2014年陕西省中考数学试卷

一、选择题（共10小题，每小题3分，共30分）

1．（3分）(2014年陕西省)4的算术平方根是（　　）

A．－2 B．2 C．±2 D．16

考点：　算术平方根．

分析：　根据算术平方根的定义进行解答即可．

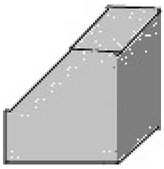
解答：　解：∵$2^2=4$，

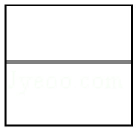
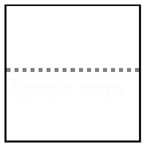
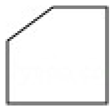
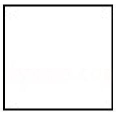
∴4的算术平方根是2．

故选B．

点评：　本题考查了算术平方根的定义，熟记定义是解题的关键．

2．（3分）(2014年陕西省)如图是一个正方体被截去一个直三棱柱得到的几何体，则该几何体的左视图是（　　）



A．  B．  C．  D． 

考点：　简单几何体的三视图；截一个几何体．

分析：　根据三视图的特点，知道左视图从图形的左边向右边看，看到一个正方形的面，在面上有一条实线，得到结果．

解答：　解：左视图从图形的左边向右边看，

看到一个正方形的面，

在面上有一条实线，

故选：A．

点评：　本题考查空间图形的三视图，本题是一个基础题，正确把握三视图观察角度是解题关键．

3．（3分）(2014年陕西省)若点A（－2，m）在正比例函数$y=-\frac{1}{2}x$的图象上，则m的值是（　　）

A．$\frac{1}{4}$ B．$-\frac{1}{4}$ C．1 D．－1

考点：　一次函数图象上点的坐标特征．

分析：　利用待定系数法代入正比例函数 $y=-\frac{1}{2}x$ 可得 m 的值．

解答：　解：∵点 A（﹣2，m）在正比例函数 $y=-\frac{1}{2}x$ 的图象上，

∴$m=-\frac{1}{2}\times(-2)=1$，

故选：C．

点评：　此题主要考查了一次函数图象上点的坐标特点，关键是掌握凡是函数图象经过的点必能满足解析式．

4．（3 分）(2014 年陕西省)小军旅行箱的密码是一个六位数，由于他忘记了密码的末位数字，则小军能一次打开该旅行箱的概率是（　　）

A．$\frac{1}{10}$　B．$\frac{1}{9}$　C．$\frac{1}{6}$　D．$\frac{1}{5}$

考点：　概率公式．

分析：　由一共有 10 种等可能的结果，小军能一次打开该旅行箱的只有 1 种情况，直接利用概率公式求解即可求得答案．

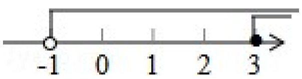
解答：　解：∵一共有 10 种等可能的结果，小军能一次打开该旅行箱的只有 1 种情况，

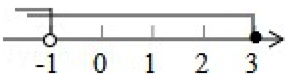
∴小军能一次打开该旅行箱的概率是：$\frac{1}{10}$．

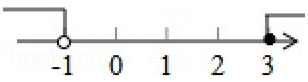
故选 A．

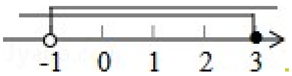
点评：　此题考查了概率公式的应用．用到的知识点为：概率=所求情况数与总情况数之比．

5．（3 分）(2014 年陕西省)把不等式组 $\begin{cases}x+2>1\\3-x\geqslant0\end{cases}$ 的解集表示在数轴上，正确的是（　　）

A．

B．

C．

D．

考点：　在数轴上表示不等式的解集；解一元一次不等式组．

分析：　先求出不等式组中每一个不等式的解集，再求出它们的公共部分，然后把不等式的解集表示在数轴上即可

解答：　解：$\begin{cases}x+2>1\\3-x\geqslant0\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x>-1\\x\leqslant3\end{cases}$，

故选：D．

点评： 把每个不等式的解集在数轴上表示出来（>，≥向右画；<，≤向左画），数轴上的点把数轴分成若干段，如果数轴的某一段上面表示解集的线的条数与不等式的个数一样，那么这段就是不等式组的解集．有几个就要几个．在表示解集时“≥”，“≤”要用实心圆点表示；“<”，“>”要用空心圆点表示．

6．（3分）(2014年陕西省)某区10名学生参加市级汉字听写大赛，他们得分情况如下表：

人数	3	4	2	1
分数	80	85	90	95

那么这10名学生所得分数的平均数和众数分别是（　　）

A． 85和82.5　B．85.5和85　C．85和85　D．85.5和80

考点： 众数；中位数．

分析： 根据众数及平均数的定义，即可得出答案．

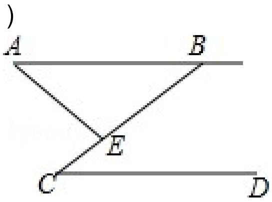
解答： 解：这组数据中85出现的次数最多，故众数是85；

平均数=$\frac{1}{10}$（80×3+085×4+90×2+95×1）=85．

故选B．

点评： 本题考查了众数及平均数的知识，掌握各部分的概念是解题关键．

7．（3分）(2014年陕西省)如图，AB∥CD，∠A=45°，∠C=28°，则∠AEC的大小为（　　）



A． 17° B． 62° C． 63° D． 73°

考点： 平行线的性质．

分析： 首先根据两直线平行，内错角相等可得∠ABC=∠C=28°，再根据三角形内角与外角的性质可得∠AEC=∠A+∠ABC．

解答： 解：∵AB∥CD，

∴∠ABC=∠C=28°，

∵∠A=45°，

∴∠AEC=∠A+∠ABC=28°+45°=73°，

故选：D．

点评： 此题主要考查了平行线的性质，以及三角形内角与外角的性质，关键是掌握两直线平行，内错角相等，三角形的外角等于与它不相邻的两个内角之和．

8．（3分）(2014年陕西省)若x=﹣2是关于x的一元二次方程$x^2-\frac{5}{2}ax+a^2=0$的一个根，则a的值为（　　）

A． 1或4　B．﹣1或﹣4　C．﹣1或4　D．1或﹣4

考点： 一元二次方程的解．

分析： 将 $x=-2$ 代入关于 x 的一元二次方程 $x^2-\frac{5}{2}ax+a^2=0$，再解关于 a 的一元二次方程即可．

解答： 解：∵$x=-2$ 是关于 x 的一元二次方程 $x^2-\frac{5}{2}ax+a^2=0$ 的一个根，

∴$4+5a+a^2=0$，

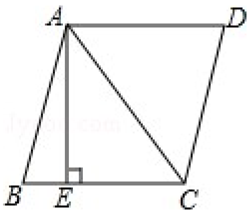
∴$(a+1)(a+4)=0$，

解得 $a_1=-1$，$a_2=-4$，

故选 B．

点评： 本题主要考查了一元二次方程的解的定义，解题关键是把 x 的值代入，再解关于 a 的方程即可．

9．(3 分)(2014 年陕西省)如图，在菱形 ABCD 中，AB=5，对角线 AC=6．若过点 A 作 AE⊥BC，垂足为 E，则 AE 的长为（ ）



A． 4 B． $\frac{12}{5}$ C． $\frac{24}{5}$ D． 5

考点： 菱形的性质．

分析： 连接 BD，根据菱形的性质可得 AC⊥BD，$AO=\frac{1}{2}AC$，然后根据勾股定理计算出 BO 长，再算出菱形的面积，然后再根据面积公式 $BC\bullet AE=\frac{1}{2}AC\bullet BD$ 可得答案．

解答： 解：连接 BD，

∵四边形 ABCD 是菱形，

∴AC⊥BD，$AO=\frac{1}{2}AC$，BD=2BO，

∴∠AOB=90°，

∵AC=6，

∴AO=3，

∴$B0=\sqrt{25-9}=4$，

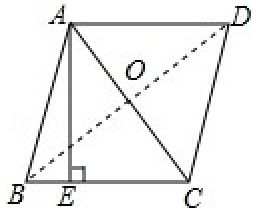
∴DB=8，

∴菱形 ABCD 的面积是 $\frac{1}{2}\times AC\bullet DB=\frac{1}{2}\times 6\times 8=24$，

∴$BC\bullet AE=24$，

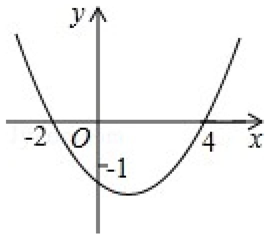
$AE=\frac{24}{5}$，

故选：C．



点评：　此题主要考查了菱形的性质，以及菱形的性质面积，关键是掌握菱形的对角线互相垂直且平分．

10．（3 分）(2014 年陕西省)二次函数 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）的图象如图，则下列结论中正确的是（　　）



A．　$c>-1$　B．$b>0$　C．$2a+b\neq0$　D．$9a+c>3b$

考点：　二次函数图象与系数的关系．

专题：　数形结合．

分析：　由抛物线与 y 轴的交点在点（0，﹣1）的下方得到 $c<-1$；由抛物线开口方向得 $a>0$，再由抛物线的对称轴在 y 轴的右侧得 a、b 异号，即 $b<0$；由于抛物线过点（﹣2，0）、（4，0），根据抛物线的对称性得到抛物线对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2a}=1$，则 $2a+b=0$；由于当 $x=-3$ 时，$y<0$，所以 $9a-3b+c>0$，即 $9a+c>3b$．

解答：　解：∵抛物线与 y 轴的交点在点（0，﹣1）的下方．

∴$c<-1$；

∵抛物线开口向上，

∴$a>0$，

∵抛物线的对称轴在 y 轴的右侧，

∴$x=-\frac{b}{2a}>0$，

∴$b<0$；

∵抛物线过点（﹣2，0）、（4，0），

∴抛物线对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2a}=1$，

∴$2a+b=0$；

∵当 $x=-3$ 时，$y<0$，

∴$9a-3b+c>0$，

即 $9a+c>3b$．

故选 D．

点评： 本题考查了二次函数的图象与系数的关系：二次函数 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）的图象为抛物线，当 $a>0$，抛物线开口向上；对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2a}$；抛物线与 y 轴的交点坐标为（0，c）；当 $b^2-4ac>0$，抛物线与 x 轴有两个交点；当 $b^2-4ac=0$，抛物线与 x 轴有一个交点；当 $b^2-4ac<0$，抛物线与 x 轴没有交点．

二、填空题（共 2 小题，每小题 3 分，共 18 分）

11．（3 分）(2014 年陕西省)计算：$\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}=$__9__．

考点： 负整数指数幂．

专题： 计算题．

分析： 根据负整数指数幂的运算法则进行计算即可．

解答： 解：原式$=\frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{1}{\frac{1}{9}}=9$．

故答案为：9．

点评： 本题考查的是负整数指数幂，即负整数指数幂等于该数对应的正整数指数幂的倒数．

12．（3 分）(2014 年陕西省)因式分解：m（x－y）+n（x－y）=__（x－y）（ m+n）__．

考点： 因式分解-提公因式法．

分析： 直接提取公因式（x－y），进而得出答案．

解答： 解：m（x－y）+n（x－y）=（x－y）（ m+n）．

故答案为：（x－y）（ m+n）．

点评： 此题主要考查了提取公因式法分解因式，正确找出公因式是解题关键．

请从以下两个小题中任选一个作答，若多选，则按所选做的第一题计分.

13．（3 分）(2014 年陕西省)一个正五边形的对称轴共有__5__条．

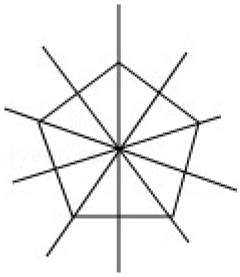
考点： 轴对称的性质．

分析： 过正五边形的五个顶点作对边的垂线，可得对称轴．

解答： 解：如图，

正五边形的对称轴共有 5 条．

故答案为：5．



点评： 本题考查了轴对称的性质，熟记正五边形的对称性是解题的关键．

14．(2014年陕西省)用科学计算器计算：$\sqrt{31}$+3tan56°≈__10.02__（结果精确到0.01）

考点： 计算器—三角函数；计算器—数的开方．

分析： 先用计算器求出$\sqrt{31}$、tan56°的值，再计算加减运算．

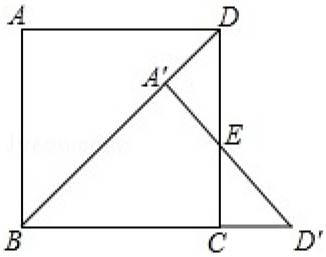
解答： 解：$\sqrt{31}$≈5.5678，tan56°≈1.4826，

则$\sqrt{31}$+3tan56°≈5.5678+3×1.4826≈10.02

故答案是：10.02．

点评： 本题考查了计算器的使用，要注意此题是精确到0.01．

15．（3分）(2014年陕西省)如图，在正方形ABCD中，AD=1，将△ABD绕点B顺时针旋转45°得到△A′BD′，此时A′D′与CD交于点E，则DE的长度为__$2-\sqrt{2}$__．



考点： 旋转的性质．

分析： 利用正方形和旋转的性质得出A′D=A′E，进而利用勾股定理得出BD的长，进而利用锐角三角函数关系得出DE的长即可．

解答： 解：由题意可得出：∠BDC=45°，∠DA′E=90°，

∴∠DEA′=45°，

∴A′D=A′E，

∵在正方形ABCD中，AD=1，

∴AB=A′B=1，

∴BD=$\sqrt{2}$，

∴A′D=$\sqrt{2}-1$，

∴在Rt△DA′E中，

DE=$\frac{DA'}{\sin 45°}=2-\sqrt{2}$．

故答案为：$2-\sqrt{2}$．

点评： 此题主要考查了正方形和旋转的性质以及勾股定理、锐角三角函数关系等知识，得出A′D的长是解题关键．

16．（3分）(2014年陕西省)已知P_1（x_1，y_1），P_2（x_2，y_2）是同一个反比例函数图象上的两点，若$x_2=x_1+2$，且$\frac{1}{y_2}=\frac{1}{y_1}+\frac{1}{2}$，则这个反比例函数的表达式为__$y=\frac{4}{x}$__．

考点： 反比例函数图象上点的坐标特征．

分析： 设这个反比例函数的表达式为 $y=\frac{k}{x}$，将 P_1（x_1，y_1），P_2（x_2，y_2）代入得 $x_1\bullet y_1=x_2\bullet y_2=k$，所以 $\frac{1}{y_1}=\frac{x_1}{k}$，$\frac{1}{y_2}=\frac{x_2}{k}$，由 $\frac{1}{y_2}=\frac{1}{y_1}+\frac{1}{2}$，得 $\frac{1}{k}$（x_2-x_1）$=\frac{1}{2}$，将 $x_2=x_1+2$ 代入，求出 $k=4$，得出这个反比例函数的表达式为 $y=\frac{4}{x}$．

解答： 解：设这个反比例函数的表达式为 $y=\frac{k}{x}$，

∵P_1（x_1，y_1），P_2（x_2，y_2）是同一个反比例函数图象上的两点，

∴$x_1\bullet y_1=x_2\bullet y_2=k$，

∴$\frac{1}{y_1}=\frac{x_1}{k}$，$\frac{1}{y_2}=\frac{x_2}{k}$，

∵$\frac{1}{y_2}=\frac{1}{y_1}+\frac{1}{2}$，

∴$\frac{x_2}{k}=\frac{x_1}{k}+\frac{1}{2}$，

∴$\frac{1}{k}$（x_2-x_1）$=\frac{1}{2}$，

∵$x_2=x_1+2$，

∴$\frac{1}{k}\times 2=\frac{1}{2}$，

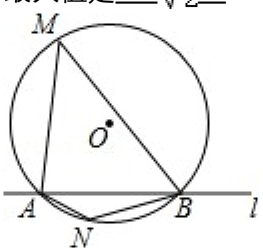
∴$k=4$，

∴这个反比例函数的表达式为 $y=\frac{4}{x}$．

故答案为 $y=\frac{4}{x}$．

点评： 本题考查了反比例函数图象上点的坐标特征，所有在反比例函数上的点的横纵坐标的积应等于比例系数．同时考查了式子的变形．

17．（3分）(2014年陕西省)如图，⊙O的半径是2，直线l与⊙O相交于A、B两点，M、N是⊙O上的两个动点，且在直线l的异侧，若∠AMB=45°，则四边形MANB面积的最大值是 $4\sqrt{2}$ ．



考点： 垂径定理；圆周角定理．

专题： 计算题．

分析：　过点O作OC⊥AB于C，交⊙O于D、E两点，连结OA、OB、DA、DB、EA、EB，根据圆周角定理得∠AOB=2∠AMB=90°，则△OAB为等腰直角三角形，所以AB=$\sqrt{2}$OA=2$\sqrt{2}$，由于$S_{四边形MANB}=S_{\triangle MAB}+S_{\triangle NAB}$，而当M点到AB的距离最大，△MAB的面积最大；当N点到AB的距离最大时，△NAB的面积最大，即M点运动到D点，N点运动到E点，所以四边形MANB面积的最大值=$S_{四边形DAEB}=S_{\triangle DAB}+S_{\triangle EAB}=\frac{1}{2}AB\cdot CD+\frac{1}{2}AB\cdot CE=\frac{1}{2}AB（CD+CE）=\frac{1}{2}AB\cdot DE=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times 4=4\sqrt{2}$．

解答：　解：过点O作OC⊥AB于C，交⊙O于D、E两点，连结OA、OB、DA、DB、EA、EB，如图，

∵∠AMB=45°，

∴∠AOB=2∠AMB=90°，

∴△OAB为等腰直角三角形，

∴AB=$\sqrt{2}$OA=2$\sqrt{2}$，

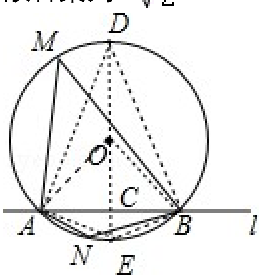
∵$S_{四边形MANB}=S_{\triangle MAB}+S_{\triangle NAB}$，

∴当M点到AB的距离最大，△MAB的面积最大；当N点到AB的距离最大时，△NAB的面积最大，

即M点运动到D点，N点运动到E点，

此时四边形MANB面积的最大值=$S_{四边形DAEB}=S_{\triangle DAB}+S_{\triangle EAB}=\frac{1}{2}AB\cdot CD+\frac{1}{2}AB\cdot CE=\frac{1}{2}AB（CD+CE）=\frac{1}{2}AB\cdot DE=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times 4=4\sqrt{2}$．

故答案为$4\sqrt{2}$．



点评：　本题考查了垂径定理：平分弦的直径平分这条弦，并且平分弦所对的两条弧．也考查了圆周角定理．

四、解答题（共9小题，计72分）

18．（5分）(2014年陕西省)先化简，再求值：$\frac{2x^2}{x^2-1}-\frac{x}{x+1}$，其中x=$-\frac{1}{2}$．

考点：　分式的化简求值．

专题：　计算题．

分析：　原式通分并利用同分母分式的减法法则计算得到最简结果，将x的值代入计算即可求出值．

解答：　解：原式=$\frac{2x^2}{(x+1)(x-1)}-\frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)}$

$=\frac{x(x+1)}{(x+1)(x-1)}$

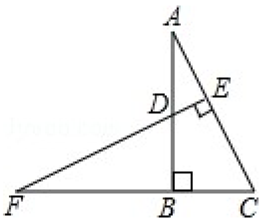
$=\frac{x}{x-1}$，

当 $x=-\frac{1}{2}$时，原式$=\frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{3}$．

点评： 此题考查了分式的化简求值，熟练掌握运算法则是解本题的关键．

19．（6分）(2014年陕西省)如图，在Rt△ABC中，∠ABC=90°，点D在边AB上，使DB=BC，过点D作EF⊥AC，分别交AC于点E，CB的延长线于点F．

求证：AB=BF．



考点： 全等三角形的判定与性质．

专题： 证明题．

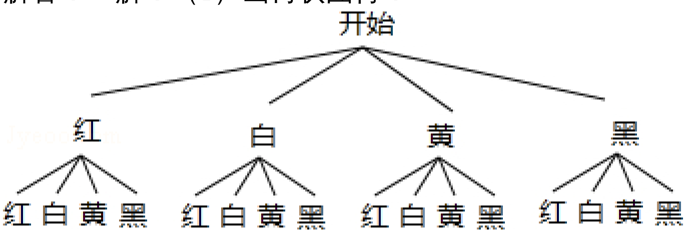
分析： 根据EF⊥AC，得∠F+∠C=90°，再由已知得∠A=∠F，从而AAS证明△FBD≌△ABC，则AB=BF．

解答： 证明：∵EF⊥AC，

分析： （1）首先根据题意画出树状图，然后由树状图求得所有等可能的结果与小英和母亲随机各摸球一次，均摸出白球的情况，再利用概率公式即可求得答案；

（2）由（1）得：共有16种等可能的结果，小英和母亲随机各摸球一次，至少有一人摸出黄球的有7种情况，然后利用概率公式求解即可求得答案．

解答： 解：（1）画树状图得：



∵共有16种等可能的结果，小英和母亲随机各摸球一次，均摸出白球的只有1种情况，

∴小英和母亲随机各摸球一次，均摸出白球的概率是：$\frac{1}{16}$；

（2）由（1）得：共有16种等可能的结果，小英和母亲随机各摸球一次，至少有一人摸出黄球的有7种情况，

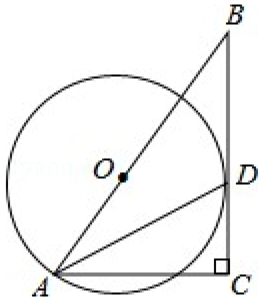
∴小英和母亲随机各摸球一次，至少有一人摸出黄球的概率是：$\frac{7}{16}$．

点评：　本题考查的是用列表法或画树状图法求概率．列表法或画树状图法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果，列表法适合于两步完成的事件，树状图法适合两步或两步以上完成的事件．用到的知识点为：概率=所求情况数与总情况数之比．

24．（8分）(2014年陕西省)如图，⊙O的半径为4，B是⊙O外一点，连接OB，且OB=6，过点B作⊙O的切线BD，切点为D，延长BO交⊙O于点A，过点A作切线BD的垂线，垂足为C．

（1）求证：AD平分∠BAC；

（2）求AC的长．



考点：　切线的性质；相似三角形的判定与性质．

分析：　（1）首先连接OD，由BD是⊙O的切线，AC⊥BD，易证得OD∥AC，继而可证得AD平分∠BAC；

（2）由OD∥AC，易证得△BOD∽△BAC，然后由相似三角形的对应边成比例，求得AC的长．

解答：　（1）证明：连接OD，

∵BD是⊙O的切线，

∴OD⊥BD，

∵AC⊥BD，

∴OD∥AC，

∴∠2=∠3，

∵OA=OD，

∴∠1=∠3，

∴∠1=∠2，

即AD平分∠BAC；

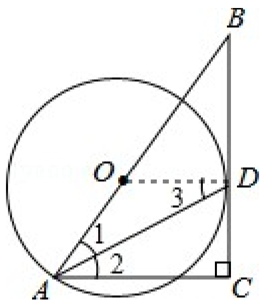
（2）解：∵OD∥AC，

∴△BOD∽△BAC，

∴$\frac{OD}{AC}=\frac{BO}{BA}$，

∴$\frac{4}{AC}=\frac{6}{10}$，

解得：AC=$\frac{20}{3}$．



点评： 此题考查了切线的性质以及相似三角形的判定与性质．此题难度适中，注意掌握辅助线的作法，注意掌握数形结合思想的应用．

25．（10分）(2014年陕西省)已知抛物线C：$y=-x^2+bx+c$经过A（﹣3，0）和B（0，3）两点，将这条抛物线的顶点记为M，它的对称轴与x轴的交点记为N．

（1）求抛物线C的表达式；

（2）求点M的坐标；

（3）将抛物线C平移到C′，抛物线C′的顶点记为M′，它的对称轴与x轴的交点记为N′．如果以点M、N、M′、N′为顶点的四边形是面积为16的平行四边形，那么应将抛物线C怎样平移？为什么？

分析： （1）直接把A（﹣3，0）和B（0，3）两点代入抛物线$y=-x^2+bx+c$，求出b，c的值即可；

（2）根据（1）中抛物线的解析式可得出其顶点坐标；

（3）根据平行四边形的定义，可知有四种情形符合条件，如解答图所示．需要分类讨论．

解答： 解：（1）∵抛物线$y=-x^2+bx+c$经过A（﹣3，0）和B（0，3）两点，

∴$\begin{cases}-9-3b+c=0\\c=3\end{cases}$，解得$\begin{cases}b=-2\\c=3\end{cases}$，

故此抛物线的解析式为：$y=-x^2-2x+3$；

（2）∵由（1）知抛物线的解析式为：$y=-x^2-2x+3$，

∴当$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-2}{2\times(-1)}=-1$时，y=4，

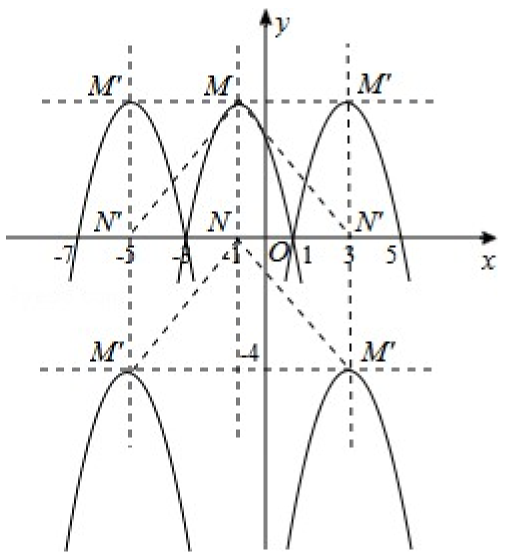
∴M（﹣1，4）．

（3）由题意，以点M、N、M′、N′为顶点的平行四边形的边MN的对边只能是M′N′，

∴MN∥M′N′且MN=M′N′．

∴MN•NN′=16，

∴NN′=4．



i）当 M、N、M′、N′为顶点的平行四边形是▱MNN′M′时，将抛物线 C 向左或向右平移 4 个单位可得符合条件的抛物线 C′；

ii）当 M、N、M′、N′为顶点的平行四边形是▱MNM′N′时，将抛物线 C 先向左或向右平移 4 个单位，再向下平移 8 个单位，可得符合条件的抛物线 C′．

∴上述的四种平移，均可得到符合条件的抛物线 C′．

点评：　本题考查了抛物线的平移变换、平行四边形的性质、待定系数法及二次函数的图象与性质等知识点．第（3）问需要分类讨论，避免漏解．

26．（12 分）(2014 年陕西省)问题探究

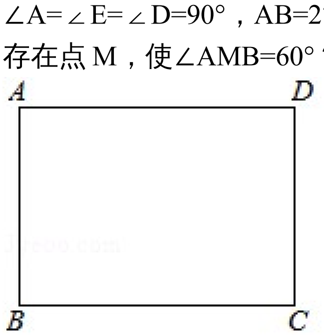
（1）如图①，在矩形 ABCD 中，AB=3，BC=4，如果 BC 边上存在点 P，使△APD 为等腰三角形，那么请画出满足条件的一个等腰三角形△APD，并求出此时 BP 的长；

（2）如图②，在△ABC 中，∠ABC=60°，BC=12，AD 是 BC 边上的高，E、F 分别为边 AB、AC 的中点，当 AD=6 时，BC 边上存在一点 Q，使∠EQF=90°，求此时 BQ 的长；

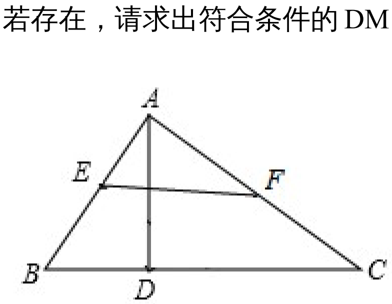
问题解决

（3）有一山庄，它的平面图为如图③的五边形 ABCDE，山庄保卫人员想在线段 CD 上选一点 M 安装监控装置，用来监视边 AB，现只要使∠AMB 大约为 60°，就可以让监控装置的效果达到最佳，已知

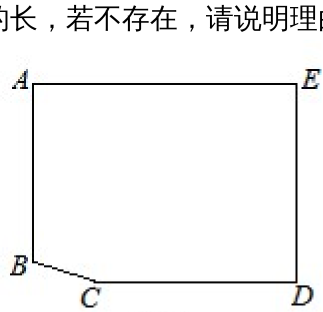
∠A=∠E=∠D=90°，AB=270m，AE=400m，ED=285m，CD=340m，问在线段 CD 上是否存在点 M，使∠AMB=60°？若存在，请求出符合条件的 DM 的长，若不存在，请说明理由．



图①



图②



图③

考点： 圆的综合题；全等三角形的判定与性质；等边三角形的性质；勾股定理；三角形中位线定理；矩形的性质；正方形的判定与性质；直线与圆的位置关系；特殊角的三角函数值．

专题： 压轴题；存在型．

分析： （1）由于△PAD是等腰三角形，底边不定，需三种情况讨论，运用三角形全等、矩形的性质、勾股定理等知识即可解决问题．

（2）以EF为直径作⊙O，易证⊙O与BC相切，从而得到符合条件的点Q唯一，然后通过添加辅助线，借助于正方形、特殊角的三角函数值等知识即可求出BQ长．

（3）要满足∠AMB=60°，可构造以AB为边的等边三角形的外接圆，该圆与线段CD的交点就是满足条件的点，然后借助于等边三角形的性质、特殊角的三角函数值等知识，就可算出符合条件的DM长．

解答： 解：（1）①作AD的垂直平分线交BC于点P，如图①，

则PA=PD．

∴△PAD是等腰三角形．

∵四边形ABCD是矩形，

∴AB=DC，∠B=∠C=90°．

∵PA=PD，AB=DC，

∴Rt△ABP≌Rt△DCP（HL）．

∴BP=CP．

∵BC=4，

∴BP=CP=2．

②以点D为圆心，AD为半径画弧，交BC于点P′，如图①，．

则DA=DP′．

∴△P′AD是等腰三角形．

∵四边形ABCD是矩形，

∴AD=BC，AB=DC，∠C=90°．

∵AB=3，BC=4，

∴DC=3，DP′=4．

∴CP′=$\sqrt{4^2-3^2}$=$\sqrt{7}$．

∴BP′=4﹣$\sqrt{7}$．

③点A为圆心，AD为半径画弧，交BC于点P″，如图①，

则AD=AP″．

∴△P″AD是等腰三角形．

同理可得：BP″=$\sqrt{7}$．

综上所述：在等腰三角形△ADP中，

若PA=PD，则BP=2；

若DP=DA，则BP=4﹣$\sqrt{7}$；

若AP=AD，则BP=$\sqrt{7}$．

（2）∵E、F分别为边AB、AC的中点，

∴EF∥BC，EF=$\frac{1}{2}$BC．

∵BC=12，

$\therefore EF=6$．
以 EF 为直径作⊙O，过点 O 作 $OQ\perp BC$，垂足为 Q，连接 EQ、FQ，如图②．
$\because AD\perp BC$，$AD=6$，
$\therefore$ EF 与 BC 之间的距离为 3．
$\therefore OQ=3$
$\therefore OQ=OE=3$．
$\therefore$ ⊙O 与 BC 相切，切点为 Q．
$\because$ EF 为⊙O 的直径，
$\therefore \angle EQF=90°$．
过点 E 作 $EG\perp BC$，垂足为 G，如图②．
$\because EG\perp BC$，$OQ\perp BC$，
$\therefore EG\parallel OQ$．
$\because EO\parallel GQ$，$EG\parallel OQ$，$\angle EGQ=90°$，$OE=OQ$，
$\therefore$ 四边形 OEGQ 是正方形．
$\therefore GQ=EO=3$，$EG=OQ=3$．
$\because \angle B=60°$，$\angle EGB=90°$，$EG=3$，
$\therefore BG=\sqrt{3}$．
$\therefore BQ=GQ+BG=3+\sqrt{3}$．
$\therefore$ 当 $\angle EQF=90°$ 时，BQ 的长为 $3+\sqrt{3}$．

（3）在线段 CD 上存在点 M，使 $\angle AMB=60°$．
理由如下：
以 AB 为边，在 AB 的右侧作等边三角形 ABG，
作 $GP\perp AB$，垂足为 P，作 $AK\perp BG$，垂足为 K．
设 GP 与 AK 交于点 O，以点 O 为圆心，OA 为半径作⊙O，
过点 O 作 $OH\perp CD$，垂足为 H，如图③．
则⊙O 是△ABG 的外接圆，
$\because$ △ABG 是等边三角形，$GP\perp AB$，
$\therefore AP=PB=\frac{1}{2}AB$．
$\because AB=270$，
$\therefore AP=135$．
$\because ED=285$，
$\therefore OH=285-135=150$．
$\because$ △ABG 是等边三角形，$AK\perp BG$，
$\therefore \angle BAK=\angle GAK=30°$．
$\therefore OP=AP\cdot\tan 30°$
$=135\times\frac{\sqrt{3}}{3}$
$=45\sqrt{3}$．
$\therefore OA=2OP=90\sqrt{3}$．
$\therefore OH<OA$．
$\therefore$ ⊙O 与 CD 相交，设交点为 M，连接 MA、MB，如图③．
$\therefore \angle AMB=\angle AGB=60°$，$OM=OA=90\sqrt{3}$．．

∵OH⊥CD，OH=150，OM=$90\sqrt{3}$，

∴HM=$\sqrt{OM^2-OH^2}$

=$\sqrt{(90\sqrt{3})^2-150^2}$

=$30\sqrt{2}$．

∵AE=400，OP=$45\sqrt{3}$，

∴DH=400﹣$45\sqrt{3}$．

若点M在点H的左边，则DM=DH+HM=400﹣$45\sqrt{3}$+$30\sqrt{2}$．

∵400﹣$45\sqrt{3}$+$30\sqrt{2}$＞340，

∴DM＞CD．

∴点M不在线段CD上，应舍去．

若点M在点H的右边，则DM=DH﹣HM=400﹣$45\sqrt{3}$﹣$30\sqrt{2}$．

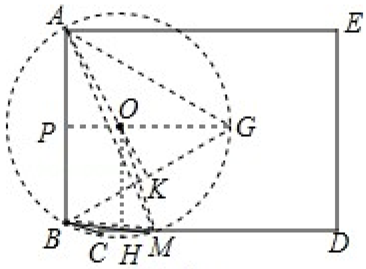
∵400﹣$45\sqrt{3}$﹣$30\sqrt{2}$＜340，

∴DM＜CD．

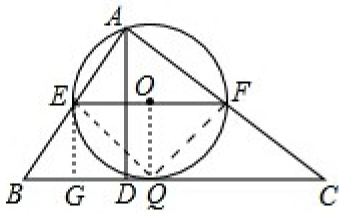
∴点M在线段CD上．

综上所述：在线段CD上存在唯一的点M，使∠AMB=60°，

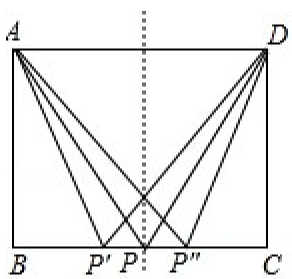
此时DM的长为（400﹣$45\sqrt{3}$﹣$30\sqrt{2}$）米．



图③



图②



图①

点评：　本题考查了垂直平分线的性质、矩形的性质、等边三角形的性质、正方形的判定与性质、直线与圆的位置关系、圆周角定理、三角形的中位线定理、全等三角形的判定与

性质、勾股定理、特殊角的三角函数值等知识，考查了操作、探究等能力，综合性非常强．而构造等边三角形及其外接圆是解决本题的关键．