2023年江苏省常州市中考数学真题

一、选择题（本大题共8小题，每小题2分，共16分．在每小题所给出的四个选项中，只有一项是正确的）

1. 计算 $a^8 \div a^2$ 的结果是（　）

A. a^4　　B. a^6　　C. a^{10}　　D. a^{16}

【答案】B

【解析】

【分析】利用同底数幂的除法进行解题即可．

【详解】解：$a^8 \div a^2 = a^{8-2} = a^6$，

故选B．

【点睛】本题考查同底数的幂的除法，掌握运算法则是解题的关键．

2. 若代数式 $\frac{x}{x^2-1}$ 的值是0，则实数 x 的值是（　）

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

【答案】B

【解析】

【分析】由 $x=0, x^2-1\neq 0$ 即可求解．

【详解】解：由分母不为零得：$x^2-1\neq 0, x\neq \pm 1$

∵代数式 $\frac{x}{x^2-1}$ 的值是0

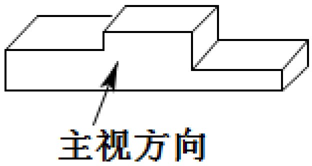
∴$x=0$

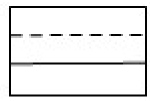
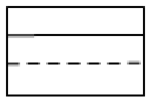
综上：$x=0$

故选：B

【点睛】本题考查了分式有意义的条件、分式的值为零．掌握分式有意义的条件是关键．

3. 某运动会颁奖台如图所示，它的主视图是(　　)



A. 　B. 　C. 　D. 

【答案】C

【解析】

【详解】从正面看到的图形如图所示：

，

故选C．

4. 下列实数中，其相反数比本身大的是（　）

A. -2023　B. 0　C. $\frac{1}{2023}$　D. 2023

【答案】A

【解析】

【分析】根据相反数的定义，逐项求出相反数，进行比较即可．

【详解】解：A. -2023的相反数是$-(-2023)=2023$，则$2023>-2023$，故该选项符合题意；

B. 0的相反数是$-(0)=0$，则$0=0$，故该选项不符合题意；

C. $\frac{1}{2023}$ 相反数是 $-\frac{1}{2023}$，则 $-\frac{1}{2023}<\frac{1}{2023}$，故该选项不符合题意；

B. 2023 的相反数是 -2023，则 $-2023<2023$，故该选项不符合题意；

故选：A．

【点睛】本题考查了相反数，比较有理数的大小，解题的关键是先求出相反数，再进行比较．

5. 2022 年 10 月 31 日，搭载空间站梦天实验舱的长征五号 B 遥四运载火箭，在我国文昌航天发射场发射成功．长征五号 B 运载火箭可提供 1078t 起飞推力．已知 1t 起飞推力约等于 10000N，则长征五号 B 运载火箭可提供的起飞推力约为（　）

A. $1.078\times10^{5}\text{N}$　　B. $1.078\times10^{6}\text{N}$　　C. $1.078\times10^{7}\text{N}$　　D. $1.078\times10^{8}\text{N}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据科学记数法的定义进行求解即可．

【详解】解：$1078\text{t}=10780000\text{N}$，

则 $10780000\text{N}=1.078\times10^{7}\text{N}$，

故选：C．

【点睛】本题考查了用科学记数法表示较大的数，解题时注意用科学记数法表示较大的数时，$a\times10^{n}$ 中 a 的范围是 $1\le a<10$，n 是正整数．

6. 在平面直角坐标系中，若点 P 的坐标为 $(2,1)$，则点 P 关于 y 轴对称的点的坐标为（　）

A. $(-2,-1)$　　B. $(2,-1)$　　C. $(-2,1)$　　D. $(2,1)$

【答案】C

【解析】

【分析】根据关于 y 轴对称点的坐标特点：横坐标互为相反数，纵坐标不变；即点 (x,y) 关于 y 轴的对称

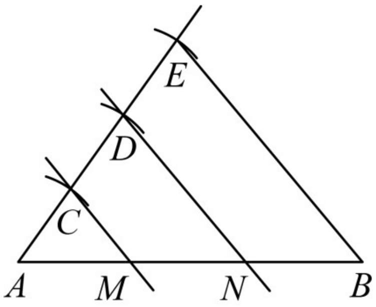
点的坐标是$(-x,y)$，即点P的坐标为$(2,1)$关于y轴对称的点的坐标．

【详解】点P $(2,1)$关于y轴　对称点的坐标是$(-2,1)$，

故选C．

【点睛】此题主要考查了关于x轴、y轴对称的点的坐标规律，比较容易，关键是熟记规律：（1）关于x轴对称点的坐标特点：横坐标不变，纵坐标互为相反数．（2）关于y轴对称点的坐标特点：横坐标互为相反数，纵坐标不变．

7. 小明按照以下步骤画线段AB的三等分点：

画法	图形
1．以A为端点画一条射线； 2．用圆规在射线上依次截取3条等长线段AC、CD、DE，连接BE； 3．过点C、D分别画BE　平行线，交线段AB于点M、N，M、N就是线段AB的三等分点．	

这一画图过程体现的数学依据是（　）

A. 两直线平行，同位角相等

B. 两条平行线之间的距离处处相等

C. 垂直于同一条直线的两条直线平行

D. 两条直线被一组平行线所截，所得的对应线段成比例

【答案】D

【解析】

【分析】根据两条直线被一组平行线所截，所得的对应线段成比例，即可求解．

【详解】解：由步骤2可得：C、D为线段AE的三等分点

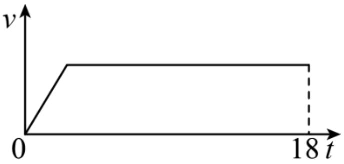
步骤3中过点C、D分别画BE的平行线，由两条直线被一组平行线所截，所得的对应线段成比例得：M、N就是线段AB的三等分点

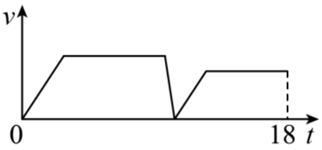
故选：D

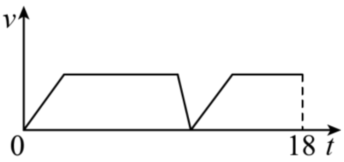
【点睛】本题考查两条直线被一组平行线所截，所得的对应线段成比例．掌握相关结论即可．

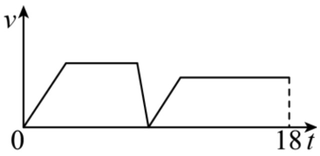
8. 折返跑是一种跑步的形式．如图，在一定距离的两个标志物①、②之间，从①开始，沿直线跑至②处，用手碰到②后立即转身沿直线跑至①处，用手碰到①后继续转身跑至②处，循环进行，全程无需绕过标志

物．小华练习了一次 $2\times50\mathrm{m}$ 的折返跑，用时 $18\mathrm{s}$ 在整个过程中，他的速度大小 v（$\mathrm{m/s}$）随时间 t（s）变化的图像可能是（　）

A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】D

【解析】

【分析】根据速度与时间的关系即可得出答案．

【详解】解：刚开始速度随时间的增大而增大，匀速跑一段时间后减速到②，然后再加速再匀速到①，由于体力原因，应该第一个 50 米速度快，用的时间少，第二个 50 米速度慢，用的时间多，

故他的速度大小 v（$\mathrm{m/s}$）随时间 t（s）变化的图像可能是 D．

故选：D．

【点睛】本题主要考查函数的图象，要根据函数图象的性质和图象上的数据分析得出函数的类型和所需要的条件，结合实际意义得出正确的结论．

二、填空题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分．不需写出解答过程，请把答案直接填写在答题卡相应位置上）

9. 9 的算术平方根是_____．

【答案】3

【解析】

【分析】根据一个正数的算术平方根就是其正的平方根即可得出．

【详解】$\because 3^2=9$，

$\therefore 9$ 算术平方根为 3．

故答案为：3．

【点睛】本题考查了算术平方根，熟练掌握算术平方根的概念是解题的关键．

10. 分解因式：$x^2y-4y=$____．

【答案】$y(x+2)(x-2)$

【解析】

【分析】要将一个多项式分解因式的一般步骤是首先看各项有没有公因式，若有公因式，则把它提取出来，之后再观察是否是完全平方公式或平方差公式，若是就考虑用公式法继续分解因式．

【详解】$x^2y-4y=y(x^2-4)=y(x+2)(x-2)$，

故答案为：$y(x+2)(x-2)$．

【点睛】提公因式法和应用公式法因式分解．

11. 计算：$\left(\sqrt{3}-1\right)^0+2^{-1}=$________．

【答案】$\frac{3}{2}$

【解析】

【分析】根据零指数幂，负整数指数幂和有理数的加减混合运算进行计算即可．

【详解】解：$\left(\sqrt{3}-1\right)^0+2^{-1}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$．

故答案为：$\frac{3}{2}$．

【点睛】本题考查了零指数幂，负整数指数幂，有理数的加减混合运算，熟练掌握以上运算法则是解题的关键．

12. 若矩形的面积是 10，相邻两边的长分别为 x、y，则 y 与 x 的函数表达式为______．

【答案】$y=\frac{10}{x}$

【解析】

【分析】根据题意列出反比例函数解析式，即可．

【详解】解：$\because$ 矩形的面积是 10，相邻两边的长分别为 x、y，

故 $xy=10$，

则 $y=\dfrac{10}{x}$，

故答案为：$y=\dfrac{10}{x}$．

【点睛】本题考查了求函数解析式，解题的关键是根据矩形的面积公式推得 $xy=10$．

13. 若圆柱的底面半径和高均为 a，则它的体积是______（用含 a 的代数式表示）．

【答案】πa^3

【解析】

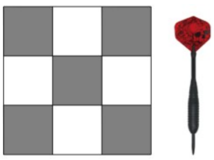
【详解】根据圆柱的体积 = 圆柱的底面积 × 圆柱的高，可得

$V=\pi a^2\cdot a=\pi a^3$．

故答案为：πa^3．

【点睛】本题主要考查代数式和整式的乘法运算，牢记整式乘法的运算性质是解题的关键．

14. 如图，飞镖游戏板中每一块小正方形的面积相等．任意投掷飞镖 1 次且击中游戏板，则击中阴影部分的概率是______．



【答案】$\dfrac{5}{9}$

【解析】

【分析】根据几何概率的求解公式即可求解．

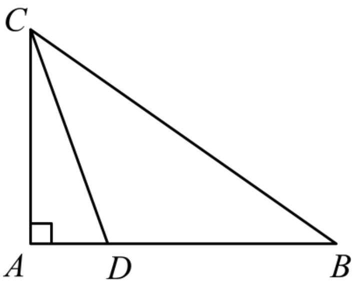
【详解】解：∵总面积为 9 个小正方形的面积，其中阴影部分面积为 5 个小正方形的面积，

∴击中阴影部分的概率是 $\dfrac{5}{9}$，

故答案为：$\frac{5}{9}$．

【点睛】此题主要考查概率的求解，解题的关键是熟知几何概率的公式．

15. 如图，在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$\angle A=90^{\circ}$，点D在边AB上，连接CD．若$BD=CD$，$\frac{AD}{BD}=\frac{1}{3}$，则$\tan B=$_____．



【答案】$\frac{\sqrt{2}}{2}$##$\frac{1}{2}\sqrt{2}$

【解析】

【分析】由题意可设$AD=x$，则$CD=3x$，$AB=4x$，在$\mathrm{Rt}\triangle ADC$中求得$AC=2\sqrt{2}x$，在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中求出答案即可．

【详解】解：∵$BD=CD$，$\frac{AD}{BD}=\frac{1}{3}$，

设$AD=x$，则$BD=CD=3x$，$AB=4x$，

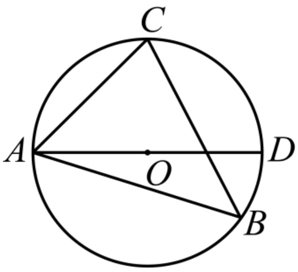
在$\mathrm{Rt}\triangle ADC$中，由勾股定理得：$AC=2\sqrt{2}x$，

在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$\tan B=\frac{AC}{AB}=\frac{2\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$．

【点睛】本题考查的是求锐角三角函数，解题关键是根据比值设未知数，表示出边长从而求出锐角三角函数值．

16. 如图，AD是$\odot O$的直径，$\triangle ABC$是$\odot O$的内接三角形．若$\angle DAC=\angle ABC$，$AC=4$，则$\odot O$的

直径 $AD=$______．

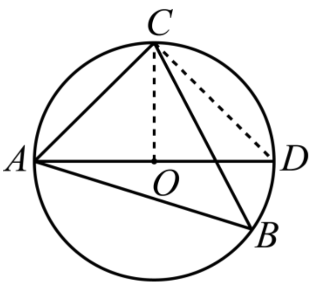


【答案】$4\sqrt{2}$

【解析】

【分析】连接 CD，OC，根据在同圆中直径所对的圆周角是 90° 可得 $\angle ACD=90^{\circ}$，根据圆周角定理可得 $\angle COD=\angle COA$，根据圆心角，弦，弧之间的关系可得 $AC=CD$，根据勾股定理即可求解．

【详解】解：连接 CD，OC，如图：



$\because AD$ 是 $\odot O$ 的直径，

$\therefore \angle ACD=90^{\circ}$，

$\because \angle DAC=\angle ABC$，

$\therefore \angle COD=\angle COA$，

$\therefore AC=CD$，

又 $\because AC=4$，

$\therefore CD=4$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 中，$AD=\sqrt{AC^2+CD^2}=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$，

故答案为：$4\sqrt{2}$．

【点睛】本题考查了在同圆中直径所对的圆周角是 90°，圆周角定理，圆心角，弦，弧之间的关系，勾股定理，熟练掌握以上知识是解题的关键．

17. 如图，小红家购置了一台圆形自动扫地机，放置在屋子角落（书柜、衣柜与地面均无缝隙）．在没有障碍物阻挡的前提下，扫地机能自动从底座脱离后打扫全屋地面．若这台扫地机能从角落自由进出，则图中的 x 至少为_______（精确到个位，参考数据：$\sqrt{21}\approx 4.58$）．

图 1

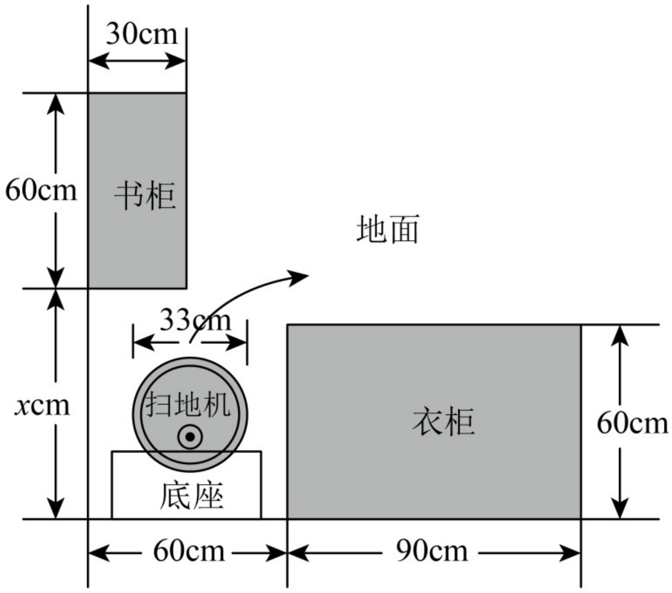


图 2

【答案】46

【解析】

【分析】先建立直角三角形，利用勾股定理解决实际问题．

【详解】解：如图过点 A、B 分别作墙的垂线，交于点 C，

则 $AC=(x-60)\mathrm{cm}$，$BC=60-30=30\mathrm{cm}$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$AC^2+BC^2=AB^2$，

即 $(x-60)^2+30^2=AB^2$

∵这台扫地机能从角落自由进出，

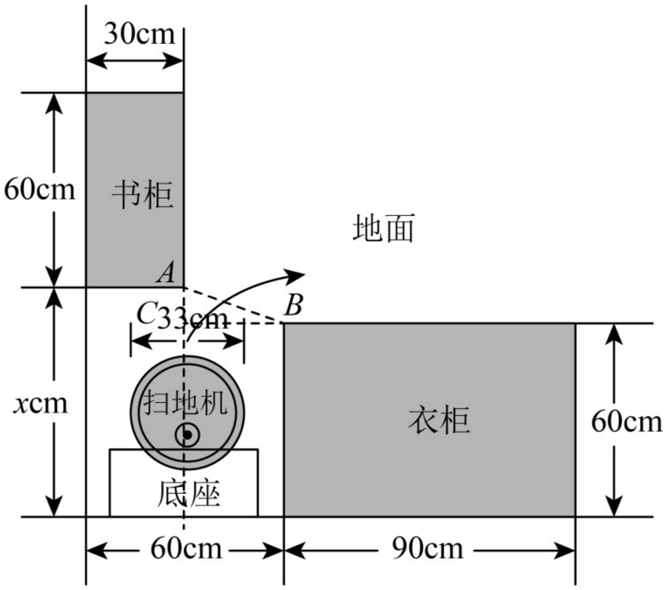
∴这台扫地机的直径不小于AB长，

即最小时为$(x-60)^2+30^2=33^2$，

解得：$x_1=3\sqrt{21}+60$（舍），$x_1=-3\sqrt{21}+60\approx 46\text{cm}$，

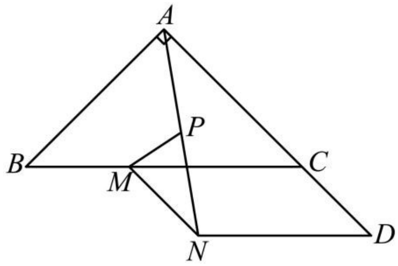
∴图中的x至少为46cm，

故答案为：46．



【点睛】本题考查勾股定理的实际应用，构造直角三角形是解题的关键．

18. 如图，在$\text{Rt}\triangle ABC$中，$\angle BAC=90^\circ$，$AB=AC=4$，D是AC延长线上的一点，$CD=2$．M是边BC上的一点（点M与点B、C不重合），以CD、CM为邻边作$\square CMND$．连接AN并取AN的中点P，连接PM，则PM的取值范围是______．

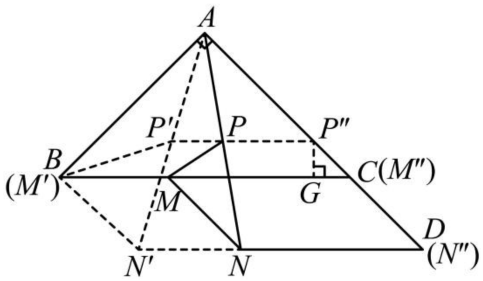


【答案】$\frac{\sqrt{2}}{2} \le PM < \sqrt{5}$

【解析】

【分析】过点 B 作 $BN' \parallel CD$ 交 CD 的延长线于点 N'，连接 AN'，过点 P 作 BC 的平行线交 AN' 于点 P'，交 AD 于点 P''，连接 BP'，过点 P'' 作 $P''G \perp BC$，分析可知 BP' 为 PM 的最大值，$P''G$ 为 PM 的最小值，据此即可求解．

【详解】解：过点 B 作 $BN' \parallel CD$ 交 CD 的延长线于点 N'，连接 AN'，过点 P 作 BC 的平行线交 AN' 于点 P'，交 AD 于点 P''，连接 BP'，过点 P'' 作 $P''G \perp BC$，如图所示：



由题意得：点 N 在线段 $N'N''$ 上运动（不与点 N', N'' 重合），点 P 在线段 $P'P''$ 上运动（不与点 P', P'' 重合）

故：BP' 为 PM 的最大值，$P''G$ 为 PM 的最小值

$\because \angle BAC = 90^\circ$，$AB = AC = 4$

$\therefore \angle ABC = \angle ACB = 45^\circ$

$\because BN' \parallel CD$

$\therefore \angle N''BC=45^{\circ}$，故$\angle ABN'=90^{\circ}$

$\because$ $CMND$ 且 $CD=2$

$\therefore BN'=2, AN'=\sqrt{AB^2+BN'^2}=2\sqrt{5}$

$\because P$ 为 AN 的中点

$\therefore BP'=\frac{1}{2}BN'=\sqrt{5}$

$\because P$ 为 AN 的中点

$\therefore$ P'' 为 AN'' 的中点

$\therefore AP''=\frac{1}{2}AN''=3, P''C=1$

$\because \angle ACB=45^{\circ}$

$\therefore P''G=CG, P''C^2=P''G^2+CG^2$

故 $P''G=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\because$点 M 与点 B、C 不重合

$\therefore$ PM 的取值范围是 $\frac{\sqrt{2}}{2}\le PM<\sqrt{5}$

故答案为：$\frac{\sqrt{2}}{2}\le PM<\sqrt{5}$

【点睛】本题综合考查了勾股定理、动点轨迹问题．根据题意确定动点轨迹是解题关键．

三、解答题（本大题共 10 小题，共 84 分．请在答题卡指定区域内作答，如无特殊说明，解答应写出文字说明、演算步骤或推理过程）

19. 先化简，再求值：$(x+1)^2-2(x+1)$，其中$x=\sqrt{2}$．

【答案】x^2-1；1

【解析】

【分析】利用完全平方公式和整式加减的运算法则进行化简，根据平方根的性质即可求得答案．

【详解】原式$=x^2+2x+1-2x-2$

$=x^2-1$．

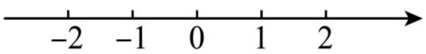
当$x=\sqrt{2}$时，

原式$=2-1$

$=1$．

【点睛】本题主要考查完全平方公式、整式 加减、平方根，牢记完全平方公式和整式加减的运算法则是解题的关键．

20. 解不等式组$\begin{cases}4x-8\le 0,\\ \dfrac{1+x}{3}<x+1\end{cases}$，把解集在数轴上表示出来，并写出整数解．



【答案】$-1<x\le 2$，整数解为：0，1，2

【解析】

【分析】先分别求出两个不等式的解集，再写出不等式组的解集，进而即可得到答案．

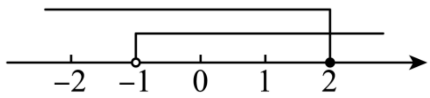
【详解】解：$\begin{cases}4x-8\le 0① \\ \dfrac{1+x}{3}<x+1②\end{cases}$，

由①得，$x\le 2$，

由②得，$x>-1$，

故不等式组的解集为：$-1<x\le2$，

在解集在数轴上表示出来为：

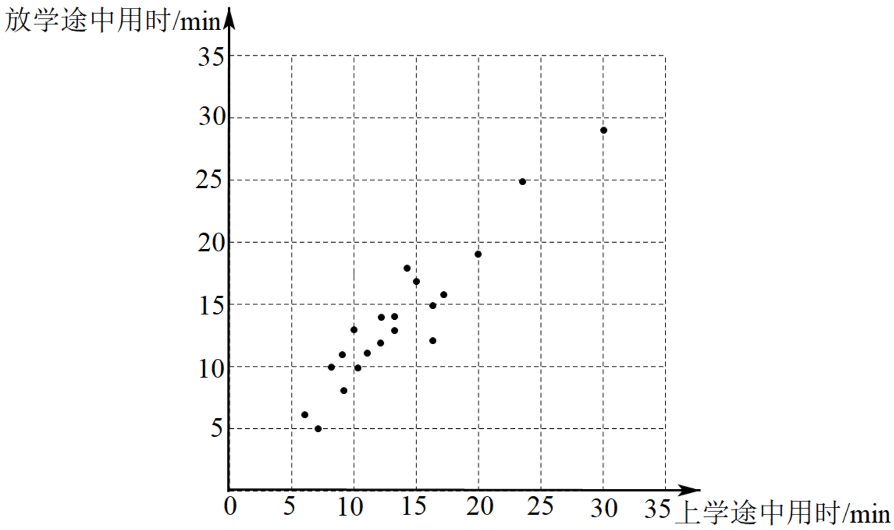


它的整数解为0，1，2．

【点睛】本题考查解一元一次不等式组，并把解集表示在数轴上，解题的关键是准确求出不等式的解集，注意不等式两边同除以一个负数不等号方向要发生改变．

21. 为合理安排进、离校时间，学校调查小组对某一天八年级学生上学、放学途中的用时情况进行了调查．

本次调查在八年级随机抽取了 20 名学生，建立以上学途中用时为横坐标、放学途中用时为纵坐标的平面直角坐标系，并根据调查结果画出相应的点，如图所示：



（1）根据图中信息，下列说法中正确的是______（写出所有正确说法的序号）：

① 这 20 名学生上学途中用时都没有超过 30min ；

② 这 20 名学生上学途中用时在 20min 以内的人数超过一半；

③ 这 20 名学生放学途中用时最短为 5min ；

④ 这 20 名学生放学途中用时的中位数为 15min ．

（2）已知该校八年级共有 400 名学生，请估计八年级学生上学途中用时超过 25min 的人数；

（3）调查小组发现，图中的点大致分布在一条直线附近．请直接写出这条直线对应的函数表达式并说明

实际意义．

【答案】（1）①②③　（2）20

（3）直线的解析式为：$y=x$；这条直线可近似反映该学校放学途中用时和上学途中用时的变化趋势．

【解析】

【分析】（1）根据图中信息，逐项分析即可求解；

（2）根据图中信息，可得上学途中用时超过 25min 的学生有 1 人，用总人数×抽取的学生中上学用时超过 25min 学生所占比例；即可求解；

（3）先画出近似直线，待定系数法求解即可得到直线的解析式．

【小问 1 详解】

解：根据在坐标系中点的位置，可知：

这 20 名学生上学途中所有用时都是没有超过 30 min 的，故①说法正确；

这 20 名学生上学途中用时在 20min 以内的人数为：17 人，超过一半，故②说法正确；

这 20 名学生放学途中用时最段的时间为 5 min，故③说法正确；

这 20 名学生放学途中用时的中位数是用时第 10 和第 11 的两名学生用时的平均数，在图中，用时第 10 和第 11 的两名学生的用时均小于 15 min，故这 20 名学生放学途中用时的中位数也小于 15min，即④说法错误；

故答案为：①②③．

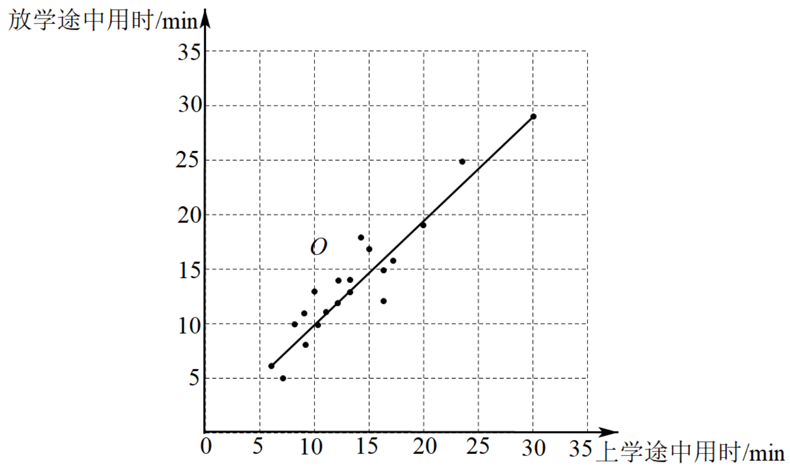
【小问 2 详解】

解：根据图中信息可知，上学途中用时超过 25min 的学生有 1 人，

故该校八年级学生上学途中用时超过 25min 的人数为 $400\times\frac{1}{20}=20$（人）．

【小问 3 详解】

解：如图：



设直线的解析式为：$y=kx+b$，根据图象可得，直线经过点$(10,10)$，$(7,7)$，

将$(10,10)$，$(7,7)$代入$y=kx+b$，得：

$$\begin{cases}10=10k+b\\7=7k+b\end{cases},$$

解得：$\begin{cases}k=1\\b=0\end{cases}$，

故直线的解析式为：$y=x$；

则这条直线可近似反映该学校学生放学途中用时和上学途中用时的变化趋势．

【点睛】本题考查了从图象获取信息，用样本估计总体，求一次函数解析式，一次函数的性质等，熟练掌握以上知识是解题的关键．

22. 在5张相同的小纸条上，分别写有：①$\sqrt{2}$；②$\sqrt{8}$；③$1$；④乘法；⑤加法．将这5张小纸条做成5支签，①、②、③放在不透明的盒子A中搅匀，④、⑤放在不透明的盒子B中搅匀．

（1）从盒子A中任意抽出1支签，抽到无理数的概率是______；

（2）先从盒子A中任意抽出2支签，再从盒子B中任意抽出1支签，求抽到的2个实数进行相应的运算后结果是无理数的概率．

【答案】（1）$\frac{2}{3}$

（2）$\frac{5}{6}$

【解析】

【分析】（1）先判断盒子 A 中无理数的个数，再根据概率公式进行计算即可；

（2）根据题意画出所有的组合情况，再计算出对应的运算结果，得到运算结果是无理数的个数，再根据概率公式进行计算即可．

【小问 1 详解】

解：$\because \sqrt{8}=2\sqrt{2}$，

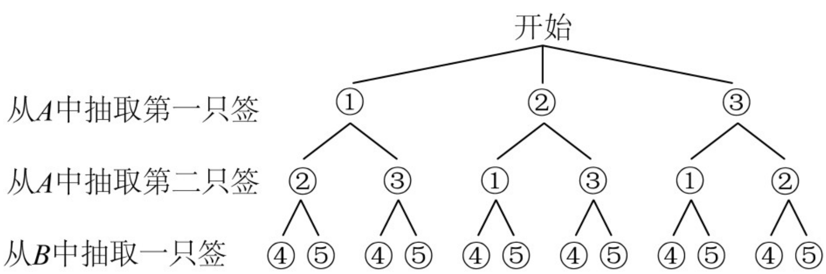
故 $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{8}$ 均为无理数，

故盒子 A 中任意抽出 1 支签，抽到无理数的概率是 $\frac{2}{3}$ ．

故答案为：$\frac{2}{3}$ ．

【小问 2 详解】

解：树状图画出所有情况为：



即抽签的组合有 12 种，分别为：

	组合情况	运算结果	运算结果是否是无理数
第一种组合	$\sqrt{2}$，$\sqrt{8}$，乘法	4	否
第二种组合	$\sqrt{2}$，$\sqrt{8}$，加法	$3\sqrt{2}$	是
第三种组合	$\sqrt{2}$，1，乘法	$\sqrt{2}$	是

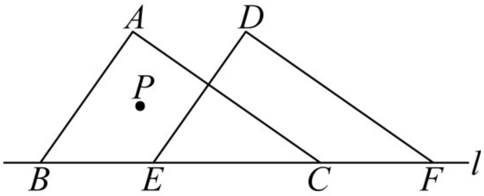
第四种组合	$\sqrt{2}$，1，加法	$\sqrt{2}+1$	是
第五种组合	$\sqrt{8}$，$\sqrt{2}$，乘法	4	否
第六种组合	$\sqrt{8}$，$\sqrt{2}$，加法	$3\sqrt{2}$	是
第七种组合	$\sqrt{8}$，1，乘法	$2\sqrt{2}$	是
第八种组合	$\sqrt{8}$，1，加法	$2\sqrt{2}+1$	是
第九种组合	1，$\sqrt{2}$，乘法	$\sqrt{2}$	是
第十种组合	1，$\sqrt{2}$，加法	$1+\sqrt{2}$	是
第十一种组合	1，$\sqrt{8}$，乘法；	$2\sqrt{2}$	是
第十二种组合	1，$\sqrt{8}$，加法	$1+2\sqrt{2}$	是

对应的组合运算结果共12个，其中运算结果为无理数的有10个，

故抽到的2个实数进行相应的运算后结果是无理数的概率为$\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$．

【点睛】本题考查了概率公式求概率，画树状图求概率，无理数的定义等，解题的关键是求所有情况下运算的结果，判断结果是无理数的个数．

23. 如图，B、E、C、F是直线l上的四点，$AB=DE$，$AC=DF$，$BE=CF$．



（1）求证：$\triangle ABC\cong\triangle DEF$；

（2）点 P 、 Q 分别是 $\triangle ABC$ 、 $\triangle DEF$ 的内心．

① 用直尺和圆规作出点 Q（保留作图痕迹，不要求写作法）；

② 连接 PQ ，则 PQ 与 BE 的关系是________．

【答案】（1）见解析　（2）①见解析　② $PQ \parallel BE$

【解析】

【分析】（1）可证得 $BC=EF$ ，结合 $AB=DE$ ， $AC=DF$ 即可证明结论．

（2）①三角形的内心为三角形的三个角的角平分线的交点，因此只需作出任意两个角的角平分线，其交点即为所求．②因为 $\triangle ABC\cong\triangle DEF$ ，所以 $\triangle DEF$ 可看作由 $\triangle ABC$ 平移得到，点 Q ，点 P 为对应点，点 B ，点 E 为对应点，据此即可求得答案．

【小问 1 详解】

$\because BE=CF$ ， $BC=BE+EC$ ， $EF=CF+EC$ ，

$\therefore BC=EF$ ．

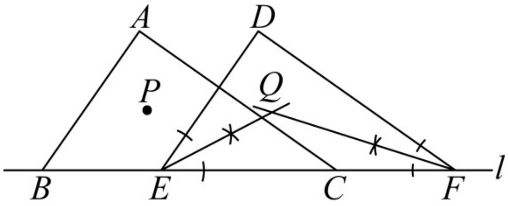
在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中

$$\begin{cases} AB=DE \\ AC=DF \\ BC=EF \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC\cong\triangle DEF$ ．

【小问 2 详解】

① 三角形的内心为三角形的三个角的平分线的交点，作 $\angle DEF$ ， $\angle DFE$ 的角平分线，其交点即为点 Q ．

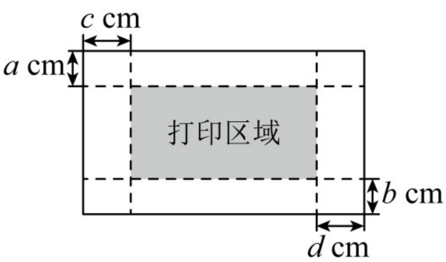


② 因为$\triangle ABC\cong\triangle DEF$，所以$\triangle DEF$可看作由$\triangle ABC$平移得到，点$Q$，点$P$为对应点，点$B$，点$E$为对应点，根据平移的性质可知$PQ\parallel BE$.

故答案为：$PQ\parallel BE$.

【点睛】本题主要考查全等三角形的判定、图形的平移，牢记全等三角形的判定方法和图形平移的性质（连接各组对应点的线段平行或在同一条直线上）是解题的关键．

24. 如图，在打印图片之前，为确定打印区域，需设置纸张大小和页边距（纸张的边线到打印区域的距离），上、下，左、右页边距分别为a cm、b cm、c cm、d cm．若纸张大小为$16\text{cm}\times10\text{cm}$，考虑到整体的美观性，要求各页边距相等并使打印区域的面积占纸张的70%，则需如何设置页边距？



【答案】1cm

【解析】

【分析】设页边距为$x\text{cm}$，根据题意找出等量关系列方程，解方程即可解题．

【详解】解：设页边距为$x\text{cm}$

则列方程为：$(16-2x)(10-2x)=16\times10\times70\%$，

解得：$x_1=1$，$x_2=12$（舍去），

答：页边距为1cm．

【点睛】本题考查一元二次方程的应用，找准等量关系列方程式解题的关键．

25. 在平面直角坐标系中，一次函数 $y=kx+b$ 的图像与反比例函数 $y=\frac{m}{x}$ 的图像相交于点 $A(2,4)$、$B(4,n)$．C 是 y 轴上的一点，连接 CA、CB．

（1）求一次函数、反比例函数的表达式；

（2）若 $\triangle ABC$ 的面积是 6，求点 C 的坐标．

【答案】（1）$y=-x+6$，$y=\frac{8}{x}$

（2）$(0,0)$ 或 $(0,12)$

【解析】

【分析】（1）先把点 A 坐标代入反比例函数解析式求出反比例函数解析式，进而求出点 B 的坐标，再把 A、B 的坐标代入一次函数解析式求出一次函数解析式即可；

（2）设点 $C(0,t)$，点 E 是一次函数 $y=-x+6$ 与 y 轴的交点，求出 $E(0,6)$，则 $CE=|6-t|$，再由 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle BEC}-S_{\triangle AEC}$，得到 $|6-t|=6$，问题随之得解．

【小问 1 详解】

解：∵点 $A(2,4)$ 在比例函数 $y=\frac{m}{x}$ 上，

$\therefore 4=\frac{m}{2}$，

$\therefore m=8$，

∴反比例函数解析式为 $y=\frac{8}{x}$，

∵点 $B(4,n)$ 在反比例函数 $y=\frac{8}{x}$ 上，

$\therefore n=\frac{8}{4}$，

$\therefore n=2$，

$\therefore B(4,2)$，

$\because$点A，点B在一次函数$y=kx+b$的图象上，

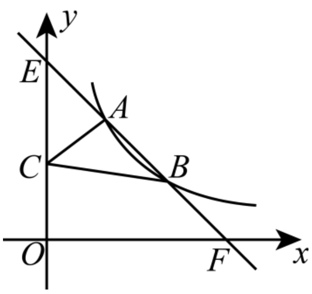
$\therefore \begin{cases}2k+b=4\\4k+b=2\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}k=-1\\b=6\end{cases}$，

$\therefore$一次函数解析式为$y=-x+6$.

【小问2详解】

解：如图，所示：



根据题意：设点$C(0,t)$，

$\because$点E是一次函数$y=-x+6$与y轴的交点，

$\therefore$点$E(0,6)$，

$\therefore CE=|6-t|$，

$\because A(2,4)$，$B(4,2)$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=S_{\triangle BEC}-S_{\triangle AEC}$，

$=\frac{1}{2}\times CE\times x_B-\frac{1}{2}\times CE\times x_A$

$=\frac{1}{2}\times|6-t|\times(x_B-x_A)$

$=|6-t|$，

$\because S_{\triangle ABC}=6$，

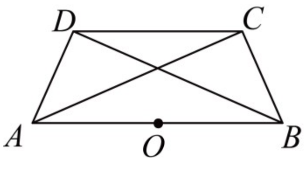
$\therefore |6-t|=6$，

$\therefore t=0$ 或 $t=12$，

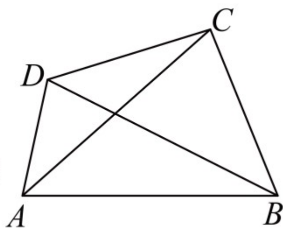
∴点 C 的坐标为 $(0,0)$ 或 $(0,12)$．

【点睛】本题主要考查了一次函数与反比例函数综合，正确求出对应的函数解析式是解题的关键．

26. 对于平面内的一个四边形，若存在点 O，使得该四边形的一条对角线绕点 O 旋转一定角度后能与另一条对角线重合，则称该四边形为“可旋四边形”，点 O 是该四边形的一个“旋点”．例如，在矩形 $MNPQ$ 中，对角线 MP、NQ 相交于点 T，则点 T 是矩形 $MNPQ$ 的一个“旋点”．



(图1)



(图2)

（1）若菱形 $ABCD$ 为“可旋四边形”，其面积是 4，则菱形 $ABCD$ 的边长是______；

（2）如图 1，四边形 $ABCD$ 为“可旋四边形”，边 AB 的中点 O 是四边形 $ABCD$ 的一个“旋点”．求 $\angle ACB$ 的度数；

（3）如图 2，在四边形 $ABCD$ 中，$AC=BD$，AD 与 BC 不平行．四边形 $ABCD$ 是否为“可旋四边形”？请说明理由．

【答案】（1）2

（2）90°

（3）是

【解析】

【分析】（1）根据“可旋四边形”的性质可得 $AC=BD$，根据正方形的判定可得菱形 $ABCD$ 为正方形，根据正方形四条边都相等的性质即可求解；

（2）连接 OC，根据“可旋四边形”的性质和题意可得 $OC=OB$，$OA=OB$，推得 $OC=OB=OA$，根据等边对等角可得 $\angle OCB=\angle OBC$，$\angle OAC=\angle OCA$，根据三角形内角和定理即可求出结果；

分别作 AD，BC 的垂直平分线，交于点 O，连接 OA，OB，OC，OD，根据垂直平分线的性质可得 $OA=OD$，$OC=OB$，根据全等三角形的判定和性质可得 $\angle AOC=\angle BOD$，求得 $\angle AOD=\angle BOC$，即可证明四边形 $ABCD$ 是“可旋四边形”．

【小问1详解】

解：∵菱形 $ABCD$ 为“可旋四边形”，

则菱形 $ABCD$ 的一条对角线 AC 绕点 O 旋转一定角度后能与另一条对角线 BD 重合，

即 $AC=BD$，

则菱形 $ABCD$ 为正方形，

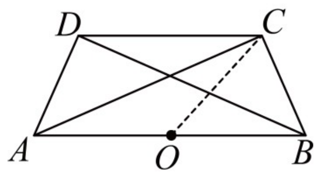
∵菱形 $ABCD$ 的面积为 4，

∴菱形 $ABCD$ 的边长是 $\sqrt{4}=2$．

故答案为：2．

【小问2详解】

解：连接OC，如图：



∵四边形$ABCD$为“可旋四边形”，且点O是四边形$ABCD$的一个“旋点”，

∴$OC=OB$，

∴$\angle OCB=\angle OBC$，

∵点O是边AB的中点，

∴$OA=OB$，

∴$OA=OC$，

∴$\angle OAC=\angle OCA$，

∵$\angle OAC+\angle OCA+\angle OCB+\angle OBC=180^\circ$，

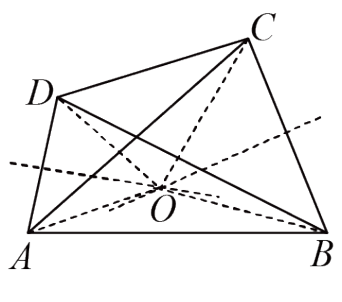
即$2(\angle OCA+\angle OCB)=180^\circ$，

∴$\angle ACB=90^\circ$．

【小问3详解】

解：四边形$ABCD$是“可旋四边形”；理由如下：

分别作AD，BC的垂直平分线，交于点O，连接OA，OB，OC，OD，如图：



∵点 O 在线段 AD 和线段 BC 的垂直平分线上，

∴ $OA=OD$，$OC=OB$，

在 $\triangle AOC$ 和 $\triangle DOB$ 中，

$\begin{cases} OA=OD \\ AC=BD \\ OC=OB \end{cases}$，

∴ $\triangle AOC\cong\triangle DOB(\text{SSS})$，

∴ $\angle AOC=\angle BOD$，

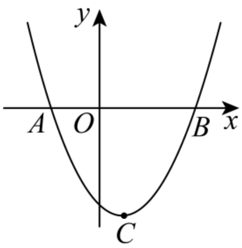
则 $\angle AOC-\angle DOC=\angle BOD-\angle DOC$，

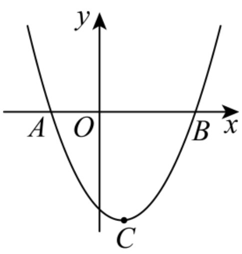
即 $\angle AOD=\angle BOC$，

∴四边形 $ABCD$ 是“可旋四边形”．

【点睛】本题考查了正方形的判定和性质，等边对等角，三角形内角和定理，垂直平分线的性质，全等三角形的判定和性质，解题的关键是做辅助线，构建全等三角形．

27. 如图，二次函数 $y=\frac{1}{2}x^2+bx-4$ 的图像与 x 轴相交于点 $A(-2,0)$、B，其顶点是 C．





(备用图)

（1）$b=$______；

（2）D 是第三象限抛物线上的一点，连接 OD，$\tan\angle AOD=\frac{5}{2}$；将原抛物线向左平移，使得平移后的抛

物线经过点 D，过点 $(k,0)$ 作 x 轴的垂线 l．已知在 l 的左侧，平移前后的两条抛物线都下降，求 k 的取值范围；

（3）将原抛物线平移，平移后的抛物线与原抛物线的对称轴相交于点 Q，且其顶点 P 落在原抛物线上，连接 PC、QC、PQ．已知 $\triangle PCQ$ 是直角三角形，求点 P 的坐标．

【答案】（1）-1；

（2）$k\le -3$；

（3）$\left(3,-\frac{5}{2}\right)$ 或 $\left(-1,-\frac{5}{2}\right)$．

【解析】

【分析】（1）把 $A(-2,0)$ 代入 $y=\frac{1}{2}x^2+bx-4$ 即可求解；

（2）过点 D 作 $DM\perp OA$ 于点 M，设 $D\left(m,\frac{1}{2}m^2-m-4\right)$，由 $\tan\angle AOD=\frac{DM}{OM}=\frac{-\frac{1}{2}m^2+m+4}{-m}=\frac{5}{2}$，

解得 $D\left(-1,-\frac{5}{2}\right)$，进而求得平移后得抛物线，

平移后得抛物线为 $y=\frac{1}{2}(x+3)^2-\frac{9}{2}$，根据二次函数得性质即可得解；

（3）先设出平移后顶点为 $P\left(p,\frac{1}{2}p^2-p-4\right)$，根据原抛物线 $y=\frac{1}{2}(x-1)^2-\frac{9}{2}$，求得原抛物线的顶点

$C\left(1,-\frac{9}{2}\right)$，对称轴为 $x=1$，进而得 $Q\left(1,p^2-2p-\frac{7}{2}\right)$，再根据勾股定理构造方程即可得解．

【小问 1 详解】

解：把 $A(-2,0)$ 代入 $y=\frac{1}{2}x^2+bx-4$ 得，

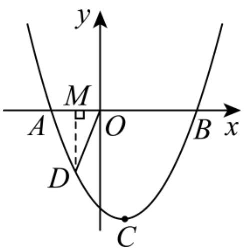
$0=\frac{1}{2}\times(-2)^2+b\times(-2)-4$，

解得$b=-1$，

故答案为-1；

【小问2详解】

解：过点D作$DM\perp OA$于点M，



$\because b=-1$，

$\therefore$二次函数的解析式为$y=\frac{1}{2}x^2-x-4$

设$D\left(m,\frac{1}{2}m^2-m-4\right)$，

$\because D$是第三象限抛物线上的一点，连接OD，$\tan\angle AOD=\frac{5}{2}$，

$\therefore\tan\angle AOD=\frac{DM}{OM}=\frac{-\frac{1}{2}m^2+m+4}{-m}=\frac{5}{2}$，

解得$m=-1$或$m=8$（舍去），

当$m=-1$时，$\frac{1}{2}m^2-m-4=\frac{1}{2}+1-4=-\frac{5}{2}$，

$\therefore D\left(-1,-\frac{5}{2}\right)$，

$\because y=\frac{1}{2}x^2-x-4=\frac{1}{2}(x-1)^2-\frac{9}{2}$，

$\therefore$设将原抛物线向左平移后的抛物线为$y=\frac{1}{2}(x+a)^2-\frac{9}{2}$，

把$D\left(-1,-\frac{5}{2}\right)$代入$y=\frac{1}{2}(x+a)^2-\frac{9}{2}$得$-\frac{5}{2}=\frac{1}{2}(-1+a)^2-\frac{9}{2}$，

解得$a=3$或$a=-1$（舍去），

$\therefore$平移后得抛物线为$y=\frac{1}{2}(x+3)^2-\frac{9}{2}$

$\because$过点$(k,0)$作x轴　垂线l．已知在l的左侧，平移前后的两条抛物线都下降，

在$y=\frac{1}{2}(x+3)^2-\frac{9}{2}$的对称轴$x=-3$的左侧，$y$随$x$的增大而减小，此时原抛物线也是$y$随$x$的增大而减小，

$\therefore k\le -3$；

【小问3详解】

解：由$y=\frac{1}{2}(x-1)^2-\frac{9}{2}$，设平移后的抛物线为$y=\frac{1}{2}(x-p)^2+q$，则顶点为$P(p,q)$，

$\because$顶点为$P(p,q)$在$y=\frac{1}{2}(x-1)^2-\frac{9}{2}$上，

$\therefore q=\frac{1}{2}(p-1)^2-\frac{9}{2}=\frac{1}{2}p^2-p-4$，

$\therefore$平移后的抛物线为$y=\frac{1}{2}(x-p)^2+\frac{1}{2}p^2-p-4$，顶点为$P\left(p,\frac{1}{2}p^2-p-4\right)$，

$\because$原抛物线$y=\frac{1}{2}(x-1)^2-\frac{9}{2}$，

∴原抛物线的顶点$C\left(1,-\frac{9}{2}\right)$，对称轴为$x=1$，

∵平移后的抛物线与原抛物线的对称轴相交于点Q，

$\therefore Q\left(1,p^2-2p-\frac{7}{2}\right)$，

∵点Q、C在直线$x=1$上，平移后的抛物线顶点P在原抛物线顶点C的上方，两抛物线的交点Q在顶点P的上方，

∴$\angle PCQ$与$\angle CQP$都是锐角，

∵$\triangle PCQ$是直角三角形，

∴$\angle CPQ=90°$，

$\therefore QC^2=PC^2+PQ^2$，

$\therefore\left(p^2-2p-\frac{7}{2}+\frac{9}{2}\right)^2=(p-1)^2+\left(\frac{1}{2}p^2-p-4+\frac{9}{2}\right)^2+(p-1)^2+\left(\frac{1}{2}p^2-p-4-p^2+2p+\frac{7}{2}\right)^2$化简得

$(p-1)^2(p-3)(p+1)=0$，

∴$p=1$（舍去），或$p=3$或$p=-1$，

当$p=3$时，$\frac{1}{2}p^2-p-4=\frac{1}{2}\times3^2-3-4=-\frac{5}{2}$，

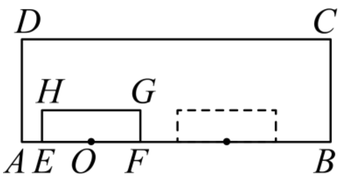
当$p=-1$时，$\frac{1}{2}\times(-1)^2+1-4=-\frac{5}{2}$，

∴点P坐标为$\left(3,-\frac{5}{2}\right)$或$\left(-1,-\frac{5}{2}\right)$．

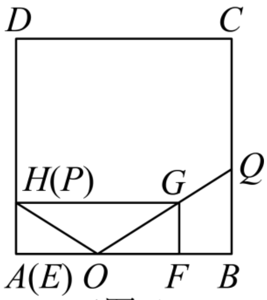
【点睛】本题考查了二次函数的图像及性质，勾股定理，解直角三角形以及待定系数法求二次函数的解析式，熟练掌握二次函数的图像及性质是解题的关键．

28. 如图1，小丽借助几何软件进行数学探究：第一步，画出矩形$ABCD$和矩形$EFGH$，点E、F在边

AB上（$EF < AB$），且点C、D、G、H在直线AB的同侧；第二步，设置$\frac{AB}{AD}=m$，$\frac{EF}{EH}=n$，矩形$EFGH$能在边AB上左右滑动；第三步，画出边EF的中点O，射线OH与射线AD相交于点P（点P、D不重合），射线OG与射线BC相交于点Q（点Q、C不重合），观测DP、CQ的长度．



（图1）



（图2）

（1）如图2，小丽取$AB=4$，$EF=3$，$m=1$，$n=3$，滑动矩形$EFGH$，当点E、A重合时，$CQ=$______；

（2）小丽滑动矩形$EFGH$，使得O恰为边AB的中点．她发现对于任意的$m \neq n$，$DP=CQ$总成立．请说明理由；

（3）经过数次操作，小丽猜想，设定m、n的某种数量关系后，滑动矩形$EFGH$，$DP=CQ$总成立．小丽的猜想是否正确？请说明理由．

【答案】（1）$\frac{7}{3}$；

（2）见解析；　（3）小丽的猜想正确，理由见解析．

【解析】

【分析】（1）证$\triangle GOF \backsim \triangle QOB$，利用相似三角形的性质即矩形的性质即可得解；

（2）证$\triangle GOF \backsim \triangle QOB$得$\frac{BQ}{GF}=\frac{OB}{OF}$，同理可得$\frac{AP}{HE}=\frac{OA}{OE}$，由$OA=OB$，$OE=OF$，得$\frac{BQ}{GF}=\frac{AP}{HE}$，进而有$BQ=AP$，再根据矩形的性质即可得证；

（3）当 $m=n$ 时，取 AB 的中点 M，连接 MC、MD，由 $\frac{AB}{AD}=\frac{EF}{EH}$，$O$ 恰为边 EF 的中点，得

$\frac{AB}{EF}=\frac{OB}{OF}=\frac{BC}{OF}$，进而证 $\triangle GOF\backsim\triangle CMB$，得 $\angle GOF=\angle CMB$，于是有 $CM\parallel OQ$，由平行线分线

段成比例得 $\frac{CQ}{OM}=\frac{CB}{BM}$，同理可证：$\frac{DP}{OM}=\frac{AD}{AM}$，于是有 $\frac{CQ}{OM}=\frac{CB}{BM}=\frac{AD}{AM}=\frac{DP}{OM}$，从而即可得解．

【小问 1 详解】

解：∵四边形 $ABCD$ 和四边形 $EFGH$ 都是矩形，

$\therefore EH=FG$，$BC=AD$，$\angle B=\angle OFG=90^{\circ}$，

$\because \frac{AB}{AD}=m=1, \frac{EF}{EH}=n=3$，$AB=4$，$EF=3$，

$\therefore AB=AD=4$，$FG=EH=1$，

$\therefore O$ 是 EF 的中点，

$\therefore OA=OF=\frac{1}{2}EF=\frac{3}{2}$，

$\therefore OB=AB-OA=4-\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$，

$\because \angle B=\angle OFG$，$\angle GOF=\angle QOB$，

$\therefore \triangle GOF\backsim\triangle QOB$，

$\therefore \frac{BQ}{GF}=\frac{OB}{OF}$ 即 $\frac{BQ}{1}=\frac{\frac{5}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{5}{3}$，

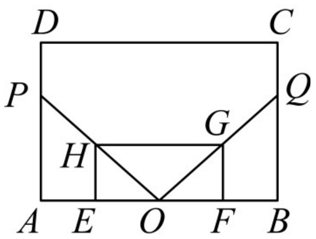
$\therefore BQ=\frac{5}{3}$ ，

$\therefore CQ=BC-BQ=\frac{7}{3}$ ，

故答案为：$\frac{7}{3}$ ；

【小问 2 详解】

证明：如下图，



解：∵小丽滑动矩形 $EFGH$ ，使得 O 恰为边 AB 的中点，

$\therefore OA=OB$ ，$OE=OF$ ，

∵四边形 $ABCD$ 和四边形 $EFGH$ 都是矩形，

$\therefore \angle B=\angle OFG=90^{\circ}$ ，$AD=BC$ ，$GF=HE$ ，

$\because \angle GOF=\angle QOB$ ，

$\therefore \triangle GOF\backsim\triangle QOB$ ，

$\therefore \frac{BQ}{GF}=\frac{OB}{OF}$ ，

同理可得 $\frac{AP}{HE}=\frac{OA}{OE}$ ，

$\because OA=OB$ ，$OE=OF$ ，

$\therefore \frac{OB}{OF}=\frac{OA}{OE}$，

$\therefore \frac{BQ}{GF}=\frac{AP}{HE}$，

$\because GF=HE$，

$\therefore BQ=AP$，

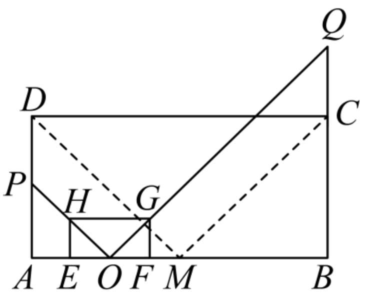
$\because AD=BC$，

$\therefore DP=CQ$；

【小问3详解】

解：小丽的猜想正确，当$m=n$时，$DP=CQ$总成立，理由如下：

如下图，取AB的中点M，连接MC、MD，



$\because$四边形$ABCD$和四边形$EFGH$都是矩形，

$\therefore \angle B=\angle OFG=90^\circ$，$AD=BC$，$GF=HE$，

$\because \frac{AB}{AD}=m, \frac{EF}{EH}=n$，$m=n$，

$\therefore \frac{AB}{AD}=\frac{EF}{EH}$，

$\because O$恰为边EF的中点，M是AB的中点，

$\therefore MA = MB$，$OE = OF$，