一元二次方程及其应用

一、选择题

1. （2014•广东，第 8 题 3 分）关于 x 的一元二次方程 $x^2-3x+m=0$ 有两个不相等的实数根，则实数 m 的取值范围为（　　）

A．$m>\frac{9}{4}$　　B．$m<\frac{9}{4}$　　C．$m=\frac{9}{4}$　　D．$m<-\frac{9}{4}$

考点：　根的判别式．

专题：　计算题．

分析：　先根据判别式的意义得到△=（－3）^{2}－4m＞0，然后解不等式即可．

解答：　解：根据题意得△=（－3）^{2}－4m＞0，

解得 $m<\frac{9}{4}$．

故选 B．

点评：　本题考查了一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）的根的判别式△=b^2-4ac：当△＞0，方程有两个不相等的实数根；当△=0，方程有两个相等的实数根；当△＜0，方程没有实数根．

2. （2014•广西玉林市、防城港市，第 9 题 3 分）x_1，x_2 是关于 x 的一元二次方程 $x^2-mx+m-2=0$ 的两个实数根，是否存在实数 m 使 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=0$ 成立？则正确的是结论是（　　）

A．m=0 时成立　　B．m=2 时成立　　C．m=0 或 2 时成立　　D．不存在

考点：　根与系数的关系．

分析：　先由一元二次方程根与系数的关系得出，$x_1+x_2=m$，$x_1x_2=m-2$．假设存在实数 m 使

$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=0$ 成立，则 $\frac{x_1+x_2}{x_1 \cdot x_2}=0$，求出 $m=0$，再用判别式进行检验即可．

解答：解：∵x_1，x_2 是关于 x 的一元二次方程 $x^2-mx+m-2=0$ 的两个实数根，

∴$x_1+x_2=m$，$x_1x_2=m-2$．

假设存在实数 m 使 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=0$ 成立，则 $\frac{x_1+x_2}{x_1 \cdot x_2}=0$，

∴$\frac{m}{m-2}=0$，

∴$m=0$．

当 $m=0$ 时，方程 $x^2-mx+m-2=0$ 即为 $x^2-2=0$，此时△$=8>0$，

∴$m=0$ 符合题意．

故选 A．

点评：本题主要考查了一元二次方程根与系数的关系：如果 x_1，x_2 是方程 $x^2+px+q=0$ 的两根时，那么 $x_1+x_2=-p$，$x_1x_2=q$．新*课*标*第*一*网

3．(2014 年天津市，第 10 题 3 分)要组织一次排球邀请赛，参赛的每个队之间都要比赛一场，根据场地和时间等条件，赛程计划安排 7 天，每天安排 4 场比赛．设比赛组织者应邀请 x 个队参赛，则 x 满足的关系式为（　　）

A．$\frac{1}{2}x(x+1)=28$　　B．$\frac{1}{2}x(x-1)=28$　　C．$x(x+1)=28$　　D．$x(x-1)=28$

考点：　由实际问题抽象出一元二次方程．

分析：　关系式为：球队总数×每支球队需赛的场数÷2=4×7，把相关数值代入即可．

解答：　解：每支球队都需要与其他球队赛 $(x-1)$ 场，但 2 队之间只有 1 场比赛，

所以可列方程为：$\frac{1}{2}x(x-1)=4\times7$．

故选 B．

点评：　本题考查了由实际问题抽象出一元二次方程，解决本题的关键是得到比赛总场数的等量关系，注意 2 队之间的比赛只有 1 场，最后的总场数应除以 2．

4．（2014 年云南省，第 5 题 3 分）一元二次方程 $x^2-x-2=0$ 的解是（　　）

A．$x_1=1$，$x_2=2$　B．$x_1=1$，$x_2=-2$　C．$x_1=-1$，$x_2=-2$　D．$x_1=-1$，$x_2=2$

考点：　解一元二次方程－因式分解法．

分析：　直接利用十字相乘法分解因式，进而得出方程的根

解答：　解：$x^2-x-2=0$

$(x-2)(x+1)=0$，

解得：$x_1=-1$，$x_2=2$．

故选：D．

点评：　此题主要考查了十字相乘法分解因式解方程，正确分解因式是解题关键．

5．（2014•四川自贡，第5题4分）一元二次方程$x^2-4x+5=0$的根的情况是（　　）

A．有两个不相等的实数根　B．有两个相等的实数根

C．只有一个实数根　D．没有实数根

考点：　根的判别式．

分析：　把$a=1$，$b=-4$，$c=5$代入$\triangle=b^2-4ac$进行计算，根据计算结果判断方程根的情况．

解答：　解：$\because a=1$，$b=-4$，$c=5$，

$\therefore \triangle=b^2-4ac=(-4)^2-4\times1\times5=-4<0$，

所以原方程没有实数根．

故选：D．

点评：　本题考查了一元二次方程$ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$，a，b，c为常数）的根的判别式$\triangle=b^2-4ac$．当$\triangle>0$，方程有两个不相等的实数根；当$\triangle=0$，方程有两个相等的实数根；当$\triangle<0$，方程没有实数根．

6.（2014·云南昆明，第3题3分）已知x_1、x_2是一元二次方程$x^2-4x+1=0$的两个根，

则$x_1\cdot x_2$等于（　）

A. -4　B. -1　C. 1　D. 4

考点：一元二次方程根与系数的关系.

分析：根据一元二次方程两根之积与系数关系分析解答．

解答：解：由题可知：$a=1, b=-4, c=1$，$\therefore x_1 \cdot x_2=\frac{c}{a}=\frac{1}{1}=1$

故选C．

点评：本题考查一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$根与系数的关系．

7.（2014·云南昆明，第6题3分）某果园2011年水果产量为100吨，2013年水果产量为144吨，求该果园水果产量的年平均增长率.设该果园水果产量的年平均增长率为x，则根据题意可列方程为（　）

A. $144(1-x)^2=100$　　B. $100(1-x)^2=144$

C. $144(1+x)^2=100$　　D. $100(1+x)^2=144$

考点：由实际问题抽象出一元二次方程．

分析：果园从2011年到2013年水果产量问题，是典型的二次增长问题．

解答：解：设该果园水果产量的年平均增长率为x，由题意有

$100(1+x)^2=144$，

故选D．

点评：此题主要考查了由实际问题抽象出一元二次方程，理解二次增长是做本题的关键．

8．（2014•浙江宁波，第9题4分）已知命题"关于x的一元二次方程$x^2+bx+1=0$，当$b<0$时必有实数解"，能说明这个命题是假命题的一个反例可以是（　）

A．$b=-1$　　B．$b=2$　　C．$b=-2$　　D．$b=0$

考点：命题与定理；根的判别式

专题：常规题型．

分析：先根据判别式得到$\triangle=b^2-4$，在满足$b<0$的前提下，取$b=-1$

得到△＜0，根据判别式的意义得到方程没有实数解，于是 $b=-1$ 可作为说明这个命题是假命题的一个反例．

解答： 解：$\triangle=b^2-4$，由于当 $b=-1$ 时，满足 $b<0$，而△＜0，方程没有实数解，所以当 $b=-1$ 时，可说明这个命题是假命题．

故选 A．

点评： 本题考查了命题与定理：判断一件事情的语句，叫做命题．许多命题都是由题设和结论两部分组成，题设是已知事项，结论是由已知事项推出的事项，一个命题可以写成"如果…那么…"形式；有些命题的正确性是用推理证实的，这样的真命题叫做定理．也考查了根的判别式．

9.（2014•益阳，第5题，4分）一元二次方程 $x^2-2x+m=0$ 总有实数根，则 m 应满足的条件是（　　）

A．$m>1$　　B．$m=1$　　C．$m<1$　　D．$m\le1$

考点： 根的判别式．

分析： 根据根的判别式，令△≥0，建立关于 m 的不等式，解答即可．

解答： 解：∵方程 $x^2-2x+m=0$ 总有实数根，

∴$\triangle\ge0$，

即 $4-4m\ge0$，

∴$-4m\ge-4$，

∴$m\le1$．

故选 D．

点评： 本题考查了根的判别式，一元二次方程根的情况与判别式△的关系：

（1）$\triangle>0\Leftrightarrow$方程有两个不相等的实数根；

（2）$\triangle=0\Leftrightarrow$方程有两个相等的实数根；

（3）$\triangle<0\Leftrightarrow$方程没有实数根．

10．（2014•呼和浩特，第10题3分）已知函数$y=\frac{1}{|x|}$的图象在第一象限的一支曲线上有一点A（a，c），点 B（b，$c+1$）在该函数图象的另外一支上，则关于一元二次方程$ax^2+bx+c=0$的两根x_1，x_2判断正确的是（　　）

A．$x_1+x_2>1$，$x_1•x_2>0$　　　　B．$x_1+x_2<0$，$x_1•x_2>0$

C．$0<x_1+x_2<1$，$x_1•x_2>0$　　　　D．x_1+x_2与$x_1•x_2$的符号都不确定

考点：根与系数的关系；反比例函数图象上点的坐标特征．

分析：根据点A（a，c）在第一象限的一支曲线上，得出$a>0$，$c>0$，再点B（b，$c+1$）在该函数图象的另外一支上，得出$b<0$，$c<-1$，再根据$x_1•x_2=\frac{c}{a}$，$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，即可得出答案．

解答：解：∵点A（a，c）在第一象限的一支曲线上，

∴$a>0$，$c>0$，

∵点B（b，$c+1$）在该函数图象的另外一支上，

∴$b<0$，$c+1<0$，

∴$c<-1$，

∴$x_1•x_2=\frac{c}{a}>0$，$0<x_1+x_2<1$，

故选C．

点评：本题考查了根与系数的关系，掌握根与系数的关系和各个象限点的特点是本题的关键；若x_1，x_2是关于x的一元二次方程$ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$，a，b，c为常数）的两个实数根，则$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$．

11.（2014•菏泽，第6题3分）已知关于x的一元二次方程$x2+ax+b=0$有一个非零根$-b$，则$a-b$的值为（ ）

A．1　　B．-1　　C．0　　D．-2

考点：一元二次方程的解．

分析：由于关于x的一元二次方程$x2+ax+b=0$有一个非零根$-b$，那么代

入方程中即可得到$b2-ab+b=0$，再将方程两边同时除以b即可求解．

解答：解：∵关于x的一元二次方程$x2+ax+b=0$有一个非零根$-b$，

∴$b2-ab+b=0$，

∵$-b\neq0$，

∴$b\neq0$，

方程两边同时除以b，得$b-a+1=0$，

∴$a-b=1$．

故选A．

点评：此题主要考查了一元二次方程的解，解题的关键是把已知方程的根直接代入方程进而解决问题．

12．（2014年山东泰安，第13题3分）某种花卉每盆的盈利与每盆的株数有一定的关系，每盆植3株时，平均每株盈利4元；若每盆增加1株，平均每株盈利减少0.5元，要使每盆的盈利达到15元，每盆应多植多少株？设每盆多植x株，则可以列出的方程是（　）

A．$(3+x)(4-0.5x)=15$　　B．$(x+3)(4+0.5x)=15$

C．$(x+4)(3-0.5x)=15$　　D．$(x+1)(4-0.5x)=15$

分析：根据已知假设每盆花苗增加x株，则每盆花苗有$(x+3)$株，得出平均单株盈利为$(4-0.5x)$元，由题意得$(x+3)(4-0.5x)=15$即可．

解：设每盆应该多植x株，由题意得$(3+x)(4-0.5x)=15$，故选A．

点评：此题考查了一元二次方程的应用，根据每盆花苗株数×平均单株盈利=总盈利得出方程是解题关键．

二.填空题

1.（2014•广西贺州，第16题3分）已知关于x的方程$x^2+(1-m)x+\frac{m^2}{4}=0$有两个不相等的实数根，则$m$的最大整数值是__0__．

考点：根的判别式．

专题：计算题．

题：

分析：根据判别式的意义得到△=（1﹣m）^{2}﹣$4\times\frac{m^2}{4}$＞0，然后解不等式得到 m 的取值范围，再在此范围内找出最大整数即可．

解答：解：根据题意得△=（1﹣m）^{2}﹣$4\times\frac{m^2}{4}$＞0，

解得 m＜，

所以 m 的最大整数值为 0．

故答案为 0．

点评：本题考查了一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）的根的判别式△=b^2-4ac：当△＞0，方程有两个不相等的实数根；当△=0，方程有两个相等的实数根；当△＜0，方程没有实数根．

2．（2014•舟山，第 11 题 4 分）方程 $x^2-3x=0$ 的根为______．

考点：解一元二次方程﹣因式分解法

分析：根据所给方程的系数特点，可以对左边的多项式提取公因式，进行因式分解，然后解得原方程的解．

解答：解：因式分解得，x（x﹣3）=0，

解得，$x_1=0$，$x_2=3$．

点评：本题考查了解一元二次方程的方法，当方程的左边能因式分解时，一般情况下是把左边的式子因式分解，再利用积为 0 的特点解出方程的根．因式分解法是解一元二次方程的一种简便方法，要会灵活运用．

3.（2014•扬州，第 17 题，3 分）已知 a，b 是方程 $x^2-x-3=0$ 的两个根，则代数式 $2a^3+b^2+3a^2-11a-b+5$ 的值为 23 ．

考点：因式分解的应用；一元二次方程的解；根与系数的关系

专题：计算题．

分析：根据一元二次方程解的定义得到 $a^2-a-3=0$，$b^2-b-3=0$，即 $a^2=a+3$，$b^2=b+3$，则

分析：$2a^3+b^2+3a^2-11a-b+5=2a(a+3)+b+3+3(a+3)-11a-b+5$，整理得 $2a^2-2a+17$，然后再把 $a^2=a+3$ 代入后合并即可．

解答：解：∵a，b 是方程 $x^2-x-3=0$ 的两个根，

∴$a^2-a-3=0$，$b^2-b-3=0$，即 $a^2=a+3$，$b^2=b+3$，

∴$2a^3+b^2+3a^2-11a-b+5=2a(a+3)+b+3+3(a+3)-11a-b+5$

$=2a^2-2a+17$

$=2(a+3)-2a+17$

$=2a+6-2a+17$

$=23$．[来源:学&科&网 Z&X&X&K]

故答案为 23．

点评：本题考查了因式分解的运用：利用因式分解解决求值问题；利用因式分解解决证明问题；利用因式分解简化计算问题．也考查了一元二次方程解的定义．

4.（2014•呼和浩特，第 15 题 3 分）已知 m，n 是方程 $x^2+2x-5=0$ 的两个实数根，则 $m^2-mn+3m+n=$__8__．

考点：根与系数的关系；一元二次方程的解．

专题：常规题型．

分析：根据 $m+n=-\frac{b}{a}=-2$，$m\bullet n=-5$，直接求出 m、n 即可解题．

解答：解：∵m、n 是方程 $x^2+2x-5=0$ 的两个实数根，

且一元二次方程的求根公式是 $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

解得：$m=\sqrt{6}-1$，$n=-1-\sqrt{6}$或者 $m=-1-\sqrt{6}$，$n=\sqrt{6}-1$，

将 $m=\sqrt{6}-1$、$n=-1-\sqrt{6}$代入 $m^2-mn+3m+n=8$；

将 $m=-1-\sqrt{6}$、$n=\sqrt{6}-1$ 代入 $m^2-mn+3m+n=8$；

故答案为：8．

点评：此题主要考查了一元二次方程根根的计算公式，根据题意得出 m 和 n 的值是解决问

评： 题的关键．

5.（2014•德州，第16题4分）方程$x^2+2kx+k^2-2k+1=0$的两个实数根x_1，x_2满足$x_1^2+x_2^2=4$，则k的值为__1__．

考点： 根与系数的关系

分析： 由$x_1^2+x_2^2=x_1^2+2x_1\bullet x_2+x_2^2-2x_1\bullet x_2=(x_1+x_2)^2-2x_1\bullet x_2=4$，然后根据根与系数的关系即可得到一个关于$k$的方程，从而求得$k$的值．

解答： 解；$x_1^2+x_2^2=4$，

即$x_1^2+x_2^2=x_1^2+2x_1\bullet x_2+x_2^2-2x_1\bullet x_2=(x_1+x_2)^2-2x_1\bullet x_2=4$，

又∵$x_1+x_2=-2k$，$x_1\bullet x_2=k^2-2k+1$，

代入上式有$4k^2-4(k^2-2k+1)=4$，

解得$k=1$．

故答案为：1．

点评： 本题考查了一元二次方程$ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）的根与系数的关系：若方程的两根为x_1，x_2，则$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1\bullet x_2=\frac{c}{a}$．

6．（2014•济宁，第13题3分）若一元二次方程$ax^2=b$（$ab>0$）的两个根分别是$m+1$与$2m-4$，则$\frac{b}{a}$=__4__．

考点： 解一元二次方程－直接开平方法．

专题： 计算题．

分析： 利用直接开平方法得到$x=\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$，得到方程的两个根互为相反数，所以$m+1+2m-4=0$，解得$m=1$，则方程的两个根分别是2与﹣2，则有$\sqrt{\frac{b}{a}}=2$，然后两边平方得到$\frac{b}{a}=4$．

解答： 解：∵$x^2=\frac{b}{a}$（$ab>0$），

答：$\therefore x=\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$，

$\therefore$方程的两个根互为相反数，

$\therefore m+1+2m-4=0$，解得 $m=1$，

$\therefore$一元二次方程 $ax^2=b$（$ab>0$）的两个根分别是 2 与 -2，

$\therefore\sqrt{\frac{b}{a}}=2$，

$\therefore\frac{b}{a}=4$．

故答案为 4．

点评：本题考查了解一元二次方程－直接开平方法：形如 $x^2=p$ 或（$nx+m$）$^2=p$（$p\geq0$）的一元二次方程可采用直接开平方的方法解一元二次方程．如果方程化成 $x^2=p$ 的形式，那么可得 $x=\pm p$；如果方程能化成（$nx+m$）$^2=p$（$p\geq0$）的形式，那么 $nx+m=\pm p$．

三.解答题

1.（2014•广西玉林市、防城港市，第 24 题 9 分）我市市区去年年底电动车拥有量是 10 万辆，为了缓解城区交通拥堵状况，今年年初，市交通部门要求我市到明年年底控制电动车拥有量不超过 11.9 万辆，估计每年报废的电动车数量是上一年年底电动车拥有量的 10%，假定每年新增电动车数量相同，问：

（1）从今年年初起每年新增电动车数量最多是多少万辆？

（2）在（1）的结论下，今年年底到明年年底电动车拥有量的年增长率是多少？（结果精确到 0.1%）

考点：一元二次方程的应用；一元一次不等式的应用．

分析：（1）根据题意分别求出今年将报废电动车的数量，进而得出明年报废的电动车数量，进而得出不等式求出即可；

（2）分别求出今年年底电动车数量，进而求出今年年底到明年年底电动车拥有量的年增长率．

解答：解：（1）设从今年年初起每年新增电动车数量是 x 万辆，

由题意可得出：今年将报废电动车：$10\times10\%=1$（万辆），

$\therefore[(10-1)+x](1-10\%)+x\leq11.9$，

解得：$x\leq 2$．

答：从今年年初起每年新增电动车数量最多是 2 万辆；

（2）∵今年年底电动车拥有量为：（10－1）$+x=11$（万辆），

明年年底电动车拥有量为：11.9 万辆，

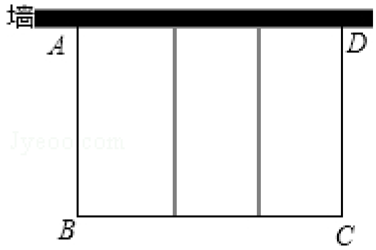
∴设今年年底到明年年底电动车拥有量的年增长率是 y，则 11（$1+y$）=11.9，

解得：$y\approx 0.082=8.2\%$．

答：今年年底到明年年底电动车拥有量的年增长率是 8.2%．

点评：此题主要考查了一元一次不等式的应用以及一元一次方程的应用，分别表示出今年与明年电动车数量是解题关键．

2．（（2014•新疆，第 19 题 10 分）如图，要利用一面墙（墙长为 25 米）建羊圈，用 100 米的围栏围成总面积为 400 平方米的三个大小相同的矩形羊圈，求羊圈的边长 AB，BC 各为多少米？



考点：一元二次方程的应用．

专题：几何图形问题．

分析：设 AB 的长度为 x，则 BC 的长度为（$100-4x$）米；然后根据矩形的面积公式列出方程．

解答：解：设 AB 的长度为 x，则 BC 的长度为（$100-4x$）米．

根据题意得 （$100-4x$）$x=400$，

解得 $x_1=20$，$x_2=5$．

则 $100-4x=20$ 或 $100-4x=80$．

∵$80>25$，

∴$x_2=5$ 舍去．

即 $AB=20$，$BC=20$．

答：羊圈的边长 AB，BC 分别是 20 米、20 米．

点评：本题考查了一元二次方程的应用．解题关键是要读懂题目的意思，根据题目给出的条件，找出合适的等量关系，列出方程，再求解．

3.2014 年广东汕尾，第 22 题 9 分）已知关于 x 的方程 $x^2+ax+a-2=0$

（1）若该方程的一个根为 1，求 a 的值及该方程的另一根；

（2）求证：不论 a 取何实数，该方程都有两个不相等的实数根．

分析：（1）将 $x=1$ 代入方程 $x^2+ax+a-2=0$ 得到 a 的值，再根据根与系数的关系求出另一根；

（2）写出根的判别式，配方后得到完全平方式，进行解答．

解：（1）将 $x=1$ 代入方程 $x^2+ax+a-2=0$ 得，$1+a+a-2=0$，解得，$a=\frac{1}{2}$；

方程为 $x^2+\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}=0$，即 $2x^2+x-3=0$，设另一根为 x_1，则 $1x_1=-\frac{3}{2}$，$x_1=-\frac{3}{2}$．

（2）$\because \triangle=a^2-4(a-2)=a^2-4a+8=a^2-4a+4+4=(a-2)^2+4\geq 0$，

$\therefore$不论 a 取何实数，该方程都有两个不相等的实数根．

点评：本题考查了根的判别式和根与系数的关系，要记牢公式，灵活运用．

4.（2014•毕节地区，第 25 题 12 分）某工厂生产的某种产品按质量分为 10 个档次，第 1 档次（最低档次）的产品一天能生产 95 件，每件利润 6 元．每提高一个档次，每件利润增加 2 元，但一天产量减少 5 件．

（1）若生产第 x 档次的产品一天的总利润为 y 元（其中 x 为正整数，且 $1\leq x\leq 10$），求出 y 关于 x 的函数关系式；

（2）若生产第 x 档次的产品一天的总利润为 1120 元，求该产品的质量档次．

考点：二次函数的应用；一元二次方程的应用

分析：（1）每件的利润为 $6+2(x-1)$，生产件数为 $95-5(x-1)$，则 $y=[6+2(x-1)][95-5(x-1)]$；

（2）由题意可令 $y=1120$，求出 x 的实际值即可．

解答：解：（1）$\because$第一档次的产品一天能生产 95 件，每件利润 6 元，每提高一个档次，每件利润加 2 元，但一天生产量减少 5 件．

$\therefore$第 x 档次，提高的档次是 $x-1$ 档．

$\therefore y=[6+2(x-1)][95-5(x-1)]$，

即 $y=-10x^2+180x+400$（其中 x 是正整数，且 $1\le x\le 10$）；

（2）由题意可得：$-10x^2+180x+400=1120$

整理得：$x^2-18x+72=0$

解得：$x_1=6$，$x_2=12$（舍去）．

答：该产品的质量档次为第 6 档．

点评：本题考查了二次函数的性质在实际生活中的应用．最大销售利润的问题常利函数的增减性来解答，我们首先要吃透题意，确定变量，建立函数模型，然后结合实际选择最优方案．其中要注意应该在自变量的取值范围内求最大值（或最小值），也就是说二次函数的最值不一定在 $x=-\frac{b}{2a}$ 时取得．

5.（2014•襄阳，第 16 题 3 分）若正数 a 是一元二次方程 $x^2-5x+m=0$ 的一个根，$-a$ 是一元二次方程 $x^2+5x-m=0$ 的一个根，则 a 的值是__5__．

考点：一元二次方程的解

分析：把 $x=a$ 代入方程 $x^2-5x+m=0$，得 $a^2-5a+m=0$①，把 $x=-a$ 代入方程方程 $x^2+5x-m=0$，得 $a^2-5a-m=0$②，再将①+②，即可求出 a 的值．

解答：解：$\because a$ 是一元二次方程 $x^2-5x+m=0$ 的一个根，$-a$ 是一元二次方程 $x^2+5x-m=0$ 的一个根，

$\therefore a^2-5a+m=0$①，$a^2-5a-m=0$②，

①+②，得 $2(a^2-5a)=0$，

$\because a>0$，

$\therefore a=5$．

故答案为 5．

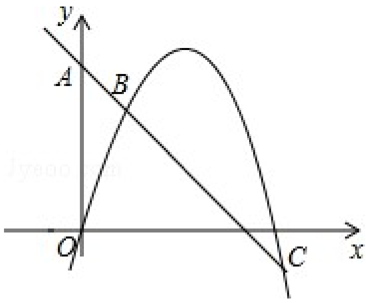
点评：本题主要考查的是一元二次方程的根即方程的解的定义：能使一元二次方程左右两边相等的未知数的值是一元二次方程的解．又因为只含有一个未知数的方程的解也叫做这个方程的根，所以，一元二次方程的解也称为一元二次方程的根．

6. （2014•湘潭，第 26 题）已知二次函数 $y=-x^2+bx+c$ 的对称轴为 $x=2$，且经过原点，直线 AC 解析式为 $y=kx+4$，

（1）求二次函数解析式；

（2）若 $\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle BOC}}=$，求 k；

（3）若以 BC 为直径的圆经过原点，求 k．



（第 1 题图）

考点：二次函数综合题．

分析：（1）由对称轴为 $x=-\frac{b}{2a}$，且函数过（0，0），则可推出 b，c，进而得函数解析式．

（2）$\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle BOC}}=$，且两三角形为同高不同底的三角形，易得 $\frac{AB}{BC}=$，考虑计算方便可作 B，C 对 x 轴的垂线，进而有 B，C 横坐标的比为 $\frac{AB}{AC}=$．由 B，C 为直线与二次函数的交点，则联立可求得 B，C 坐标．由上述倍数关系，则 k 易得．

（3）以 BC 为直径的圆经过原点，即∠BOC=90°，一般考虑表示边长，再用勾股定理构造方程求解 k．可是这个思路计算量异常复杂，基本不考虑，再考虑（2）的思路，发现 B，C 横纵坐标恰好可表示出 EB，EO，OF，OC．而由∠BOC=90°，易证△EBO∽△FOC，即 $EB•FC=EO•FO$．有此构造方程发现 k 值大多可约去，进而可得 k 值．

解答：解：（1）∵二次函数 $y=-x^2+bx+c$ 的对称轴为 $x=2$，且经过原点，

∴$-\frac{b}{2•(-1)}=2$，$0=0+0+c$，

∴$b=4$，$c=0$，

∴$y=-x^2+4x$．

（2）如图1，连接OB，OC，过点A作$AE\perp y$轴于E，过点B作$BF\perp y$轴于F，

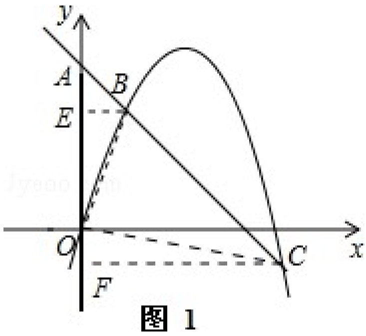


图 1

∴$\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle BOC}}=$，

∴$\frac{AB}{BC}=$，

∴$\frac{AB}{AC}=$，

∵$EB\parallel FC$，

∴$\frac{EB}{FC}=\frac{AB}{AC}=$．

∵$y=kx+4$交$y=-x^2+4x$于B，C，

∴$kx+4=-x^2+4x$，即$x^2+(k-4)x+4=0$，

∴$\triangle=(k-4)^2-4\cdot 4=k^2-8k$，

∴$x=\frac{(4-k)-\sqrt{k^2-8k}}{2}$，或$x=\frac{(4-k)+\sqrt{k^2-8k}}{2}$，

∵$x_B<x_C$，

∴$EB=x_B=\frac{(4-k)-\sqrt{k^2-8k}}{2}$，$FC=x_C=\frac{(4-k)+\sqrt{k^2-8k}}{2}$，

∴$4\cdot\frac{(4-k)-\sqrt{k^2-8k}}{2}=\frac{(4-k)+\sqrt{k^2-8k}}{2}$，

解得$k=9$（交点不在y轴右边，不符题意，舍去）或$k=-1$．

∴$k=-1$．

（3）∵$\angle BOC=90°$，

∴$\angle EOB+\angle FOC=90°$，

∵$\angle EOB+\angle EBO=90°$，

∴$\angle EBO=\angle FOC$，

∵$\angle BEO=\angle OFC=90°$，

∴$\triangle EBO\backsim\triangle FOC$，

∴$\frac{EB}{EO}=\frac{FO}{FC}$，

∴$EB\bullet FC=EO\bullet FO$．

∵$x_B=\frac{(4-k)-\sqrt{k^2-8k}}{2}$，$x_C=\frac{(4-k)+\sqrt{k^2-8k}}{2}$，且$B$、$C$过$y=kx+4$，

∴$y_B=k\bullet\frac{(4-k)-\sqrt{k^2-8k}}{2}+4$，$y_C=k\bullet\frac{(4-k)+\sqrt{k^2-8k}}{2}+4$，

∴$EO=y_B=k\bullet\frac{(4-k)-\sqrt{k^2-8k}}{2}+4$，$OF=-y_C=-k\bullet\frac{(4-k)+\sqrt{k^2-8k}}{2}-4$，

∴$\frac{(4-k)-\sqrt{k^2-8k}}{2}\bullet\frac{(4-k)+\sqrt{k^2-8k}}{2}=\left(k\bullet\frac{(4-k)-\sqrt{k^2-8k}}{2}+4\right)$

$\bullet\left(-k\bullet\frac{(4-k)+\sqrt{k^2-8k}}{2}-4\right)$，

整理得$16k=-20$，

∴$k=-$ ．

点评：本题考查了函数图象交点的性质、相似三角形性质、一元二次方程及圆的基本知识．题目特殊，貌似思路不难，但若思路不对，计算异常复杂，题目所折射出来的思想，考生应好好理解掌握．

7.（2014•株洲，第21题，6分）已知关于x的一元二次方程（$a+c$）x^2+2bx+（$a-c$）$=0$，其中a、b、c分别为$\triangle ABC$三边的长．

（1）如果$x=-1$是方程的根，试判断△ABC的形状，并说明理由；

（2）如果方程有两个相等的实数根，试判断△ABC的形状，并说明理由；

（3）如果△ABC是等边三角形，试求这个一元二次方程的根．

考点：一元二次方程的应用．

分析：（1）直接将$x=-1$代入得出关于a，b的等式，进而得出$a=b$，即可判断△ABC的形状；

（2）利用根的判别式进而得出关于a，b，c的等式，进而判断△ABC的形状；

（3）利用△ABC是等边三角形，则$a=b=c$，进而代入方程求出即可．

解答：解：（1）△ABC是等腰三角形；

理由：∵$x=-1$是方程的根，

∴$(a+c)\times(-1)^2-2b+(a-c)=0$，

∴$a+c-2b+a-c=0$，

∴$a-b=0$，

∴$a=b$，

∴△ABC是等腰三角形；

（2）∵方程有两个相等的实数根，

∴$(2b)^2-4(a+c)(a-c)=0$，

∴$4b^2-4a^2+4c^2=0$，

∴$a^2=b^2+c^2$，

∴△ABC是直角三角形；

（3）当△ABC是等边三角形，∴$(a+c)x^2+2bx+(a-c)=0$，可整理为：

$2ax^2+2ax=0$，

∴$x^2+x=0$，

解得：$x_1=0$，$x_2=-1$．

点评：此题主要考查了一元二次方程的应用以及根的判别式和勾股定理逆定理等知识，正确由已知获取等量关系是解题关键．

8.（2014年江苏南京，第22题，8分）某养殖户每年的养殖成本包括固定成本和可变成本，其中固定成本每年均为4万元，可变成本逐年增长，已知该养殖户第1年的可变成本为2.6万元，设可变成本平均的每年增长的百分率为x．

（1）用含x的代数式表示第3年的可变成本为<u>　2.6（1+x）^{2}　</u>万元．

（2）如果该养殖户第3年的养殖成本为7.146万元，求可变成本平均每年增长的百分率x．考点：列一元二次方程解实际问题的运用%]

分析：（1）根据增长率问题由第1年的可变成本为2.6万元就可以表示出第二年的可变成本为2.6（1+x），则第三年的可变成本为 2.6（1+x）^{2}，故得出答案；

（2）根据养殖成本=固定成本+可变成本建立方程求出其解即可．

解答：（1）由题意，得第3年的可变成本为：2.6（1+x）^{2}，故答案为：2.6（1+x）^{2}；

（2）由题意，得4+2.6（1+x）^{2}=7.146，

解得：$x_1=0.1$，$x_2=-2.1$（不合题意，舍去）．

答：可变成本平均每年增长的百分率为10%．

点评：本题考查了增长率的问题关系的运用，列一元二次方程解实际问题的运用，一元二次方程的解法的运用，解答时根据增长率问题的数量关系建立方程是关键．

9.（2014年江苏南京，第24题）已知二次函数$y=x^2-2mx+m^2+3$（m是常数）．

（1）求证：不论m为何值，该函数的图象与x轴没有公共点；

（2）把该函数的图象沿y轴向下平移多少个单位长度后，得到的函数的图象与x轴只有一个公共点？

考点：二次函数和x轴的交点问题，根的判别式，平移的性质，二次函数的图象与几何变换的应用

分析：（1）求出根的判别式，即可得出答案；

（2）先化成顶点式，根据顶点坐标和平移的性质得出即可．

（1）证明：∵△=（$-2m$）$^2-4\times1\times$（m^2+3）$=4m^2-4m^2-12=-12<0$，

∴方程$x^2-2mx+m^2+3=0$没有实数解，

即不论m为何值，该函数的图象与x轴没有公共点；

（2）解答：$y=x^2-2mx+m^2+3=$（$x-m$）$^2+3$，

把函数$y=$（$x-m$）$^2+3$的图象延y轴向下平移3个单位长度后，得到函数$y=$（$x-m$）^{2}的图象，它的 顶点坐标是（m，0），

因此，这个函数的图象与x轴只有一个公共点，

所以，把函数$y=x^2-2mx+m^2+3$的图象延y轴向下平移3个单位长度后，得到的函数的图象与x轴只有一个公共点．

点评：本题考查了二次函数和x轴的交点问题，根的判别式，平移的性质，二次函数的图象与几何变换的应用，主要考查学生的理解能力和计算能力，题目比较好，有一定的难度．

10.（2014•泰州，第17题，12分）（1）计算：$-2^4-\sqrt{12}+|1-4\sin 60°|+(\pi-\frac{2}{3})^0$；

（2）解方程：$2x^2-4x-1=0$．

考点：实数的运算；零指数幂；解一元二次方程－公式法；特殊角的三角函数值．

分析：（1）原式第一项利用乘方的意义化简，第二项化为最简二次根式，第三项利用特殊角的三角函数值及绝对值的代数意义化简，最后一项利用零指数幂法则计算即可得到结果；

（2）找出a，b，c的值，计算出根的判别式的值大于0，代入求根公式即可求出解．

解答：解：（1）原式$=-16-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}-1+1=-16$；

（2）这里$a=2$，$b=-4$，$c=-1$，

$\because \triangle=16+8=24$，

$\therefore x=\frac{4\pm 2\sqrt{6}}{4}=\frac{2\pm\sqrt{6}}{2}$．

点评：此题考查了实数的运算，熟练掌握运算法则是解本题的关键．

11.（2014•扬州，第20题，8分）已知关于x的方程$(k-1)x^2-(k-1)x+\frac{1}{4}=0$有两个相等的实数根，求$k$的值．

考点：根的判别式；一元二次方程的定义

分析：根据根的判别式令$\triangle=0$，建立关于k的方程，解方程即可．

解答：解：$\because$关于x的方程$(k-1)x^2-(k-1)x+\frac{1}{4}=0$有两个相等的实数根，

$\therefore \triangle=0$，

$\therefore[-(k-1)]^2-4(k-1)\frac{1}{4}=0$，

整理得，$k^2-3k+2=0$，

即 $(k-1)(k-2)=0$，

解得：$k=1$（不符合一元二次方程定义，舍去）或 $k=2$．

$\therefore k=2$．

点评：本题考查了根的判别式，一元二次方程根的情况与判别式△的关系：

（1）$\triangle>0\Leftrightarrow$方程有两个不相等的实数根；

（2）$\triangle=0\Leftrightarrow$方程有两个相等的实数根；

（3）$\triangle<0\Leftrightarrow$方程没有实数根．