第21课时 二次函数的应用

【复习要点】

1、二次函数的应用常用于求解析式、交点坐标等。

（1）求解析式的一般方法：

① 已知图象上三点或三对的对应值， 通常选择一般式

。

② 已知图象的顶点坐标、对称轴、最值或最高（低）点等，通常选择顶点式______________。

③ 已知图象与 x 轴的两个交点的横坐标为 x_1、x_2， 通常选择交点式（不能做结果，要化成一般式或顶点式）。

（2）求交点坐标的一般方法：

① 求与 x 轴的交点坐标，当 y = ____代入解析式即可；求与 y 轴的交点坐标，当 x = ____代入解析式即可。

② 两个函数图像的交点，将两个函数解析式联立成方程组解出即可。

2、二次函数常用来解决最优化问题，即对于二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$，当 $x=$______时，函数有最值 y = _________。最值问题也可以通过配方解决，即将 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 配方成 $y=a(x-h)^2+k(a\neq0)$，当 $x=$_______时，函数有最值 y = ________。

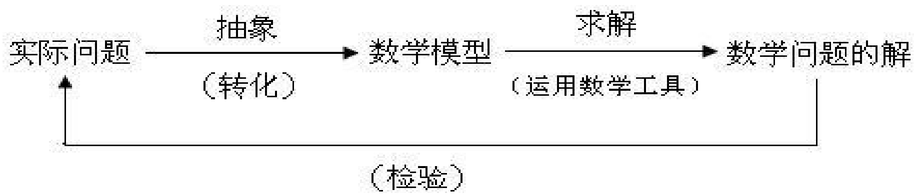
3、二次函数的实际应用包括以下方面：

（1）分析和表示不同背景下实际问题，如利润、面积、动态、数形结合等问题中变量之间的二次函数关系。

（2）运用二次函数的知识解决实际问题中的最值问题。

4、二次函数主要是利用现实情景或者纯数学情景，考查学生的数学建模能力和应用意识。

从客观事实的原型出发，具体构造数学模型的过程叫做数学建模，它的基本思路是：



【例题解析】

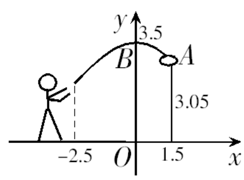


图 1

例 1：如图 1 所示，一位运动员在距篮圈中心水平距离 4 米处跳起投篮，球运行的路线是抛物线，当球运动的水平距离为 2.5 米时，达到最大高度 3.5 米，然后准确落入篮圈，已知篮圈中心到地面的距离为 3.05 米．求抛物线的表达式．

解析：因为抛物线的对称轴为 y 轴，故可设篮球运行的路线所对应的函数表达式为 $y=ax^2+k$ （$a≠0$，$k≠0$）．代入 A，B 两点坐标为

（1.5，3.05），（0，3.5）．可得：$\begin{cases}1.5^2a+k=3.05\\k=3.5\end{cases}$．解得 $a=-0.2$，所以，抛物线对应的函数表达式为 $y=-0.2x^2+3.5$．

反思：将实际问题转化为数学问题，建立适当的平面直角坐标系是解决问题的关键。建立坐标系的一般方法是尽可能将一些特殊点，如起点、最高点等放在坐标轴上或作原点，这有助于问题的解决和帮助计算。

例 2：某星期天，小明和他的爸爸开着一辆满载西瓜的大卡车首次到某古城销售，来到城门下才发现古城门为抛物线形状（如图 2 所示）．小明的爸爸把车停在城门外，仔细端详城门的高和宽以及自己卡车的大小，但还是十分担心卡车是否能够顺利通过．经询问得知，城门底部的宽为 6 米，最高点距离地面 5 米．如果卡车的高是 4 米，顶部宽是 2.8 米，那么卡车能否顺利通过？

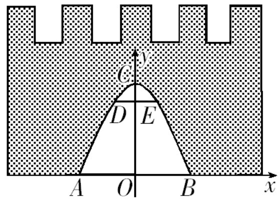


图 2

解析：欲知卡车能否顺利过城门，只须计算高 4 米处的城门的宽度是否大于 2.8 米？可建立如图 2 所示直角坐标系，则 *A*（-3，0），*B*（3，0），顶点 *C* 的坐标为（0，5），可设二次函数关系式为：$y=ax^2+5$，把点 *B* 的坐标代入，得 $0=9a+5$，$a=-\frac{5}{9}$，故 $y=-\frac{5}{9}x^2+5$．设卡车顶部刚好与 *DE* 这条线同高，则点 *D*，*E* 的纵坐标都是 4，当 $y=4$ 时，$4=-\frac{5}{9}x^2+5$ $x^2=\frac{9}{5}$，$x=\pm\frac{3\sqrt{5}}{5}$，从而 $DE=\frac{6\sqrt{5}}{5}<2.8$，所以卡车不能通过城门．

反思：此题是一道常见的拱桥、拱洞等有关抛物线的实际问题应用题，坐标系的选择建立很关键，一般选择抛物线的底（顶）部水平线为 x 轴，对称轴为 y 轴，或直接选取最高（低）点为坐标原点建立直角坐标系来解决问题。

【实弹射击】

一、选择题

1.将二次函数$y=x^2$的图象向右平移 1 个单位，再向上平移 2 个单位，所得图象的函数表达式是（ ）

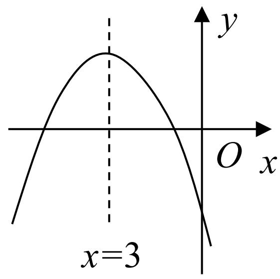
A．$y=(x-1)^2+2$　B．$y=(x+1)^2+2$　C．$y=(x-1)^2-2$　D．$y=(x+1)^2-2$

2.抛物线$y=x^2-2x+1$与 x 轴交点的个数是（ ）．

A．0　B．1　C．2　D．3

3.二次函数$y=(x-1)^2+2$的最小值是（ ）

A．2　B．1　C．-1　D．-2



4. 二次函数$y=ax^2+bx+c$的图象如图所示，若点$A(1，y_1)$、$B(2，y_2)$是它图象上的两点，则y_1与y_2的大小关系是（ ）

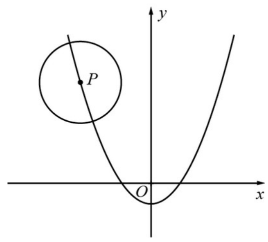
A．$y_1<y_2$　B．$y_1=y_2$　C．$y_1>y_2$　D．不能确定

二、填空题

5. 某种火箭被竖直向上发射时，它的高度$h(\mathrm{m})$与时间$t(\mathrm{s})$的关系可以用公式$h=-5t^2+150t+10$表示．经过________ s，火箭达到它的最高点．

6.将 $y=2x^2-12x-12$ 变为 $y=a(x-m)^2+n$ 的形式，则 $m\cdot n=$______ .

7. 如图，已知⊙*P* 的半径为 2，圆心 *P* 在抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2-1$ 上运动，当⊙*P* 与 x 轴相切时，圆心 *P* 的坐标为_____.



8.抛物线 $y=x^2-4x+\frac{m}{2}$ 与 x 轴的一个交点的坐标为 $(1,0)$，则此抛物线与 x 轴的另一个交点的坐标是________.

9.小颖同学想用“描点法”画二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图象，取自变量 x 的 5 个值，分别计算出对应的 y 值，如下表：

x	…	-2	-1	0	1	2	…
y	…	11	2	-1	2	5	…

由于粗心，小颖算错了其中的一个 y 值，请你指出这个算错的 y 值所对应的 $x=$_______ .

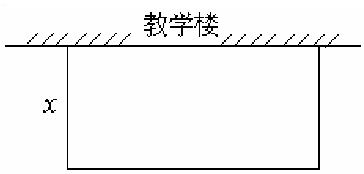
三、解答题

10. 已知二次函数 $y=x^2+bx+c+1$ 的图象过点 P（2，1）.

（1）求证：$c=-2b-4$；

（2）求 bc 的最大值；

（3）若二次函数的图象与 x 轴交于点 A（x_1，0）、 B（x_2，0），△ *ABP* 的面积是 $\frac{3}{4}$，求 b 的值.



11.如图，某中学要在教学楼后面的空地上用 40 米长的竹篱笆围出一个矩形地块作生物园，矩形的一边用教学楼的外墙,其余三边用竹篱笆. 设矩形的宽为x,面积为y.

(1) 求y与x的函数关系式,并求自变量x的取值范围;

(2) 生物园的面积能否达到 210 平方米?说明理由.

12.某宾馆有 50 个房间供游客住宿，当每个房间的房价为每天 l80 元时，房间会全部住满．当每个房间每天的房价每增加 10 元时，就会有一个房间空闲．宾馆需对游客居住的每个房间每天支出 20 元的各种费用．根据规定，每个房间每天的房价不得高于 340 元．设每个房间的房价每天增加x元(x为 10 的正整数倍)．

(1) 设一天订住的房间数为y，直接写出 y 与 x 的函数关系式及自变量 x 的取值范围；

(2) 设宾馆一天的利润为w元，求w与x的函数关系式；

(3) 一天订住多少个房间时，宾馆的利润最大? 最大利润是多少元?

13. 如图，直角梯形 $OABC$ 中，$OC\parallel AB$，C（0，3），B（4，1），以 BC 为直径的圆交 x 轴于 E，D 两点（D 点在 E 点右方）.

（1）求点 E,D 的坐标;

（2）求过 B,C,D 三点的抛物线的函数关系式；

(3)过 B,C,D 三点的抛物线上是否存在点 Q，使 $\triangle BDQ$ 是以 BD 为直角边的直角三角形？若不存在，说明理由；若存在，求出点 Q 的坐标.