

方案设计

一、选择题

二.填空题

三.解答题

1. (2014•浙江宁波, 第26题 14分) 木匠黄师傅用长 $AB=3$, 宽 $BC=2$ 的矩形木板做一个尽可能大的圆形桌面, 他设计了四种方案:

方案一: 直接锯一个半径最大的圆;

方案二: 圆心 O_1 、 O_2 分别在 CD 、 AB 上, 半径分别是 O_1C 、 O_2A , 锯两个外切的半圆拼成一个圆;

方案三: 沿对角线 AC 将矩形锯成两个三角形, 适当平移三角形并锯一个最大的圆;

方案四: 锯一块小矩形 $BCEF$ 拼到矩形 $AFED$ 下面, 利用拼成的木板锯一个尽可能大的圆.

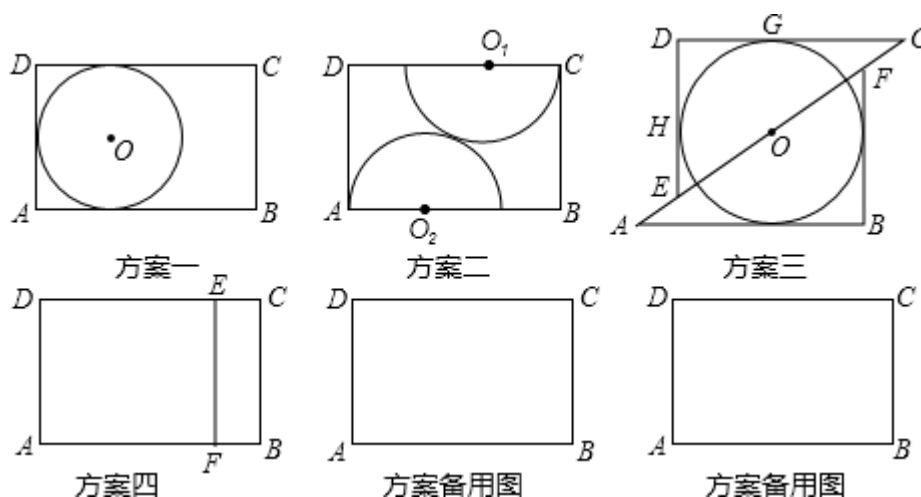
(1) 写出方案一中圆的半径;

(2) 通过计算说明方案二和方案三中, 哪个圆的半径较大?

(3) 在方案四中, 设 $CE=x$ ($0 < x < 1$), 圆的半径为 y .

① 求 y 关于 x 的函数解析式;

② 当 x 取何值时圆的半径最大, 最大半径为多少? 并说明四种方案中哪一个圆形桌面的半径最大.



考点: 圆的综合题

分析: (1) 观察图易知, 截圆的直径需不超过长方形长、宽中最短的边, 由已知长宽分别为 3, 2, 那么直接取圆直径最大为 2, 则半径最大为 1.

(2) 方案二、方案三中求圆的半径是常规的利用勾股定理或三角形相

似中对应边长成比例等性质解直角三角形求边长的题目。一般都先设出所求边长，而后利用关系代入表示其他相关边长，方案二中可利用 $\triangle O_1O_2E$ 为直角三角形，则满足勾股定理整理方程，方案三可利用 $\triangle AOM \sim \triangle OFN$ 后对应边成比例整理方程，进而可求 r 的值。

(3) ①类似 (1) 截圆的直径需不超过长方形长、宽中最短的边，虽然方案四中新拼的图象不一定为矩形，但直径也不得超过横纵向方向跨

度。则选择最小跨度，取其 $\frac{1}{2}$ ，即为半径。由 EC 为 x ，则新拼图形水平方向跨度为 $3-x$ ，竖直方向跨度为 $2+x$ ，则需要先判断大小，而后分别讨论结论。

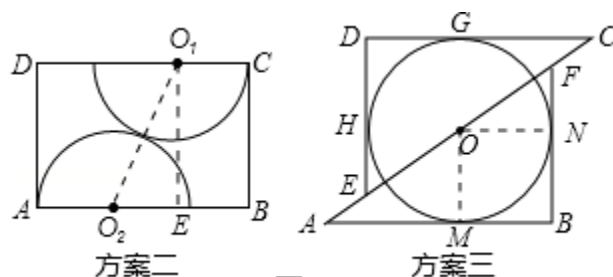
②已有关系表达式，则直接根据不等式性质易得方案四中的最大半径。另与前三方案比较，即得最终结论。

解答：

解：(1) 方案一中的最大半径为 1。

分析如下：

因为长方形的长宽分别为 3，2，那么直接取圆直径最大为 2，则半径最大为 1。



(2)

图 1

如图 1，方案二中连接 O_1, O_2 ，过 O_1 作 $O_1E \perp AB$ 于 E ，

方案三中，过点 O 分别作 AB, BF 的垂线，交于 M, N ，此时 M, N 恰为 $\odot O$ 与 AB, BF 的切点。

方案二：

设半径为 r ，

在 $Rt\triangle O_1O_2E$ 中，

$$\because O_1O_2 = 2r, O_1E = BC = 2, O_2E = AB - AO_1 - CO_2 = 3 - 2r,$$

$$\therefore (2r)^2 = 2^2 + (3 - 2r)^2,$$

解得 $r = \frac{13}{12}$. 新_课_标_第_一_网

方案三:

设半径为 r ,

在 $\triangle AOM$ 和 $\triangle OFN$ 中,

$$\begin{cases} \angle A = \angle FON \\ \angle OMA = \angle FNO \end{cases},$$

$\therefore \triangle AOM \sim \triangle OFN$,

$$\therefore \frac{OM}{AM} = \frac{FN}{ON},$$

$$\therefore \frac{r}{3-r} = \frac{2-r}{r},$$

解得 $r = \frac{6}{5}$.

比较知, 方案三半径较大.

(3) 方案四:

① $\because EC = x$,

\therefore 新拼图水平方向跨度为 $3-x$, 竖直方向跨度为 $2+x$.

类似 (1), 所截出圆的直径最大为 $3-x$ 或 $2+x$ 较小的.

1. 当 $3-x < 2+x$ 时, 即当 $x > \frac{1}{2}$ 时, $r = \frac{1}{2}(3-x)$;

2. 当 $3-x = 2+x$ 时, 即当 $x = \frac{1}{2}$ 时, $r = \frac{1}{2}(3 - \frac{1}{2}) = \frac{5}{4}$;

3. 当 $3-x > 2+x$ 时, 即当 $x < \frac{1}{2}$ 时, $r = \frac{1}{2}(2+x)$.

② 当 $x > \frac{1}{2}$ 时, $r = \frac{1}{2}(3-x) < \frac{1}{2}(3 - \frac{1}{2}) = \frac{5}{4}$;

当 $x = \frac{1}{2}$ 时, $r = \frac{1}{2}(3 - \frac{1}{2}) = \frac{5}{4}$;

当 $x < \frac{1}{2}$ 时, $r = \frac{1}{2}(2+x) < \frac{1}{2}(2 + \frac{1}{2}) = \frac{5}{4}$,

\therefore 方案四, 当 $x = \frac{1}{2}$ 时, r 最大为 $\frac{5}{4}$.

$$\because 1 < \frac{13}{12} < \frac{6}{5} < \frac{5}{4},$$

\therefore 方案四时可取的圆桌面积最大.

点评： 本题考查了圆的基本性质及通过勾股定理、三角形相似等性质求解边长及分段函数的表示与性质讨论等内容，题目虽看似新颖不易找到思路，但仔细观察每一小问都是常规的基础考点，所以总体来说是一道质量很高的题目，值得认真练习.

2. (2014•湘潭，第21题) 某企业新增了一个化工项目，为了节约资源，保护环境，该企业决定购买A、B两种型号的污水处理设备共8台，具体情况如下表：

	A型	B型
价格(万元/台)	12	10
月污水处理能力(吨/月)	200	160

经预算，企业最多支出89万元购买设备，且要求月处理污水能力不低于1380吨.

- (1) 该企业有几种购买方案？
- (2) 哪种方案更省钱，说明理由.

考 一元一次不等式组的应用

点：

分 (1) 设购买污水处理设备A型号 x 台，则购买B型号 $(8-x)$ 台，根据企业最多支

析： 出89万元购买设备，要求月处理污水能力不低于1380吨，列出不等式组，然后找出最合适的方案即可.

(2) 计算出每一方案的花费，通过比较即可得到答案.

解 解：设购买污水处理设备A型号 x 台，则购买B型号 $(8-x)$ 台，

答： 根据题意，得

$$\begin{cases} 12x+10(8-x) \leq 89 \\ 200x+160(8-x) \geq 1380 \end{cases},$$

解这个不等式组，得： $2.5 \leq x \leq 4.5$.

$\because x$ 是整数，

$\therefore x=3$ 或 $x=4$.

当 $x=3$ 时， $8-x=5$ ；

当 $x=4$ 时， $8-x=4$.

答：有 2 种购买方案：第一种是购买 3 台 A 型污水处理设备，5 台 B 型污水处理设备；

第二种是购买 4 台 A 型污水处理设备，4 台 B 型污水处理设备；

(2) 当 $x=3$ 时，购买资金为 $12 \times 1 + 10 \times 5 = 62$ (万元) ，

当 $x=4$ 时，购买资金为 $12 \times 4 + 10 \times 4 = 88$ (万元) 。

因为 $88 > 62$ ，

所以为了节约资金，应购污水处理设备 A 型号 3 台，B 型号 5 台。

答：购买 3 台 A 型污水处理设备，5 台 B 型污水处理设备更省钱。

点 本题考查了一元一次不等式组的应用，本题是“方案设计”问题，一般可把它转化为求
评： 不等式组的整数解问题，通过表格获取相关信息，在实际问题中抽象出不等式组是解决这类问题的关键。

3. (2014•益阳，第 19 题，10 分) 某电器超市销售每台进价分别为 200 元、170 元的 A、B 两种型号的电风扇，下表是近两周的销售情况：

销售时段	销售数量		销售收入[来源:学,科,网]	
	A 种型号	B 种型号	A 种型号	B 种型号
第一周	3 台	5 台	1800 元	
第二周	4 台	10 台	3100 元	

(进价、售价均保持不变，利润=销售收入 - 进货成本)

(1) 求 A、B 两种型号的电风扇的销售单价；

(2) 若超市准备用不多于 5400 元的金额再采购这两种型号的电风扇共 30 台，求 A 种型号的电风扇最多能采购多少台？

(3) 在 (2) 的条件下，超市销售完这 30 台电风扇能否实现利润为 1400 元的目标？若能，请给出相应的采购方案；若不能，请说明理由。

考 二元一次方程组的应用；一元一次方程的应用；一元一次不等式的应用。

点：

分 (1) 设 A、B 两种型号电风扇的销售单价分别为 x 元、 y 元，根据 3 台 A 型号 5 台 B

析： 型号的电扇收入 1800 元，4 台 A 型号 10 台 B 型号的电扇收入 3100 元，列方程组求解；

(2) 设采购 A 种型号电风扇 a 台，则采购 B 种型号电风扇 $(30 - a)$ 台，根据金额不多余 5400 元，列不等式求解；

(3) 设利润为 1400 元，列方程求出 a 的值为 20，不符合 (2) 的条件，可知不能实现目标。

解 解：(1) 设 A 、 B 两种型号电风扇的销售单价分别为 x 元、 y 元，

答：依题意得：
$$\begin{cases} 3x+5y=1800 \\ 4x+10y=3100 \end{cases}$$

解得：
$$\begin{cases} x=250 \\ y=210 \end{cases}$$

答： A 、 B 两种型号电风扇的销售单价分别为 250 元、210 元；

(2) 设采购 A 种型号电风扇 a 台，则采购 B 种型号电风扇 $(30 - a)$ 台。

依题意得： $200a+170(30 - a) \leq 5400$ ，

解得： $a \leq 10$ 。

答：超市最多采购 A 种型号电风扇 10 台时，采购金额不多于 5400 元；

(3) 依题意有： $(250 - 200)a + (210 - 170)(30 - a) = 1400$ ，

解得： $a = 20$ ，

$\because a > 10$ ，

\therefore 在 (2) 的条件下超市不能实现利润 1400 元的目标。

点 本题考查了二元一次方程组 and 一元一次不等式的应用，解答本题的关键是读懂题

评：意，设出未知数，找出合适的等量关系和不等关系，列方程组和不等式求解。

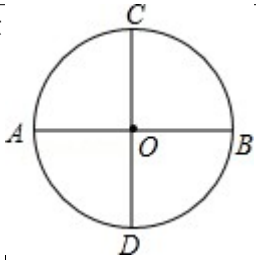
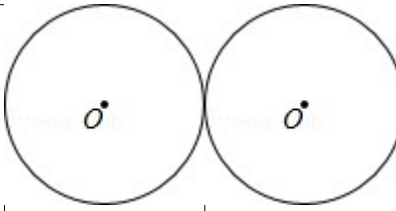
4. (2014•济宁，第 20 题 8 分) 在数学活动课上，王老师发给每位同学一张半径为 6 个单位长度的圆形纸板，要求同学们：

(1) 从带刻度的三角板、量角器和圆规三种作图工具中任意选取作图工具，把圆形纸板分成面积相等的四部分；

(2) 设计的整个图案是某种对称图形。

王老师给出了方案一，请你用所学的知识再设计两种方案，并完成下面的设计报告。

名称	四等分圆的面积		
方案	方案一	方案二	方案三
选用的工具	带刻度的三角板		

画出示意图		
简述设计方案	作 $\odot O$ 两条互相垂直的直径 AB 、 CD ，将 $\odot O$ 的面积分成相等的四份。	
指出对称性	既是轴对称图形又是中心对称图形	

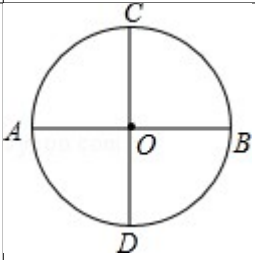
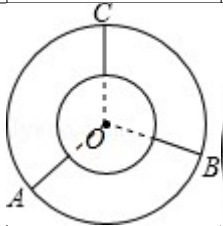
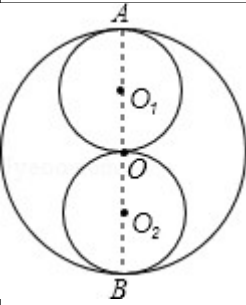
考 利用旋转设计图案；利用轴对称设计图案。

点：

分 根据圆的面积公式以及轴对称图形和中心对称图形定义分别分析得出即可。

析：

解 解：

答：	名称	四等分圆的面积		
	方案	方案一	方案二	方案三
	选用的工具	带刻度的三角板	带刻度三角板、量角器、圆规。	带刻度三角板、圆规。
	画出示意图			
	简述设计方案	作 $\odot O$ 两条互相垂直的直径 AB 、 CD ，将 $\odot O$ 的面积分成相等的四份。	(1) 以点 O 为圆心，以 3 个单位长度为半径作圆；	(4) 作 $\odot O$ 的一条直径 AB ； (5) 分别以 OA 、 OB 的中点为

		<p>(2) 在大$\odot O$上依次取三等分点 $A、B、C$；</p> <p>(3) 连接 $OA、OB、OC$.</p> <p>则小圆 O 与三等份圆环把$\odot O$的面积四等分 .</p>	<p>圆心，以 3 个单位长度为半径作 $\odot O_1、\odot O_2$；</p> <p>则$\odot O_1、\odot O_2$和$\odot O$中剩余的两部分把$\odot O$的面积四等分 .</p>
指出对称性	既是轴对称图形又是中心对称图形 .	轴对称图形	既是轴对称图形又是中心对称图形 .

点 此题主要考查了利用轴对称设计图案以及轴对称图形以及中心对称图形的性质，熟

评： 练利用扇形面积公式是解题关键 .