2023年湘潭市初中学业水平考试

数学试题卷

考试时量：120分钟　满分：120分

考生注意：

本试卷分试题卷和答题卡两部分，全卷共四道大题，26道小题．请考生将解答过程全部填

（涂）写在答题卡上，写在试题卷上无效，考试结束后，将试题卷和答题卡一并上交．

一、选择题（本大题共8个小题，每小题3分，共24分．在每小题给出的4个选项中，只有

一项符合题目要求，请将正确答案的选项代号涂在答题卡相应的位置上）

1. 中国的汉字既象形又表意，不但其形美观，而且寓意深刻，观察下列汉字，其中是轴对称图形的是（　　）

A. 爱　　B. 我　　C. 中　　D. 华

【答案】C

【解析】

【分析】根据轴对称图形的定义逐项判断即可．

【详解】解：将选项A，B，D中的汉字沿某直线折叠后不能与本身重合，所以不符合题意；

将图C中的汉字沿过中心的竖直方向的直线折叠直线两旁的部分能够重合，所以符合题意．

故选：C．

【点睛】本题主要考查了轴对称图形的判断，掌握定义是解题的关键．即将一个图形沿某直线折叠，直线两旁的部分能够重合，这样的图形是轴对称图形．

2. 若代数式$\sqrt{x-1}$在实数范围内有意义，则x的取值范围是$(\quad)$

A. $x<1$　　B. $x\le1$　　C. $x>1$　　D. $x\ge1$

【答案】D

【解析】

【分析】根据二次根式有意义的条件列出关于x的不等式，求出x的取值范围即可．

【详解】解：由题意得，$x-1\geq 0$，

解得 $x\geq 1$．

故选：D．

【点睛】本题主要考查二次根式有意义的条件，解题的关键是掌握要使二次根式有意义，其被开方数应为非负数．

3. 下列计算正确的是（　）

A. $a^8\div a^2=a^4$　　B. $a+a^2=a^3$　　C. $\left(a^2\right)^3=a^5$　　D. $a^2\cdot a^3=a^5$

【答案】D

【解析】

【分析】根据同底数幂的乘法，同底数幂的除法，幂的乘方，合并同类项，逐项分析判断即可求解．

【详解】解：A. $a^8\div a^2=a^6$，故该选项不正确，不符合题意；

B. $a+a^2\neq a^3$，故该选项不正确，不符合题意；

C. $\left(a^2\right)^3=a^6$，故该选项不正确，不符合题意；

D. $a^2\cdot a^3=a^5$，故该选项正确，符合题意；

故选：D．

【点睛】本题考查了同底数幂的乘法，同底数幂的除法，幂的乘方，合并同类项，熟练掌握以上运算法则是解题的关键．

4. 某校组织青年教师教学竞赛活动，包含教学设计和现场教学展示两个方面．其中教学设计占 20%，现场展示占 80%．某参赛教师的教学设计 90 分，现场展示 95 分，则她的最后得分为（　）

A. 95 分　　B. 94 分　　C. 92.5 分　　D. 91 分

【答案】B

【解析】

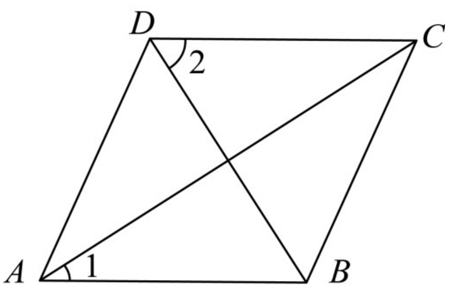
【分析】根据加权平均数进行计算即可求解．

【详解】解：依题意，她的最后得分为 $90\times 20\%+95\times 80\%=94$ 分，

故选：B．

【点睛】本题考查了加权平均数，熟练掌握加权平均数的求法是解题的关键．

5. 如图，菱形$ABCD$中，连接AC，BD，若$\angle 1=20^{\circ}$，则$\angle 2$的度数为（　）



A. 20°　　B. 60°　　C. 70°　　D. 80°

【答案】C

【解析】

【分析】根据菱形的性质可得$BD\perp AC, AB\parallel CD$，则$\angle 1=\angle ACD, \angle ACD+\angle 2=90^{\circ}$，进而即可求解．

【详解】解：∵四边形$ABCD$是菱形

∴$BD\perp AC, AB\parallel CD$，

∴$\angle 1=\angle ACD, \angle ACD+\angle 2=90^{\circ}$，

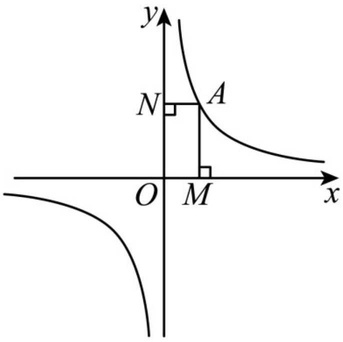
∵$\angle 1=20^{\circ}$，

∴$\angle 2=90^{\circ}-20^{\circ}=70^{\circ}$，

故选：C．

【点睛】本题考查了菱形的性质，熟练掌握是菱形的性质解题的关键．

6. 如图，平面直角坐标系中，O是坐标原点，点A是反比例函数$y=\frac{k}{x}(k\neq 0)$图像上的一点，过点A分别作$AM\perp x$轴于点M，$AN\perp y$轴于直N，若四边形$AMON$的面积为2．则k的值是（　）



A. 2　　B. -2　　C. 1　　D. -1

【答案】A

【解析】

【分析】证明四边形 $ANOM$ 是矩形，根据反比例函数的 k 值的几何意义，即可解答．

【详解】解：$\because AM \perp x$ 轴于点 M，$AN \perp y$ 轴于直 N，$\angle MON = 90^\circ$，

$\therefore$ 四边形 $AMON$ 是矩形，

$\because$ 四边形 $AMON$ 的面积为 2，

$\therefore |k| = 2$，

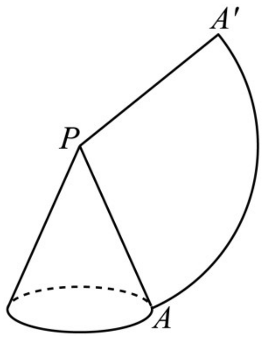
$\because$ 反比例函数在第一、三象限，

$\therefore k = 2$，

故选：A．

【点睛】本题考查了矩形的判定，反比例函数的 k 值的几何意义，熟知在一个反比例函数图像上任取一点，过点分别作 x 轴，y 轴的垂线段，与坐标轴围成的矩形面积为 $|k|$ 是解题的关键．

7. 如图，圆锥底面圆的半径为 4，则这个圆锥的侧面展开图中 $\overset{\frown}{AA'}$ 的长为（　）



A. 4π　　B. 6π　　C. 8π　　D. 16π

【答案】C

【解析】

【分析】根据底面周长等于$\overset{\frown}{AA'}$的长，即可求解．

【详解】解：依题意，$\overset{\frown}{AA'}$的长$=2\pi\times4=8\pi$，

故选：C．

【点睛】本题考查了圆锥的侧面展开图的弧长，熟练掌握圆锥底面周长等于$\overset{\frown}{AA'}$的长是解题的关键．

8. 某校组织九年级学生赴韶山开展研学活动，已知学校离韶山50千米，师生乘大巴车前往，某老师因有事情，推迟了10分钟出发，自驾小车以大巴车速度的1.2倍前往，结果同时到达．设大巴车的平均速度为x千米/时，则可列方程为（　）

A. $\frac{50}{x}=\frac{50}{1.2x}+\frac{1}{6}$　　B. $\frac{50}{x}+10=\frac{50}{1.2x}$　　C. $\frac{50}{x}=\frac{50}{1.2x}+10$　　D. $\frac{50}{x}+\frac{1}{6}=\frac{50}{1.2x}$

【答案】A

【解析】

【分析】设大巴车的平均速度为x千米/时，则老师自驾小车的平均速度为$1.2x$千米/时，根据时间的等量关系列出方程即可．

【详解】解：设大巴车的平均速度为x千米/时，则老师自驾小车的平均速度为$1.2x$千米/时，

根据题意列方程：$\frac{50}{x}=\frac{50}{1.2x}+\frac{1}{6}$，

故答案为：A．

【点睛】本题考查了分式方程的应用，找到等量关系是解题的关键．

二、选择题（本题共4小题，每小题3分，共12分．在每小题给出的4个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得3分，部分选对的得2分，有选错的得0分，请将正确答案的选项代号涂在答题卡相应的位置上）

9. 下列选项中正确的是（　）

A $8^0=1$　　B. $|-8|=8$　　C. $-(-8)=8$　　D. $\sqrt{8}=\pm2\sqrt{2}$

【答案】ABC

【解析】

【分析】根据零次幂可判断A，根据绝对值的意义可判断B，化简多重符号可判断C，根据二次根式的性质可判断D，从而可得答案．

【详解】解：$8^0=1$，故A符合题意，

$|-8|=8$，故B符合题意；

$-(-8)=8$，故C符合题意；

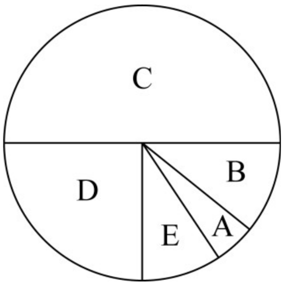
$\sqrt{8}=2\sqrt{2}$，故D不符合题意；

故选ABC

【点睛】本题考查的是零次幂的含义，绝对值的含义，化简多重符号，二次根式的性质，熟记运算法则是解本题的关键．

10. 2023年湘潭中考体育考查了投掷实心球的项目，为了解某校九年级男生投掷实心球水平．随机抽取了若干名男生的成绩（单位：米），列出了如下所示的频数分布表并绘制了扇形图：

类别	A	B	C	D	E
成绩	$6\le x<7$	$7\le x<8$	$8\le x<9$	$9\le x<10$	$10\le x<11$
频数	2	6	25	12	5



则下列说法正确的是（　）

A. 样本容量为 50　　　　B. 成绩在$9 \le x < 10$米的人数最多

C. 扇形图中 C 类对应　圆心角为180°　　　　D. 成绩在$7 \le x < 8$米的频率为 0.1

【答案】AC

【解析】

【分析】结合扇形统计图和统计表格，对选项逐一判断，即可解答．

【详解】解：样本容量为$2+6+25+12+5=50$，故 A 正确；

根据统计表，可得成绩在$8 \le x < 9$米的人数最多，故 B 错误；

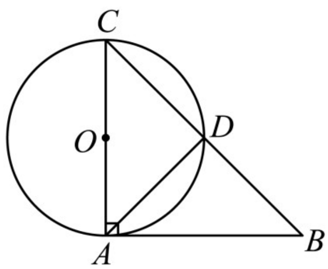
扇形图中 C 类对应的圆心角为$\frac{25}{50}\times 360^\circ=180^\circ$，故 C 正确；

根据统计表，可得成绩在$7 \le x < 8$米的频率为$6 \div 50=0.12$，故 D 错误，

故选：AC．

【点睛】本题考查了扇形统计图和统计表的结合，能通过统计表格准确地得到所需数据是解题的关键．

11. 如图，AC是$\odot O$的直径，CD为弦，过点 A 的切线与CD延长线相交于点B，若$AB=AC$，则下列说法正确的是（　）



A. $AD \perp BC$　　　　B. $\angle CAB=90^\circ$　　　　C. $DB=AB$　　　　D. $AD=\frac{1}{2}BC$

【答案】ABD

【解析】

【分析】根据 AC 是 $\odot O$ 的直径，可得 $AD\perp BC$ ，根据 AB 是 $\odot O$ 的切线，可得 $AC\perp AB$ ，根据 $AB=AC$ ，可得 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，进而可得 $AD=\frac{1}{2}BC$ ，即可判断 A，B，D 选项，根据 $\triangle ADB$ 是直角三角形， AB 是斜边，则 $AB>DB$ ，即可判断 C 选项．

【详解】解：∵ AC 是 $\odot O$ 的直径，

∴ $AD\perp BC$ ，故 A 选项正确，

∵ AB 是 $\odot O$ 的切线，

∴ $AC\perp AB$ ，

∴ $\angle CAB=90^{\circ}$ ，故 B 选项正确，

∵ $AB=AC$

∴ $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，

∵ $AD\perp BC$ ，

∴ $CD=DB$ ，

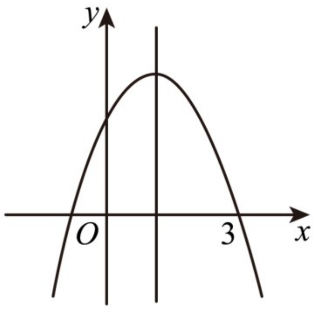
∴ $AD=\frac{1}{2}BC$ ，故 D 选项正确

∵ $\triangle ADB$ 是直角三角形， AB 是斜边，则 $AB>DB$ ，故 C 选项错误，

故选：ABD．

【点睛】本题考查了等腰三角形的性质，直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半，直径所对的圆周角是直角，切线的性质，熟练掌握以上知识是解题的关键．

12. 如图，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴交于点 $(3,0)$ ，则下列结论中正确的是（　）



A. $a>0$　　B. $c>0$　　C. $b^2-4ac<0$　　D. $9a+3b+c=0$

【答案】BD

【解析】

【分析】根据图象的开口方向可判断选项 A；根据图象与 y 轴的交点位置，可判断选项 B；根据抛物线和 x 轴的交点个数可判断选项 C； $x=3$ 时函数值的情况，可判断选项 D．

【详解】解：A、由函数图象得，抛物线开口向下，故 $a<0$ ，故 A 错误；

B、图象与 y 轴的交点在原点上方，故 $c>0$ ，故 B 正确；

C、因为抛物线和 x 轴有两个交点，故 $b^2-4ac>0$ ，故 C 错误．

D、当 $x=3$ 时， $y=9a+3b+c=0$ ，故 D 正确；

故选：BD．

【点睛】本题考查了二次函数的图象和系数的关系，解题的关键是熟练掌握二次函数的有关性质、以及二次函数的图象的特点．

三、填空题（本题共 4 个小题，每小题 3 分，共 12 分．请将答案写在答题卡相应的位置上）

13. 数轴上到原点的距离小于 $\sqrt{5}$ 的点所表示的整数有__________．（写出一个即可）

【答案】2（答案不唯一）

【解析】

【分析】根据实数与数轴的对应关系，得出所求数的绝对值小于 $\sqrt{5}$ ，且为整数，再利用无理数的估算即

可求解．

【详解】解：设所求数为a，由于在数轴上到原点的距离小于$\sqrt{5}$，则$|a|<\sqrt{5}$，且为整数，

则$-\sqrt{5}<a<\sqrt{5}$，

$\because\sqrt{4}<\sqrt{5}<\sqrt{9}$，即$2<\sqrt{5}<3$，

$\therefore a$可以是±2或±1或0．

故答案为：2（答案不唯一）．

【点睛】本题考查了实数与数轴，无理数的估算，掌握数轴上的点到原点距离的意义是解题的关键．

14. 已知实数a，b满足$(a-2)^2+|b+1|=0$，则$a^b=$_________．

【答案】$\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】由非负数的性质可得$a-2=0$且$b+1=0$，求解a，b的值，再代入计算即可．

详解】解：$\because(a-2)^2+|b+1|=0$，

$\therefore a-2=0$且$b+1=0$，

解得：$a=2$，$b=-1$；

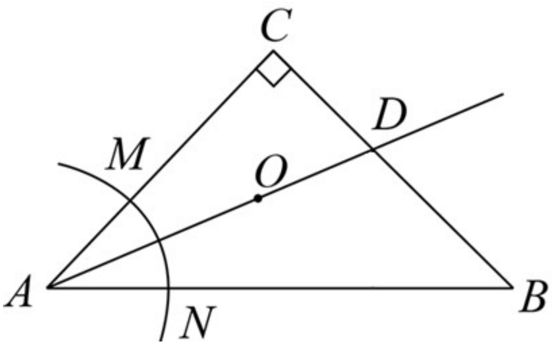
$\therefore a^b=2^{-1}=\frac{1}{2}$；

故答案为：$\frac{1}{2}$．

【点睛】本题考查的是绝对值的非负性，偶次方的非负性的应用，负整数指数幂的含义，理解非负数的性质，熟记负整数指数幂的含义是解本题的关键．

15. 如图，在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$\angle C=90^{\circ}$，按以下步骤作图：①以点A为圆心，以小于AC长为半径作弧，分别交AC,AB于点M，N；②分别以M，N为圆心，以大于$\frac{1}{2}MN$的长为半径作弧，在$\angle BAC$内两

弧交于点O；③作射线AO，交BC于点D．若点D到AB的距离为1，则CD的长为_________．

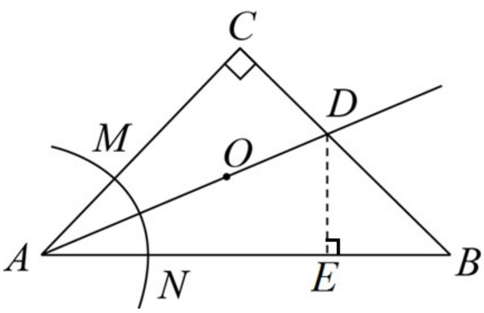


【答案】1

【解析】

【分析】根据作图可得AD为$\angle CAB$的角平分线，根据角平分线的性质即可求解．

【详解】解：如图所示，过点D作$DE \perp AB$于点E，依题意$DE=1$，



根据作图可知AD为$\angle CAB$的角平分线，

$\because DC \perp AC, DE \perp AB$

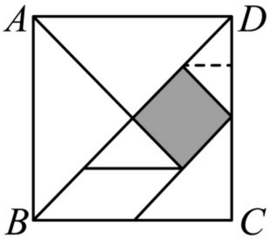
$\therefore CD=DE=1$，

故答案为：1．

【点睛】本题考查了作角平分线，角平分线的性质，熟练掌握基本作图以及角平分线的性质是解题的关键．

16. 七巧板是我国民间广为流传的一种益智玩具，某同学用边长为4dm的正方形纸板制作了一副七巧板（如图），由5个等腰直角三角形，1个正方形和1个平行四边形组成．则图中阴影部分的面积为_______

___ dm^3 .

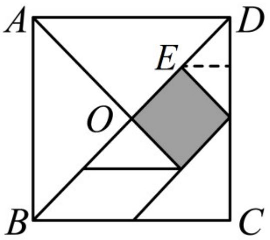


【答案】2

【解析】

【分析】根据正方形的性质，以及七巧板的特点，求得OE的长，即可求解．

【详解】解：如图所示，



依题意，$OD=\frac{\sqrt{2}}{2}AD=2\sqrt{2}$，$OE=\frac{1}{2}OD=\sqrt{2}$

∴图中阴影部分的面积为$OE^2=\left(\sqrt{2}\right)^2=2$

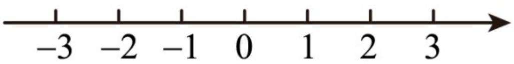
故答案为：2．

【点睛】本题考查了正方形的性质，勾股定理，七巧板，熟练掌握以上知识是解题的关键．

四、解答题（本大题共 10 个小题，共 72 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

请将解答过程写在答题卡相应位置上）

17. 解不等式组：$\begin{cases}7x-14\le 0① \\ 2(x+3)>x+4②\end{cases}$，并把它的解集在数轴上表示出来．



【答案】不等式组的解集为：$-2<x\le 2$．画图见解析

【解析】

【分析】先解不等式组中的两个不等式，再在数轴上表示两个不等式的解集，从而可得答案．

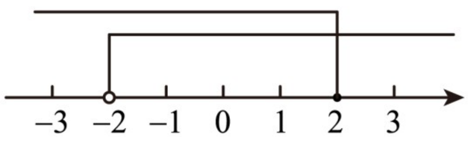
【详解】解：$\begin{cases}7x-14\le 0① \\ 2(x+3)>x+4②\end{cases}$，

由①得：$x\le 2$，

由②得：$2x+6>x+4$，

∴$x>-2$，

在数轴上表示其解集如下：



∴不等式组的解集为：$-2<x\le 2$．

【点睛】本题考查的是一元一次不等式组的解法，在数轴上表示不等式组的解集，掌握不等式组的解法与步骤是解本题的关键．

18. 先化简，再求值：$\left(1+\dfrac{2}{x+1}\right)\cdot\dfrac{x^2+x}{x^2-9}$，其中$x=6$．

【答案】$\dfrac{x}{x-3}$；2

【解析】

【分析】先将括号部分通分相加，相乘时，将两个分式的分子和分母因式分解，进行化简，最后代入求值即可．

【详解】解：$\left(1+\dfrac{2}{x+1}\right)\cdot\dfrac{x^2+x}{x^2-9}$

$=\left(\dfrac{x+1}{x+1}+\dfrac{2}{x+1}\right)\cdot\dfrac{x^2+x}{x^2-9}$，

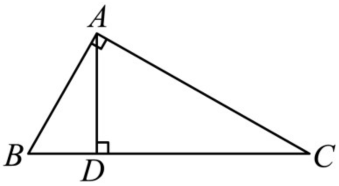
$=\frac{x+3}{x+1}\cdot\frac{x(x+1)}{(x+3)(x-3)}$，

$=\frac{x}{x-3}$，

当 $x=6$ 时，原式 $=2$．

【点睛】本题考查了分式的化简求值，熟练将分式化简是解题的关键．

19. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90^{\circ}$，AD 是斜边 BC 上的高．



（1）证明：$\triangle ABD\backsim\triangle CBA$；

（2）若 $AB=6$，$BC=10$，求 BD 的长．

【答案】（1）见解析　（2）$BD=\frac{18}{5}$

【解析】

【分析】（1）根据三角形高的定义得出 $\angle ADB=90^{\circ}$，根据等角的余角相等，得出 $\angle BAD=\angle C$，结合公共角 $\angle B=\angle B$，即可得证；

（2）根据（1）的结论，利用相似三角形的性质即可求解．

【小问 1 详解】

证明：$\because \angle BAC=90^{\circ}$，$AD$ 是斜边 BC 上的高．

$\therefore \angle ADB=90^{\circ}$，$\angle B+\angle C=90^{\circ}$，

$\therefore \angle B+\angle BAD=90^{\circ}$，

$\therefore \angle BAD=\angle C$

又$\because \angle B=\angle B$

$\therefore \triangle ABD\backsim\triangle CBA$，

【小问 2 详解】

$\because \triangle ABD\backsim\triangle CBA$

$\therefore \frac{AB}{CB}=\frac{BD}{AB}$，

又 $AB=6$，$BC=10$

$\therefore BD=\frac{AB^2}{CB}=\frac{36}{10}=\frac{18}{5}$．

【点睛】本题考查了相似三角形的性质与判定，熟练掌握相似三角形的性质与判定是解题的关键．

20. 为落实“双减”政策要求，丰富学生课余生活，某校七年级根据学生需求，组建了四个社团供学生选择：A（合唱社团）、B（硬笔书法社团）、C（街舞社团）、D（面点社团）．学生从中任意选择两个社团参加活动．

（1）小明对这 4 个社团都很感兴趣，如果他随机选择两个社团，请列举出所有的可能结果；

（2）小宇和小江在选择过程中，首先都选了社团 C（街舞社团），第二个社团他俩决定随机选择，请用列表法或树状图求他俩选到相同社团的概率．

【答案】（1）$AB、AC、AD、BC、BD、CD$

（2）$\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】（1）根据题意列举出所有可能结果；

（2）根据列表法求概率即可求解．

【小问 1 详解】

解：依题意，他随机选择两个社团，所有的可能结果为 $AB、AC、AD、BC、BD、CD$；

【小问2详解】

解：列表如下，

	A	B	D
A	AA	AB	AD
B	BA	BB	BD
D	DA	DB	DD

共有9种等可能结果，其中符合题意的有3种，

∴他俩选到相同社团的概率为$\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$．

【点睛】本题考查的是根据概率公式求概率，用列表法求概率．解题时要注意此题是放回试验还是不放回试验．用到的知识点为：概率=所求情况数与总情况数之比．

21. 教育部正式印发《义务教育劳动课程标准（2022年版）》，劳动课成为中小学的一门独立课程，湘潭市中小学已经将劳动教育融入学生的日常学习和生活中，某校倡导同学们从帮助父母做一些力所能及的家务做起，培养劳动意识，提高劳动技能．小明随机调查了该校10名学生某周在家做家务的总时间，并对数据进行统计分析，过程如下：

收集数据：在家做家务时间：（单位：小时）

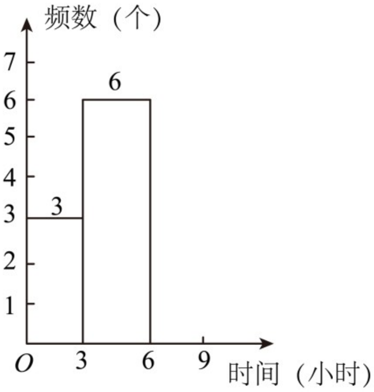
1 5 4 1 a 3 2 b 3 4

整理数据：

时间段	$0\le x<3$	$3\le x<6$	$6\le x<9$
人数	3	6	m

分析数据：

统计量	平均数	中位数	众数
数据	3.4	3.5	4



请结合以上信息回答下列问题：

（1）$m=$__________，并补全频数直方图；

（2）数据统计完成后，小明发现有两个数据不小心丢失了．请根据图表信息找回这两个数据．若$a<b$，

则$a=$__________，$b=$__________；

（3）根据调查结果，请估计该校 2000 名学生在这一周劳动时间不少于 3 小时的人数．

【答案】（1）1；频数直方图见解析

（2）4；7　（3）1400 人

【解析】

【分析】（1）用被调查的总人数减去其余两个时间段的人数，补全频数直方图即可；

（2）通过（1）可得在家做家务时间段为$6\le x<9$有 1 人，故$b\ge 6$，则$3\le a<6$，利用众数为 4，可知

$a=4$，再利用平均数求得b即可；

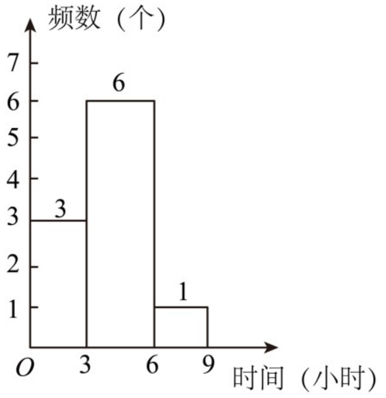
（3）用 2000 乘调查的学生中劳动时间不少于 3 小时的人数的占比，即可解答．

【小问 1 详解】

解：根据题意，可得$m=10-3-6=1$，

故答案为：1，

补全频数直方图，如图所示：



【小问 2 详解】

解：∵在家做家务时间段为 $6 \le x < 9$ 有 1 人，且 $a < b$，

$\therefore b \ge 6$，

观察数据，可得在家做家务时间段为 $3 \le x < 6$ 的是 3，3，4，4，5，有 5 人，比表格中的数据少一人，故

$3 \le a < 6$，

∵众数为 4，在已知数据中在家做家务时间为 4 和 3 的各有 2 人，

$\therefore a = 4$，

根据平均数，可得方程 $(1+5+4+1+4+3+2+b+3+4) \div 10 = 3.4$，

解得 $b = 7$，

故答案为：4；7；

【小问 3 详解】

解：$2000 \times \frac{6+1}{10} = 1400$（人），

答：该校 2000 名学生在这一周劳动时间不少于 3 小时的人数约为 1400 人．

【点睛】本题考查了频数直方图，平均数的概念，众数的概念，用样本估计总量，熟知上述概念是解题的关键．

22. 我国航天事业发展迅速，2023 年 5 月 30 日 9 时 31 分，神舟十六号载人飞船成功发射，某玩具店抓住商机，先购进了 1000 件相关航天模型玩具进行试销，进价为 50 元/件．

（1）设每件玩具售价为 x 元，全部售完的利润为 y 元．求利润 y（元）关于售价 x（元/件）的函数表达式；

（2）当售价定为 60 元/件时，该玩具销售火爆，该店继续购进一批该种航天模型玩具，并从中拿出这两批玩具销售利润的 20%用于支持某航模兴趣组开展活动，在成功销售完毕后，资助经费恰好 10000 元，请问该商店继续购进了多少件航天模型玩具？

【答案】（1）$y=1000x-50000$；

（2）该商店继续购进了 4000 件航天模型玩具．

【解析】

【分析】（1）根据总利润=单件利润×销售量，可求得利润 y（元）关于售价 x（元/件）的函数表达式；

（2）设商店继续购进了 m 件航天模型玩具，根据“销售利润的 20%恰好 10000 元”列一元一次方程，解之即可．

【小问 1 详解】

解：因每件玩具售价为 x 元，

依题意得 $y=1000(x-50)=1000x-50000$；

【小问 2 详解】

解：设商店继续购进了 m 件航天模型玩具，则总共有 $(m+1000)$ 件航天模型玩具，

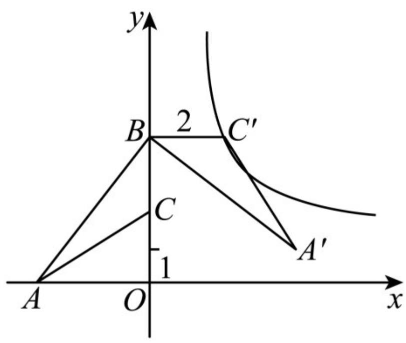
依题意得：$(m+1000)(60-50)\times20\%=10000$，

解得 $m=4000$，

答：该商店继续购进了 4000 件航天模型玩具．

【点睛】本题考查了一次函数的应用，一元一次方程的应用，理解题意找到题目蕴含的相等关系，并据此列出方程或函数解析式是解题的关键．

23. 如图，点 A 的坐标是 $(-3,0)$，点 B 的坐标是 $(0,4)$，点 C 为 OB 中点，将 $\triangle ABC$ 绕着点 B 逆时针旋转 90° 得到 $\triangle A'BC'$．



（1）反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 的图像经过点 C'，求该反比例函数的表达式；

（2）一次函数图像经过 A、A' 两点，求该一次函数的表达式．

【答案】（1）$y=\dfrac{8}{x}$

（2）$y=\dfrac{1}{7}x+\dfrac{3}{7}$

【解析】

【分析】（1）由点 B 的坐标是 $(0,4)$，点 C 为 OB 中点，可得 $C(0,2)$，$OC=BC=2$，由旋转可得：

$BC'=BC=2$，$\angle CBC'=90^\circ$，可得 $C'(2,4)$，可得 $k=2\times4=8$，从而可得答案；

（2）如图，过 A' 作 $A'H\perp BC$ 于 H，则 $\angle AOB=\angle A'HB=90^\circ$，而 $\angle ABA'=90^\circ$，$AB=A'B$，证明

$\triangle ABO\cong\triangle BA'H$，可得 $AO=BH=3$，$OB=A'H=4$，$A'(4,1)$，设直线 AA' 为 $y=mx+n$，再建立方程组求解即可．

【小问 1 详解】

解：∵点 B 的坐标是 $(0,4)$，点 C 为 OB 中点，

$\therefore C(0,2)$，$OC=BC=2$，

由旋转可得：$BC'=BC=2$，$\angle CBC'=90^\circ$，

$\therefore C'(2,4)$，

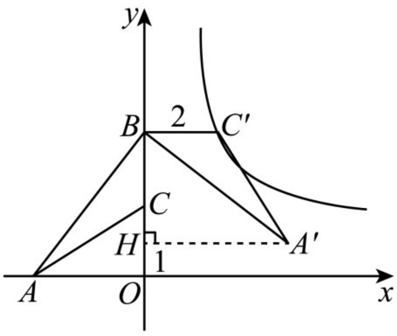
$\therefore k=2\times4=8$，

$\therefore$反比例函数的表达式为$y=\dfrac{8}{x}$；

小问2详解】

如图，过A'作$A'H\perp BC$于H，

则$\angle AOB=\angle A'HB=90^{\circ}$，而$\angle ABA'=90^{\circ}$，$AB=A'B$，



$\therefore \angle ABO+\angle BAO=90^{\circ}=\angle ABO+\angle A'BO$，

$\therefore \angle BAO=\angle A'BH$，

$\therefore \triangle ABO\cong\triangle BA'H$，

$\therefore AO=BH=3$，$OB=A'H=4$，

$\therefore OH=4-3=1$，

$\therefore A'(4,1)$，

设直线AA'为$y=mx+n$，

$\therefore \begin{cases}-3m+n=0\\4m+n=1\end{cases}$，解得：$\begin{cases}m=\dfrac{1}{7}\\n=\dfrac{3}{7}\end{cases}$，

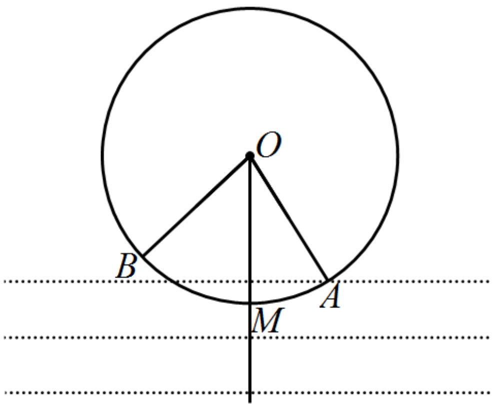
∴直线 AA' 为 $y=\frac{1}{7}x+\frac{3}{7}$ ．

【点睛】本题考查的是旋转的性质，利用待定系数法求解一次函数与反比例函数的解析式，全等三角形的判定与性质，熟练的求解 $A'(4,1)$ 是解本题的关键．

24. 问题情境：筒车是我国古代发明的一种水利灌溉工具，既经济又环保，明朝科学家徐光启在《农政全书》中用图画描绘了筒车的工作原理（如图①）．假定在水流量稳定的情况下，筒车上的每一个盛水筒都按逆时针做匀速圆周运动，每旋转一周用时 120 秒．

问题设置：把筒车抽象为一个半径为 r 的 $\odot O$ ．如图②，OM 始终垂直于水平面，设筒车半径为 2 米．当 $t=0$ 时，某盛水筒恰好位于水面 A 处，此时 $\angle AOM=30^{\circ}$ ，经过 95 秒后该盛水筒运动到点 B 处．（参考数据，$\sqrt{2}\approx1.414$ $\sqrt{3}\approx1.732$ ）


图①



图②

问题解决：

（1）求该盛水筒从 A 处逆时针旋转到 B 处时，$\angle BOM$ 的度数；

（2）求该盛水筒旋转至 B 处时，它到水面的距离．（结果精确到 0.1 米）

【答案】（1）$\angle BOM=45^{\circ}$ ；

（2）该盛水筒旋转至 B 处时，它到水面的距离为 0.3 米．

【解析】

【分析】（1）先求得该盛水筒的运动速度，再利用周角的定义即可求解；

（2）作 $BC\perp OM$ 于点 C，在 $\mathrm{Rt}\triangle OAD$ 中，利用含 30 度角的直角三角形的性质以及勾股定理求得 OD 的长，在 $\mathrm{Rt}\triangle OBC$ 中，利用勾股定理求得 OC 的长，据此即可求解．

【小问 1 详解】

解：∵旋转一周用时 120 秒，

∴每秒旋转 $\frac{360^{\circ}}{120}=3^{\circ}$，

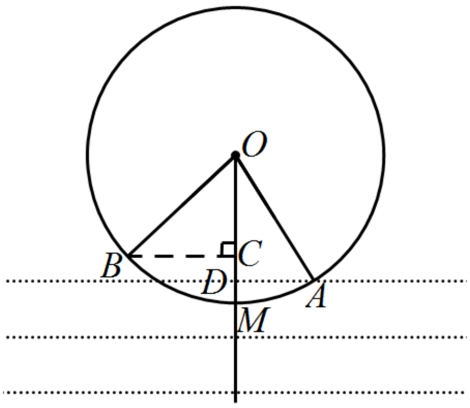
当经过 95 秒后该盛水筒运动到点 B 处时，$\angle AOB=360^{\circ}-3^{\circ}\times 95=75^{\circ}$，

∵$\angle AOM=30^{\circ}$，

∴$\angle BOM=75^{\circ}-30^{\circ}=45^{\circ}$；

【小问 2 详解】

解：作 $BC\perp OM$ 于点 C，设 OM 与水平面交于点 D，则 $OD\perp AD$，



在 $\mathrm{Rt}\triangle OAD$ 中，$\angle AOD=30^{\circ}$，$OA=2$，

∴$AD=\frac{1}{2}OA=1$，$OD=\sqrt{2^{2}-1^{2}}=\sqrt{3}$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle OBC$ 中，$\angle BOC=45^{\circ}$，$OB=2$，

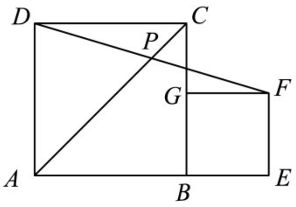
$\therefore BC=OC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}OB=\sqrt{2}$，

$\therefore CD=OD-OC=\sqrt{3}-\sqrt{2}\approx 0.3$（米），

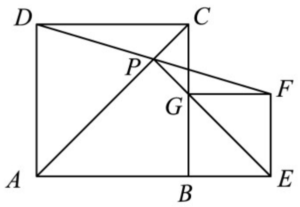
答：该盛水筒旋转至 B 处时，它到水面的距离为 0.3 米．

【点睛】本题考查了圆的性质，含30度角的直角三角形的性质以及勾股定理，解答本题的关键是明确题意，找出所求问题需要的条件．

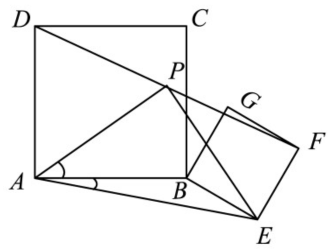
25. 问题情境：小红同学在学习了正方形的知识后，进一步进行以下探究活动：在正方形 $ABCD$ 的边 BC 上任意取一点 G，以 BG 为边长向外作正方形 $BEFG$，将正方形 $BEFG$ 绕点 B 顺时针旋转．



图①



图②



图③

特例感知：

（1）当 BG 在 BC 上时，连接 DF，AC 相交于点 P，小红发现点 P 恰为 DF 的中点，如图①．针对小红发现的结论，请给出证明；

（2）小红继续连接 EG，并延长与 DF 相交，发现交点恰好也是 DF 中点 P，如图②，根据小红发现的结论，请判断 $\triangle APE$ 的形状，并说明理由；

规律探究：

（3）如图③，将正方形 $BEFG$ 绕点 B 顺时针旋转 α，连接 DF，点 P 是 DF 中点，连接 AP，EP，AE，$\triangle APE$ 的形状是否发生改变？请说明理由．

【答案】（1）见解析；（2）$\triangle APE$是等腰直角三角形，理由见解析；（3）$\triangle APE$的形状不改变，见解析

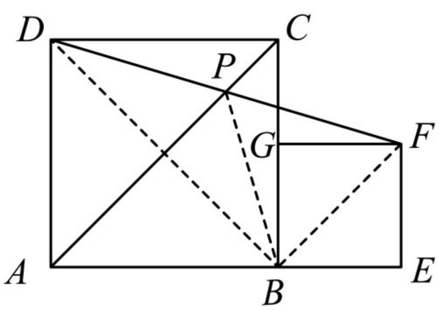
【解析】

【分析】（1）连接BD，BF，BP，根据正方形的性质求出$\angle DBF=90^\circ$，证明$\triangle APD\cong\triangle APB$，推出$BP=DP$，再利用余角的性质求出$\angle PBF=\angle PFB$，推出$PB=PF$即可；

（2）根据正方形的性质直接得到$\angle CAE=\angle PEA=45^\circ$，推出$AP=EP,\angle APE=90^\circ$，得到$\triangle APE$是等腰直角三角形；

（3）延长EP至点M，使$PM=EP$，连接MA,MD，证明$\triangle MPD\cong\triangle EPF(\text{SAS})$，得到$DM=EF,\angle DMP=\angle PEF$，推出$BG\parallel DM$，设$DF$交$BC$于点$H$，交$BG$于点$N$，得到$\angle MDN=\angle DNB$，由$AD\parallel BC$得到$\angle ADN=\angle BHN$，推出$\angle ADM=\angle BHN+\angle BNH=180^\circ-\angle HBN$，进而得到$\angle ADM=\angle ABE$，再证明$\triangle ADM\cong\triangle ABE(\text{SAS})$，得到$AM=AE$，$\angle DAM=\angle BAE$，证得$\angle APE=90^\circ$，再由$\angle MAE=90^\circ$，根据等腰三角形的三线合一的性质求出$\angle MAP=\angle PAE=45^\circ$，即可证得$\triangle APE$是等腰直角三角形．

【详解】（1）证明：连接BD，BF，BP，如图，



图①

$\because$四边形$ABCD$，$BEFG$都是正方形，

$\therefore \angle CBD = 45^\circ = \angle FBG$，

$\therefore \angle DBF = 90^\circ$，

$\because$四边形$ABCD$是正方形，

$\therefore \angle DAC = \angle BAC = 45^\circ$，

又$\because AP = AP$，

$\therefore \triangle APD \cong \triangle APB(\mathrm{SAS})$，

$\therefore BP = DP$，

$\therefore \angle PDB = \angle PBD$，

$\because \angle PDB + \angle PFB = 90^\circ = \angle PBD + \angle PBF$，

$\therefore \angle PBF = \angle PFB$，

$\therefore PB = PF$，

$\therefore PD = PF$，即点P恰为DF的中点；

（2）$\triangle APE$是等腰直角三角形，理由如下：

$\because$四边形$ABCD$，$BEFG$都是正方形，

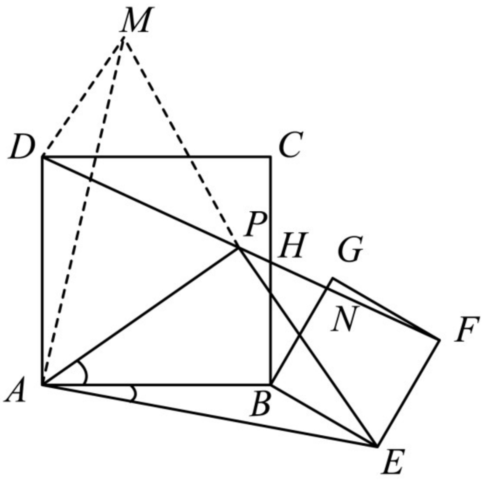
$\therefore \angle CAE = \angle PEA = 45^\circ$

$\therefore AP = EP, \angle APE = 90^\circ$，

$\therefore \triangle APE$是等腰直角三角形；

（3）$\triangle APE$的形状不改变，

延长EP至点M，使$PM=EP$，连接MA,MD，



图③

∵四边形$ABCD$、四边形$BEFG$都是正方形，

∴$AB=AD$，$\angle BAD=\angle ABC=\angle EBG=90^{\circ}$，$BE=EF$，$BG\parallel EF$，

∵点P为DF的中点，

∴$PD=PF$，

∵$\angle DPM=\angle EPF$，

∴$\triangle MPD\cong\triangle EPF(\text{SAS})$，

∴$DM=EF,\angle DMP=\angle PEF$，

∴$BE=DM$，$DM\parallel EF$，

∴$BG\parallel DM$，

设DF交BC于点H，交BG于点N，

∴$\angle MDN=\angle DNB$，

∵$AD\parallel BC$，

$\therefore \angle ADN = \angle BHN$，

$\because \angle BHN + \angle BNH + \angle HBN = 180^\circ$，

$\therefore \angle ADM = \angle ADN + \angle MDN = \angle BHN + \angle BNH = 180^\circ - \angle HBN$，

$\because \angle ABE = 360^\circ - \angle ABC - \angle EBG - \angle HBN = 180^\circ - \angle HBN$，

$\therefore \angle ADM = \angle ABE$，

又$\because AD = AB$，

$\therefore \triangle ADM \cong \triangle ABE(\text{SAS})$，

$\therefore AM = AE$，$\angle DAM = \angle BAE$，

$\because PM = EP$，

$\therefore AP \perp ME$，即$\angle APE = 90^\circ$，

$\because \angle DAM + \angle MAB = 90^\circ$，

$\therefore \angle BAE + \angle MAB = 90^\circ$，即$\angle MAE = 90^\circ$，

$\therefore \angle MAP = \angle PAE = 45^\circ$，

$\therefore \angle PEA = 45^\circ = \angle PAE$，

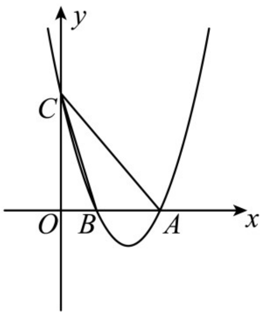
$\therefore AP = EP$，

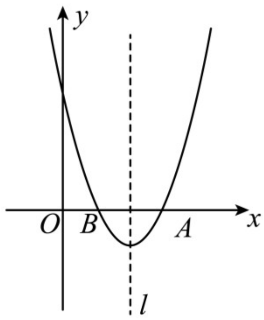
$\therefore \triangle APE$是等腰直角三角形．

【点睛】此题考查了正方形的性质，全等三角形的判定和性质，等腰直角三角形的判定和性质，平行线的性质等，（3）中作辅助线利用中点构造全等三角形是解题的难点，熟练掌握各性质和判定定理是解题的关键．

26. 如图，二次函数$y = x^2 + bx + c$的图象与x轴交于A，B两点，与y轴交于C点，其中$B(1,0)$，

$C(0,3)$.





（备用图）

（1）求这个二次函数的表达式；

（2）在二次函数图象上是否存在点 P ，使得 $S_{\triangle PAC}=S_{\triangle ABC}$ ？若存在，请求出 P 点坐标；若不存在，请说明理由；

（3）点 Q 是对称轴 l 上一点，且点 Q 的纵坐标为 a ，当 $\triangle QAC$ 是锐角三角形时，求 a 的取值范围．

【答案】（1） $y=x^2-4x+3$

（2） $P(2,-1)$ 或 $P\left(\dfrac{3-\sqrt{17}}{2},\dfrac{7+\sqrt{17}}{2}\right)$ 或 $P\left(\dfrac{3+\sqrt{17}}{2},\dfrac{7-\sqrt{17}}{2}\right)$

（3） $\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}<a<5$ 或 $-1<a<\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$ ．

【解析】

【分析】（1）待定系数法求解析式即可求解；

（2）根据 $S_{\triangle PAC}=S_{\triangle ABC}$ ，可得 P 到 AC 的距离等于 B 到 AC 的距离，进而作出两条 AC 的平行线，求得解析式，联立抛物线即可求解；

（3）根据题意，求得当 $\triangle QAC$ 是直角三角形时的 a 的值，进而观察图象，即可求解，分 $a>0$ 和 $a<0$ 两种情况讨论，分别计算即可求解．

【小问 1 详解】

解：将点 $B(1,0)$ ， $C(0,3)$ 代入 $y=x^2+bx+c$ ，得

$\begin{cases}1+b+c=0\\c=3\end{cases}$

解得：$\begin{cases}b=-4\\c=3\end{cases}$

∴抛物线解析式为 $y=x^2-4x+3$；

【小问2详解】

∵ $y=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$，

顶点坐标为 $(2,1)$，

当 $y=0$ 时，$x^2-4x+3=0$

解得：$x_1=1, x_2=3$

∴ $A(3,0)$，则 $OA=3$

∵ $C(0,3)$，则 $OC=3$

∴ $\triangle AOC$ 是等腰直角三角形，

∵ $S_{\triangle PAC}=S_{\triangle ABC}$

∴ P 到 AC 的距离等于 B 到 AC 的距离，

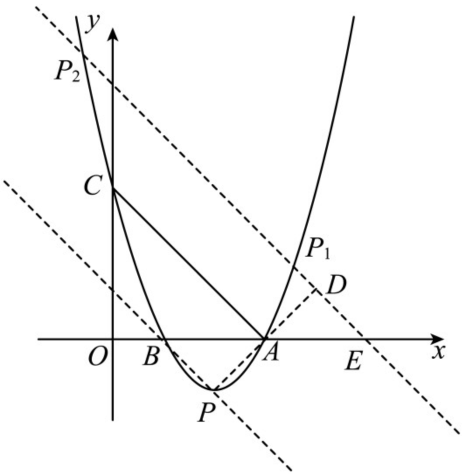
∵ $A(3,0)$，$C(0,3)$，设直线 AC 的解析式为 $y=kx+3$

∴ $3k+3=0$

解得：$k=-1$

∴直线 AC 的解析式为 $y=-x+3$，

如图所示，过点 B 作 AC 的平行线，交抛物线于点 P，



设 BP 的解析式为 $y=-x+d$，将点 $B(1,0)$ 代入得，

$-1+d=0$

解得：$d=1$

∴直线 BP 的解析式为 $y=-x+1$，

$$\begin{cases} y=-x+1 \\ y=x^2-4x+3 \end{cases}$$

解得：$\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$

∴ $P(2,-1)$，

$\because PA=\sqrt{(3-2)^2+1^2}=\sqrt{2}, PB=\sqrt{(2-1)^2+1^2}=\sqrt{2}, AB=3-1=2$

∴ $PA^2+PB^2=AB^2$

∴ $\triangle ABP$ 是等腰直角三角形，且 $\angle APB=90^\circ$，

如图所示，延长 PA 至 D，使得 $AD=PA$，过点 D 作 AC 的平行线 DE，交 x 轴于点 E，则 $DA=PA$，

则符合题意的点 P 在直线 DE 上，

$\because\triangle APB$ 是等腰直角三角形，$DE \parallel AC, AC \perp PD$

$\therefore \angle DAE = \angle BAP = 45^\circ$，$PD \perp DE$

$\therefore \triangle ADE$ 是等腰直角三角形，

$\therefore AE = \sqrt{2}AD = \sqrt{2}AP = 2$

$\therefore E(5,0)$

设直线 DE 的解析式为 $y = -x + e$

$\therefore -5 + e = 0$

解得：$e = 5$

$\therefore$直线 DE 的解析式为 $y = -x + 5$

联立 $\begin{cases} y = -x + 5 \\ y = x^2 - 4x + 3 \end{cases}$

解得：$\begin{cases} x = \dfrac{3-\sqrt{17}}{2} \\ y = \dfrac{7+\sqrt{17}}{2} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = \dfrac{3+\sqrt{17}}{2} \\ y = \dfrac{7-\sqrt{17}}{2} \end{cases}$

$\therefore P\left(\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}, \dfrac{7+\sqrt{17}}{2}\right)$ 或 $P\left(\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}, \dfrac{7-\sqrt{17}}{2}\right)$

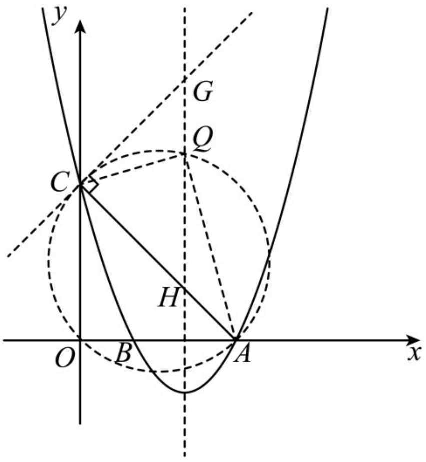
综上所述，$P(2,-1)$ 或 $P\left(\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}, \dfrac{7+\sqrt{17}}{2}\right)$ 或 $P\left(\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}, \dfrac{7-\sqrt{17}}{2}\right)$；

【小问 3 详解】

① 当 $a > 0$ 时，如图所示，过点 C 作 $CG \perp AC$ 交 $x = 2$ 于点 G，

当点 Q 与点 G 重合时，$\triangle ACQ$ 是直角三角形，

当 $\angle AQC = 90^\circ$ 时，$\triangle ACQ$ 是直角三角形，



设 AC 交 $x=2$ 于点 H ，

∵直线 AC 的解析式为 $y=-x+3$ ，

则 $H(2,1)$ ，

$\therefore CH=\sqrt{2^2+(3-1)^2}=2\sqrt{2}$ ，

$\because \angle CHG=\angle OCH=45^\circ$ ，

$\therefore \triangle CHG$ 是等腰直角三角形，

$\therefore HG=\sqrt{2}CH=\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}=4$

$\therefore G(2,5)$ ，

设 $Q(2,q)$ ，则 $AQ^2=1^2+q^2, CQ^2=2^2+(q-3)^2=q^2-6q+13$

$\because AC^2=3^2+3^2=18$

$\therefore 18=q^2-6q+13+1^2+q^2$

解得：$q=\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$ （舍去）或 $q=\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$

$\therefore Q\left(2,\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$

$\because \triangle QAC$ 是锐角三角形

$\therefore \frac{3+\sqrt{17}}{2}<a<5$；

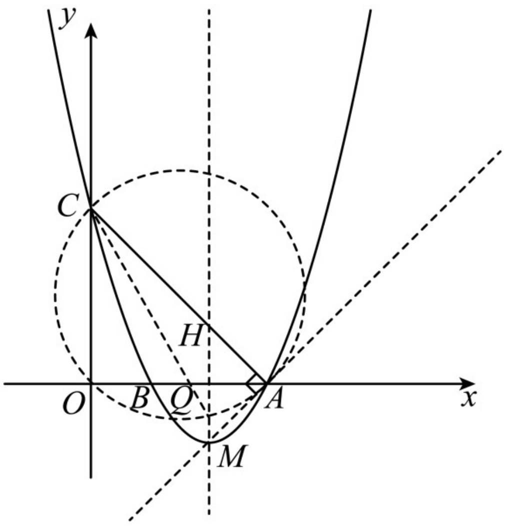
当 $a<0$ 时，如图所示，

同理可得 $AQ^2+QC^2=AC^2$

即∴ $18=q^2-6q+13+1^2+q^2$

解得：$q=\frac{3-\sqrt{17}}{2}$ 或 $q=\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ （舍去）

由（2）可得 $AM\perp AC$ 时，$M(2,-1)$



$\therefore -1<a<\frac{3-\sqrt{17}}{2}$

综上所述，当 $\triangle QAC$ 是锐角三角形时，$\frac{3+\sqrt{17}}{2}<a<5$ 或 $-1<a<\frac{3-\sqrt{17}}{2}$ ．

【点睛】本题考查了二次函数综合运用，面积问题，角度问题，熟练掌握二次函数的性质是解题的关键．