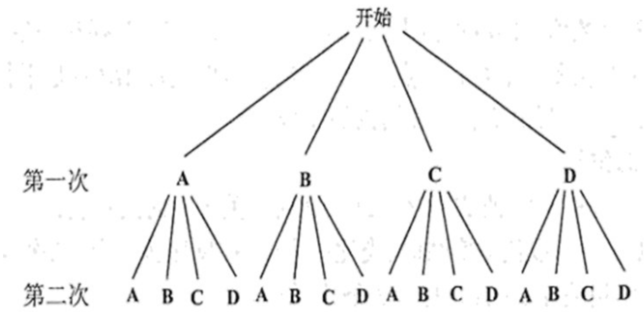
解：共有4张卡片，

第一次取出的卡片图案为“B孙悟空”的概率为$\frac{1}{4}$

故答案为：$\frac{1}{4}$．

【小问2详解】

树状图如图所示：



由图可以看出一共有16种等可能结果，其中至少一张卡片图案为“A唐僧”的结果有7种．

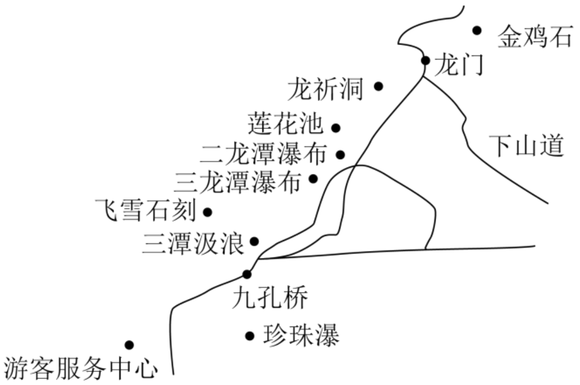
∴P(至少一张卡片图案为“A唐僧”)$=\frac{7}{16}$．

答：两次取出的2张卡片中至少有一张图案为“A唐僧”的概率为$\frac{7}{16}$．

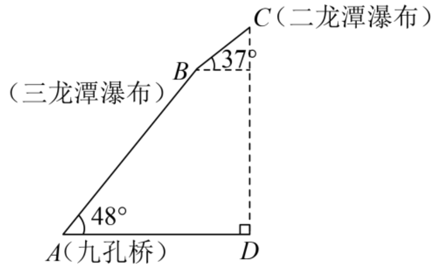
【点睛】本题考查了概率公式求概率，画树状图法求概率，熟练掌握求概率的方法是解题的关键．

23. 渔湾是国家“$AAAA$”级风景区，图1是景区游览的部分示意图．如图2，小卓从九孔桥A处出发，沿着坡角为48°的山坡向上走了$92\mathrm{m}$到达B处的三龙潭瀑布，再沿坡角为37°的山坡向上走了$30\mathrm{m}$到达C处的二龙潭瀑布．求小卓从A处的九孔桥到C处的二龙潭瀑布上升的高度DC为多少米？(结果精确到$0.1\mathrm{m}$)

（参考数据：$\sin48^{\circ}\approx0.74$，$\cos48^{\circ}\approx0.67$，$\sin37^{\circ}\approx0.60$，$\cos37^{\circ}\approx0.80$）



（图1）



（图2）

【答案】86.1m

【解析】

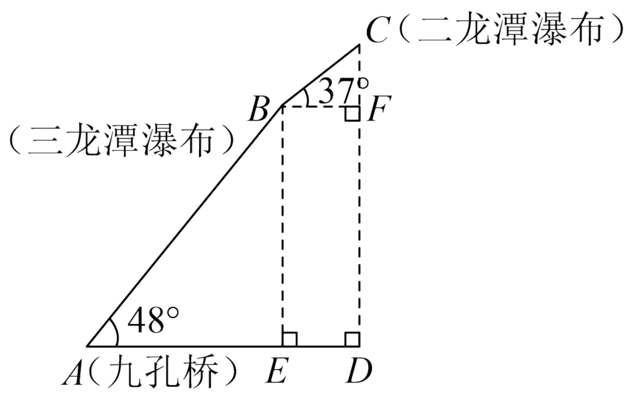
【分析】过点B作$BE\perp AD$，垂足为E，在Rt△ABE中，根据$\sin\angle BAE=\frac{BE}{AB}$求出$BE$，过点$B$作$BF\perp CD$，垂足为$F$，在Rt△$CBF$中，根据$\sin\angle CBF=\frac{CF}{BC}$求出$CF$，进而求解即可．

【详解】过点B作$BE\perp AD$，垂足为E．

在Rt△ABE中，$\sin\angle BAE=\frac{BE}{AB}$，

$\therefore BE=AB\sin\angle BAE=92\sin 48^{\circ}\approx 92\times 0.74=68.08\text{m}$．

过点B作$BF\perp CD$，垂足为F．



在$\mathrm{Rt}\triangle CBF$中，$\sin\angle CBF=\dfrac{CF}{BC}$，

$\therefore CF=BC\sin\angle CBF=30\sin37^{\circ}\approx30\times0.60=18.00\mathrm{m}$．

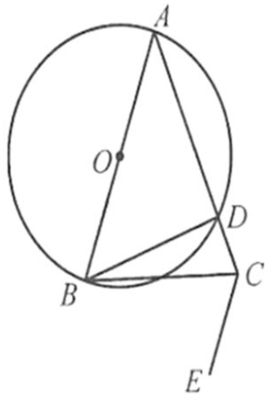
$\because FD=BE=68.08\mathrm{m}$，

$\therefore DC=FD+CF=68.08+18.00=86.08\approx86.1\mathrm{m}$．

答：从A处的九孔桥到C处的二龙潭瀑布上升的高度DC约为$86.1\mathrm{m}$．

【点睛】此题考查了解直角三角形的应用一坡度坡角问题，熟练利用锐角三角函数关系是解题关键．

24. 如图，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，以AB为直径的$\odot O$交边AC于点D，连接BD，过点C作$CE\parallel AB$．



（1）请用无刻度的直尺和圆规作图：过点B作$\odot O$的切线，交CE于点F；（不写作法，保留作图痕迹，标明字母）

（2）在（1）的条件下，求证：$BD=BF$．

【答案】（1）见解析　（2）见解析

【解析】

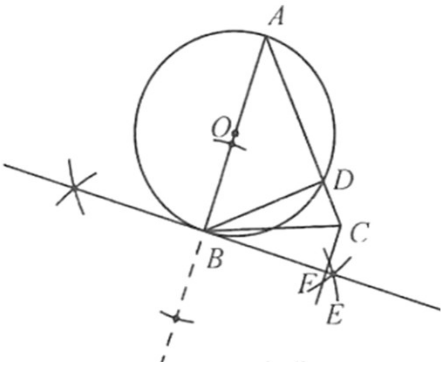
【分析】（1）根据尺规作图，过点B作AB的垂线，交CE于点F，即可求解；

（2）根据题意切线的性质以及直径所对的圆周角是直角，证明$\angle BDC=\angle BFC$，根据平行线的性质以及

等腰三角形的性质得出 $BCD=\angle BCF$ ，进而证明 $\triangle BCD\cong\triangle BCF(\text{AAS})$ ，即可得证．

【小问 1 详解】

解：方法不唯一，如图所示．



【小问 2 详解】

$\because AB=AC$ ，

$\therefore\angle ABC=\angle ACB$ ．

又 $\because CE\parallel AB$ ，

$\therefore\angle ABC=\angle BCF$ ，

$\therefore\angle BCF=\angle ACB$ ．

$\because$ 点 D 在以 AB 为直径的圆上，

$\therefore\angle ADB=90^{\circ}$ ，

$\therefore\angle BDC=90^{\circ}$ ．

又 $\because BF$ 为 $\odot O$ 的切线，

$\therefore\angle ABF=90^{\circ}$ ．

$\because CE\parallel AB$ ，

$\therefore\angle BFC+\angle ABF=180^{\circ}$ ，

$\therefore \angle BFC = 90^\circ$，

$\therefore \angle BDC = \angle BFC$．

∵在$\triangle BCD$和$\triangle BCF$中，

$$\begin{cases} \angle BCD = \angle BCF, \\ \angle BDC = \angle BFC, \\ BC = BC, \end{cases}$$

$\therefore \triangle BCD \cong \triangle BCF(\mathrm{AAS})$．

$\therefore BD = BF$．

【点睛】本题考查了作圆的切线，切线的性质，直径所对的圆周角是直角，全等三角形的性质与判定，熟练掌握以上知识是解题的关键．

25. 目前，我市对市区居民用气户的燃气收费，以户为基础、年为计算周期设定了如下表的三个气量阶梯：

阶梯	年用气量	销售价格	备注
第一阶梯	$0 \sim 400\mathrm{m}^3$（含 400）的部分	2.67 元$/\mathrm{m}^3$	若家庭人口超过 4 人的，每增加 1 人，第一、二阶梯年用气量的上限分别增加$100\mathrm{m}^3$、$200\mathrm{m}^3$．
第二阶梯	$400 \sim 1200\mathrm{m}^3$（含 1200）的部分	3.15 元$/\mathrm{m}^3$	
第三阶梯	$1200\mathrm{m}^3$以上的部分	3.63 元$/\mathrm{m}^3$	

（1）一户家庭人口为 3 人，年用气量为$200\mathrm{m}^3$，则该年此户需缴纳燃气费用为__________元；

（2）一户家庭人口不超过 4 人，年用气量为$x\mathrm{m}^3(x > 1200)$，该年此户需缴纳燃气费用为y元，求y与x

函数表达式；

（3）甲户家庭人口为3人，乙户家庭人口为5人，某年甲户、乙户缴纳的燃气费用均为3855元，求该年乙户比甲户多用多少立方米的燃气？（结果精确到$1m^3$）

【答案】（1）534　（2）$y=3.63x-768(x>1200)$

（3）26立方米

【解析】

【分析】（1）根据第一阶梯的费用计算方法进行计算即可；

（2）根据"单价×数量=总价"可得y与x之间的函数关系式；

（3）根据两户的缴费判断收费标准列式计算即可解答．

【小问1详解】

$\because 200m^3<400m^3$，

$\therefore$该年此户需缴纳燃气费用为：$2.67\times 200=534$（元），

故答案为：534；

【小问2详解】

y关于x的表达式为$y=400\times 2.67+(1200-400)\times 3.15+3.63(x-1200)=3.63x-768(x>1200)$

【小问3详解】

$\because 400\times 2.67+(1200-400)\times 3.15=3588<3855$，

$\therefore$甲户该年的用气量达到了第三阶梯．

由（2）知，当$y=3855$时，$3.63x-768=3855$，解得$x\approx 1273.6$．

又$\because 2.67\times(100+400)+3.15\times(1200+200-500)=4170>3855$，

且$2.67\times(100+400)=1335<3855$，

$\therefore$乙户该年的用气量达到第二阶梯，但末达到第三阶梯．

设乙户年用气量　am^3．则有$2.67\times 500+3.15(a-500)=3855$，

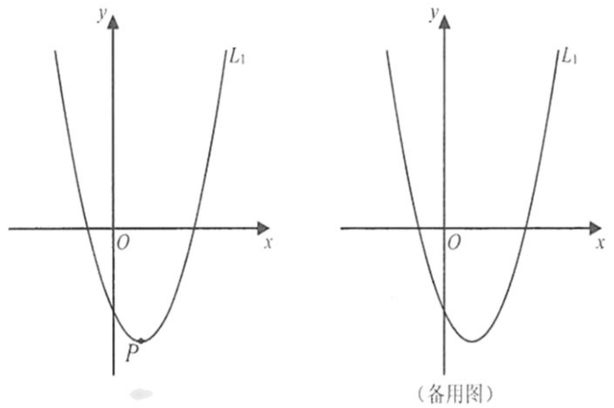
解得 $a=1300.0$，

$\therefore 1300.0-1273.6=26.4\approx 26\text{m}^3$．

答：该年乙户比甲户多用约26立方米的燃气．

【点睛】本题考查了一次函数的应用，一元一次方程的应用以及列代数式，解题的关键是找准等量关系，正确列出一元一次方程．

26. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $L_1: y=x^2-2x-3$ 的顶点为 P．直线 l 过点 $M(0,m)(m\geq -3)$，且平行于 x 轴，与抛物线 L_1 交于 A,B 两点（B 在A的右侧）．将抛物线 L_1 沿直线 l 翻折得到抛物线 L_2，抛物线 L_2 交 y 轴于点 C，顶点为 D．



（1）当 $m=1$ 时，求点 D 的坐标；

（2）连接 BC、CD、DB，若 $\triangle BCD$ 为直角三角形，求此时 L_2 所对应的函数表达式；

（3）在（2）的条件下，若 $\triangle BCD$ 的面积为 3，E、F 两点分别在边 BC、CD 上运动，且 $EF=CD$，以 EF 为一边作正方形 $EFGH$，连接 CG，写出 CG 长度的最小值，并简要说明理由．

【答案】（1）$D(1,6)$

（2）$y=-x^2+2x+3$ 或 $y=-x^2+2x-3$

（3）$\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}$，见解析

【解析】

【分析】（1）将抛物线解析式化为顶点式，进而得出顶点坐标$P(1,-4)$，根据对称性，即可求解．

（2）由题意得，L_1的顶点$P(1,-4)$与L_2的顶点D关于直线$y=m$对称，$D(1,2m+4)$，则抛物线$L_2: y=-(x-1)^2+(2m+4)=-x^2+2x+2m+3$．进而得出可得$C(0,2m+3)$，①当$\angle BCD=90^{\circ}$时，如图1，过$D$作$DN\perp y$轴，垂足为$N$．求得$B(m+3,m)$，代入解析式得出$m=0$，求得$L_2: y=-x^2+2x+3$．②当$\angle BDC=90^{\circ}$时，如图2，过$B$作$BT\perp ND$，交$ND$的延长线于点$T$．同理可得$BT=DT$，得出$B(m+5,m)$，代入解析式得出$m=-3$代入$L_2: y=-x^2+2x+2m+3$，得$L_2: y=-x^2+2x-3$；③当$\angle DBC=90^{\circ}$时，此情况不存在．

（3）由（2）知，当$\angle BDC=90^{\circ}$时，$m=-3$，此时$\triangle BCD$的面积为1，不合题意舍去．当$\angle BCD=90^{\circ}$时，$m=0$，此时$\triangle BCD$的面积为3，符合题意．由题意可求得$EF=FG=CD=\sqrt{2}$．

取EF的中点Q，在$Rt\triangle CEF$中可求得$CQ=\frac{1}{2}EF=\frac{\sqrt{2}}{2}$．在$Rt\triangle FGQ$中可求得$GQ=\frac{\sqrt{10}}{2}$．易知当$Q,C,G$三点共线时，$CG$取最小值，最小值为$\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}$．

小问1详解】

$\because y=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$，

∴抛物线 L_1 的顶点坐标 $P(1,-4)$.

∵$m=1$，点 P 和点 D 关于直线 $y=1$ 对称 .

∴$D(1,6)$.

【小问2详解】

由题意得，L_1 的顶点 $P(1,-4)$ 与 L_2 的顶点 D 关于直线 $y=m$ 对称，

∴$D(1,2m+4)$，抛物线 $L_2: y=-(x-1)^2+(2m+4)=-x^2+2x+2m+3$.

∴当 $x=0$ 时，可得 $C(0,2m+3)$.

① 当 $\angle BCD=90^\circ$ 时，如图1，过 D 作 $DN\perp y$ 轴，垂足为 N .

∵$D(1,2m+4)$，

∴$N(0,2m+4)$.

∵$C(0,2m+3)$

∴$DN=NC=1$.

∴$\angle DCN=45^\circ$.

∵$\angle BCD=90^\circ$，

∴$\angle BCM=45^\circ$.

∵直线 $l\parallel x$ 轴，

∴$\angle BMC=90^\circ$.

∴$\angle CBM=\angle BCM=45^\circ, BM=CM$.

∵$m\geq-3$，

$\therefore BM = CM = (2m+3) - m = m+3$.

$\therefore B(m+3, m)$.

又$\because$点B在$y=x^2-2x-3$图像上，

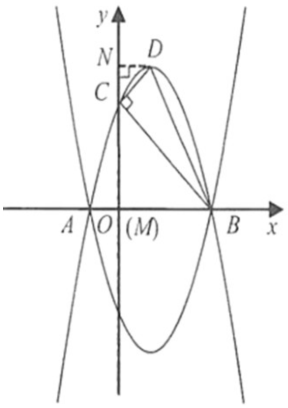
$\therefore m = (m+3)^2 - 2(m+3) - 3$.

解得$m=0$或$m=-3$.

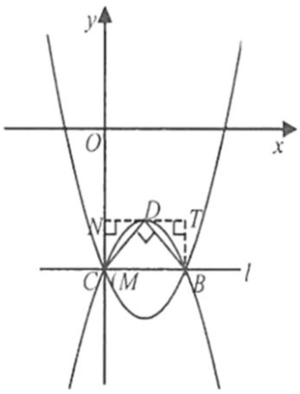
$\because$当$m=-3$时，可得$B(0,-3), C(0,-3)$，此时B、C重合，舍去．当$m=0$时，符合题意．

将$m=0$代入$L_2: y=-x^2+2x+2m+3$ ，

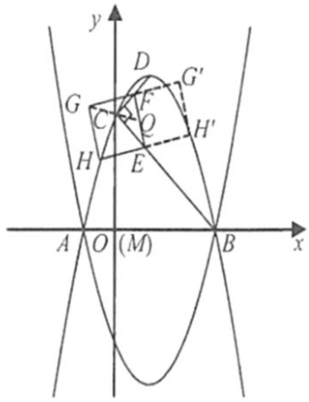
得$L_2: y=-x^2+2x+3$.



（第 26 题答案图 1）



（第 26 题答案图 2）



（第 26 题答案图 3）

② 当$\angle BDC=90^\circ$ 时，如图 2，过B作$BT \perp ND$，交ND的延长线于点T .

同理可得$BT = DT$.

$\because D(1, 2m+4)$，

$\therefore DT = BT = (2m+4) - m = m+4$.

$\because DN = 1$ ，

$\therefore NT = DN + DT = 1 + (m+4) = m+5$.

$\therefore B(m+5, m)$.

又$\because$点B在$y=x^2-2x-3$图像上，

$\therefore m = (m+5)^2 - 2(m+5) - 3$.解得$m=-3$或$m=-4$.

$\because m \geq -3$ ，

$\therefore m=-3$.此时$B(2,-3), C(0,-3)$符合题意．

将$m=-3$代入$L_2: y=-x^2+2x+2m+3$ ，得$L_2: y=-x^2+2x-3$ ．

③当$\angle DBC = 90^\circ$ 时，此情况不存在．

综上，L_2所对应的函数表达式为$y=-x^2+2x+3$或$y=-x^2+2x-3$ ．

【小问3详解】

如图3，由（2）知，当$\angle BDC=90^\circ$ 时，$m=-3$ ，

此时$B(2,-3), C(0,-3)$

则$BC=2$ ，$CD=BD=\sqrt{2}$ ，则$\triangle BCD$的面积为1，不合题意舍去．

当$\angle BCD=90^\circ$ 时，$m=0$ ，

则$B(3,0), C(0,3)$ ，

$\therefore BC=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$ ，此时$\triangle BCD$的面积为3，符合题意

$\therefore CD=\sqrt{2}$ ．

依题意，四边形$EFGH$是正方形，

$\therefore EF=FG=CD=\sqrt{2}$ ．

取EF的中点Q，在$\mathrm{Rt}\triangle CEF$中可求得$CQ=\frac{1}{2}EF=\frac{\sqrt{2}}{2}$．

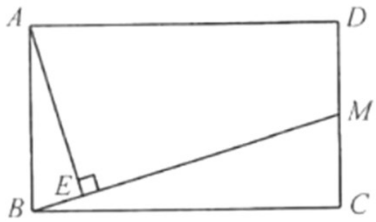
在$\mathrm{Rt}\triangle FGQ$中可求得$GQ=\sqrt{FG^2+FQ^2}=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$．

∴当Q,C,G三点共线时，CG取最小值，最小值为$\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}$．

【点睛】本题考查了二次函数的性质，特殊三角形问题，正方形的性质，勾股定理，面积问题，分类讨论是解题的关键．

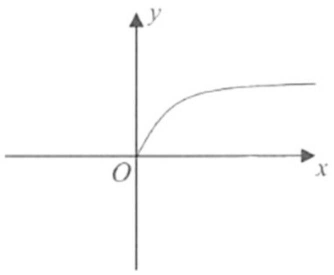
27.【问题情境 建构函数】

（1）如图1，在矩形$ABCD$中，$AB=4, M$是CD的中点，$AE\perp BM$，垂足为E．设$BC=x, AE=y$，试用含x的代数式表示y．



【由数想形 新知初探】

（2）在上述表达式中，y与x成函数关系，其图像如图2所示．若x取任意实数，此时的函数图像是否具有对称性？若有，请说明理由，并在图2上补全函数图像．



【数形结合 深度探究】

（3）在“x取任意实数”的条件下，对上述函数继续探究，得出以下结论：①函数值y随x的增大而增大；②函数值y的取值范围是$-4\sqrt{2}<y<4\sqrt{2}$；③存在一条直线与该函数图像有四个交点；④在图像上存在

四点 A、B、C、D，使得四边形 $ABCD$ 是平行四边形．其中正确的是__________．（写出所有正确结论的序号）

【抽象回归 拓展总结】

（4）若将（1）中的"$AB=4$"改成"$AB=2k$"，此时 y 关于 x 的函数表达式是__________；一般地，当 $k\neq 0, x$ 取任意实数时，类比一次函数、反比例函数、二次函数的研究过程，探究此类函数的相关性质（直接写出 3 条即可）．

【答案】（1）$y=\dfrac{4x\sqrt{x^2+4}}{x^2+4}(x>0)$；（2）$x$ 取任意实数时，对应的函数图像关于原点成中心对称，见解析；（3）①④；（4）$y=\dfrac{2kx\sqrt{x^2+k^2}}{x^2+k^2}(x>0,k>0)$，见解析

【解析】

【分析】（1）证明 $\mathrm{Rt}\triangle ABE\backsim\mathrm{Rt}\triangle BMC$，得出 $\dfrac{AB}{BM}=\dfrac{AE}{BC}$，进而勾股定理求得 BM，即 $\dfrac{4}{\sqrt{x^2+4}}=\dfrac{y}{x}$，整理后即可得出函数关系式；

（2）若 $P(a,b)$ 为图像上任意一点，则 $b=\dfrac{4a\sqrt{a^2+4}}{a^2+4}$．设 $P(a,b)$ 关于原点的对称点为 Q，则 $Q(-a,-b)$．当 $x=-a$ 时，可求得 $y=-b$．则 $Q(-a,-b)$ 也在 $y=\dfrac{4x\sqrt{x^2+4}}{x^2+4}$ 的图像上，即可得证，根据中心对称的性质补全函数图象即可求解；

（3）根据函数图象，以及中心对称的性质，逐项分析判断即可求解；

（4）将（1）中的 4 换成 $2k$，即可求解；根据（2）的图象探究此类函数的相关性质，即可求解．

【详解】（1）在矩形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=\angle BCM=90^{\circ}$，

$\therefore\angle ABE+\angle MBC=90^{\circ}$．

$\because AE \perp BM$，

$\therefore \angle AEB = 90^\circ$，

$\therefore \angle BAE + \angle ABE = 90^\circ$．

$\therefore \angle AEB = \angle BCM, \angle MBC = \angle BAE$．

$\therefore \text{Rt}\triangle ABE \backsim \text{Rt}\triangle BMC$，$\therefore \frac{AB}{BM} = \frac{AE}{BC}$．

$\because AB = 4$，点M是CD的中点，$\therefore CM = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}AB = 2$．

在$\text{Rt}\triangle BMC$中，$BM = \sqrt{BC^2 + CM^2} = \sqrt{x^2 + 2^2} = \sqrt{x^2 + 4}$，

$\therefore \frac{4}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{y}{x}$．$\therefore y = \frac{4x}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{4x\sqrt{x^2+4}}{x^2+4}$．

$\therefore y$关于x的表达式为：$y = \frac{4x\sqrt{x^2+4}}{x^2+4}(x > 0)$．

（2）x取任意实数时，对应的函数图像关于原点成中心对称．

理由如下：

若$P(a,b)$为图像上任意一点，则$b = \frac{4a\sqrt{a^2+4}}{a^2+4}$．

设$P(a,b)$关于原点的对称点为Q，则$Q(-a,-b)$．

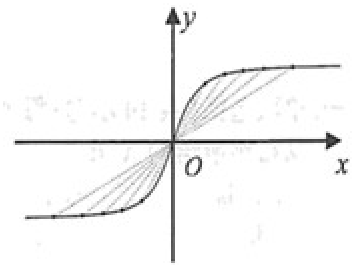
当$x = -a$时，

$y = \frac{4(-a)\sqrt{(-a)^2+4}}{(-a)^2+4} = -\frac{4a\sqrt{a^2+4}}{a^2+4} = -b$．

$\therefore Q(-a,-b)$也在$y = \frac{4x\sqrt{x^2+4}}{x^2+4}$的图像上．

∴当 x 取任意实数时，$y=\dfrac{4x\sqrt{x^2+4}}{x^2+4}$ 的图像关于原点对称．

函数图像如图所示．



（3）根据函数图象可得①函数值 y 随 x 的增大而增大，故①正确，

② 由(1)可得函数值 $|y|<AB$ ，故函数值的范围为 $-4<y<4$ ，故②错误；

③ 根据中心对称的性质，不存在一条直线与该函数图像有四个交点，故③错误；

④ 因为平行四边形是中心对称图形，则在图像上存在四点 A、B、C、D ，使得四边形 $ABCD$ 是平行四边形，故④正确；

故答案为：①④．

（4） y 关于 x 的函数表达式为 $y=\dfrac{2kx\sqrt{x^2+k^2}}{x^2+k^2}(x>0,k>0)$ ；

当 $k\neq0,x$ 取任意实数时，有如下相关性质：

当 $k>0$ 时，图像经过第一、三象限，函数值 y 随 x 的增大而增大，y 的取值范围为 $-2k<y<2k$ ；

当 $k<0$ 时，图像经过第二、四象限，函数值 y 随 x 的增大而减小，y 的取值范围为 $2k<y<-2k$ ；

函数图像经过原点；

函数图像关于原点对称；

【点睛】本题考查了相似三角形的性质，中心对称的性质，根据函数图象获取信息，根据题意求得解析式是解题的关键．