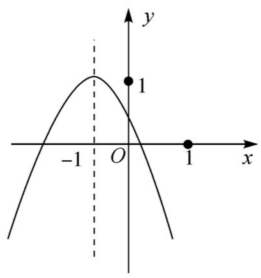
考点跟踪训练41　开放型问题

一、选择题

1．(2011·兰州)如图所示的二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象中，刘星同学观察得出了下面四条信息：(1)$b^2-4ac>0$；(2)$c>1$；(3)$2a-b<0$；(4)$a+b+c<0$.你认为其中错误的个数有(　)



A．2个　B．3个　C．4个　D．1个

答案　D

解析　(1)由图象知，该函数图象与 x 轴有两个交点，

∴$\triangle=b^2-4ac>0$，故本选项正确；

(2)由图象知，该函数图象与 y 轴的交点在(0,1)，∴$c<1$，故本选项错误；

(3)由图象知，对称轴 $x=-\ >-1$，又函数图象的开口方向向下，∴$a<0$，∴$-b<-2a$，即 $2a-b<0$，故本选项正确；

(4)由图象知，当 $x=1$ 时，$y=a+b+c<0$，∴$a+b+c<0$，故本选项正确；

综上所述，其中错误的是(2)，故选D.

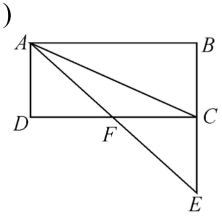
2．(2010·南通)在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $P(2,2)$，点 Q 在 y 轴上，$\triangle PQO$ 是等腰三角形，则满足条件的点 Q 共有(　　)

A．5个 B．4个 C．3个 D．2个

答案　B

解析　本题只给出了 $P(2,2)$，$O(0,0)$两个点的坐标，另外一个点的位置未知，可通过简单的画图，确定点 Q 在 y 轴上的位置．注意到线段 PO 可以为腰，也可以为底，当线段 PO 为腰时，分别以 O、P 为圆心，PO 为半径作圆与 y 轴的交点位置即为 Q 的位置，可以在数轴上找出三个点，当以 PO 为底时，作 PO 的垂直平分线与 y 轴的交点也是 Q 点的位置，可找出一个，故点 Q 有4个．

3．(2009·沈阳)如图，AC 是矩形 $ABCD$ 的对角线，E 是边 BC 延长线上一点，AE 与 CD 交于点 F，则图中相似三角形共有(　　)

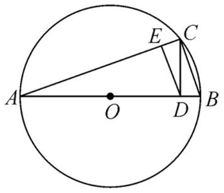


A．2对　B．3对　C．4对　D．5对

答案　C

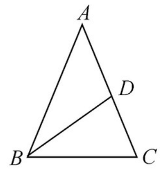
解析　$\triangle ADF\backsim\triangle ECF\backsim\triangle EBA$，$\triangle ABC\backsim\triangle CDA$，共4对．

4．如图，AB 是⊙O 的直径，点 C 在⊙O 上，$CD\perp AB$，$DE\parallel BC$，则图中与$\triangle ABC$ 相似的三角形的个数为(　　)



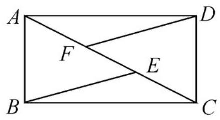
A．4个　B．3个　C．2个　D．1个
答案　A
解析　分别是△ADE、△CDE、△BCD、△ACD.
5．在等腰△ABC中，$AB=AC$，中线BD将这个三角形的周长分为15和12两个部分，则这个等腰三角形的底边是(　　)
A．7 B．11
C．7或11 D．7或10
答案　C

解析　设$AD=CD=x$，$BC=y$则$AB=2x$，分类讨论：①②
解得故底边是7或11.



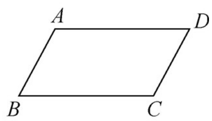
二、填空题
6．(2011·邵阳)请写出一个解为$x=2$的一元一次方程：________________.
答案　答案不唯一，如$x-2=0$,$2x=4$等．
7．(2010·毕节)请写出含有字母x、y的五次单项式__________(只要求写一个)．
答案　答案不唯一，例如x^2y^3，x^3y^2等．

8．如图所示，E、F是矩形$ABCD$对角线AC上的两点，试添加一个条件：______________，使得△ADF≌△CBE.

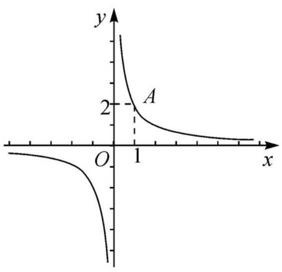


答案　不唯一，如：$AF=CE$，$AE=CF$，∠ADF=∠CBE等．

9．(2009·白银)如图，四边形$ABCD$是平行四边形，使它为矩形的条件可以是______________．

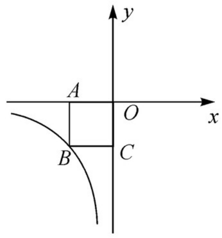


答案　答案不唯一，如$AC=BD$，∠$ADC=90°$等．
10．(2010·益阳)如图，反比例函数$y=$的图象位于第一、三象限，其中第一象限内的图象经过点$A(1,2)$，请在第三象限内的图象上找一个你喜欢的点P，你选择的P点坐标为______________．

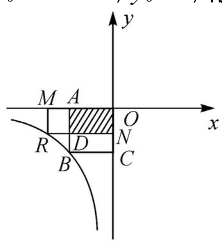


答案　答案不唯一，x、y满足$xy=2$且$x<0$，$y<0$均可．
三、解答题
11．如图，正方形$OABC$的面积是4，点B在反比例函数$y=(k>0，x<0)$的图象上，若点R是该反比例函数图象上异于点B的任意一点，过点R分别作x轴，y轴的垂线，垂足为M、N.从矩形$OMRN$的面积中减去其与正方形$OABC$重合的面积，记剩余部分的面积为S，

则当 $S=m$(m 为常数，且 $0<m<4$)时，求点 R 的坐标．(用含 m 的代数式表示)



解　(1)如图，若 R 在点 B 的左边，设 $R(x_0,y_0)$，由题意，得 $k=4$.故 $x_0y_0=4$，由反比例函数的几何意义可得，四边形 $RMAD$ 的面积为 $S(S=m)$，即 $AM\cdot MR=m$，$AM=-2-x_0$，$MR=-y_0$，故 $(2+x_0)\cdot y_0=m, 2y_0+x_0y_0=m, 2y_0+4=m$，$y_0=$ ，故 $x_0=$ ，故此时 R.



(2)若 R 在点 B 的右边，同理 R.

综上，可得点 R 的坐标为

或.

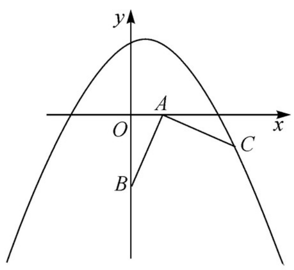
12．(2011·綦江)在如图的直角坐标系中，已知点 $A(1,0)$、$B(0,-2)$，将线段 AB 绕点 A 按逆时针方向旋转 90°至 AC.

(1)求点 C 的坐标；

(2)若抛物线 $y=-x^2+ax+2$ 经过点 C.

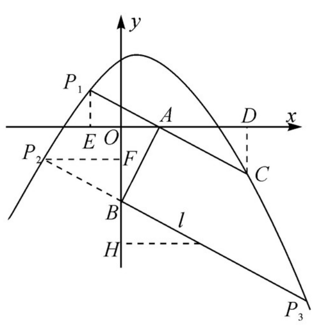
① 求抛物线的解析式；

② 在抛物线上是否存在点 P(点 C 除外)使△ABP 是以 AB 为直角边的等腰直角三角形？若存在，求出所有点 P 的坐标；若不存在，请说明理由．



解　(1)过点 C 作 $CD\perp x$ 轴，垂足为 D，

在△ACD 和△BAO 中，有 $\angle CAD+\angle BAO=90°$，$\angle ABO+\angle BAO=90°$，$\therefore \angle CAD=\angle ABO$.又$\because \angle ADC=\angle AOB=90°$，$CA=AB$，$\therefore$△$ACD$≌△$BAO$，$\therefore CD=OA=1$，$AD=BO=2$，$\therefore$点 C 的坐标为 $(3,-1)$．



(2)①$\because$抛物线 $y=-x^2+ax+2$ 经过点 $C(3,-1)$，

$\therefore -1=-\times 3^2+3a+2$，解得 $a=.$

$\therefore$抛物线的解析式为 $y=-x^2+x+2.$

② 解法一：

$i)$ 当 A 为直角顶点时 ，延长 CA 至点 P_1，使 $AP_1=AC=AB$，则$\triangle ABP_1$是以 AB 为直角边的等腰直角三角形．

过点 P_1 作 $P_1E\perp x$ 轴， $\because AP_1=AC$，$\angle EAP_1=\angle DAC$，$\angle P_1EA=\angle CDA=90°$，$\therefore\triangle EP_1A\cong\triangle DCA$，$\therefore AE=AD=2, EP_1=CD=1$，$\therefore$可求得 P_1的坐标为$(-1,1)$．

经检验点 P_1在抛物线上，因此存在点 P_1满足条件；

$ii)$ 当 B 为直角顶点时，过点 B 作直线 $l\perp BA$，在直线 l 上分别取 $BP_2=BP_3=AB$，得到以 AB 为直角边的等腰 $Rt\triangle ABP_2$和等腰 $Rt\triangle ABP_3$.作 $P_2F\perp y$ 轴，同理可证$\triangle BP_2F\cong\triangle ABO$，

$\therefore P_2F=BO=2, BF=OA=1$，可得点 P_2的坐标为$(-2，-1)$，经检验 P_2在抛物线上，因此存在点 P_2满足条件．

同理可得点 P_3的坐标为$(2，-3)$，经检验 P_3不在抛物线上，故不存在满足条件的点 P_3.

综上，抛物线上存在点 $P_1(-1,1)$，$P_2(-2，-1)$两点，使得$\triangle ABP_1$和$\triangle ABP_2$是以 AB 为直角边的等腰直角三角形．

解法二：

$i)$ 当点 A 为直角顶点时，易求出直线 AC 的解析式为 $y=-x+$ ，由

解之可得 $P_1(-1,1)$(已知点 C 除外)．

作 $P_1E\perp x$ 轴于 E，则 $AE=2, P_1E=1,$ 由勾股定理有 $AP_1==.$又$\because AB=$ ，$\therefore AP_1=AB$，$\therefore\triangle P_1AB$ 是以 AB 为直角边的等腰直角三角形；

$ii)$当 B 点为直角顶点时，过 B 作直线 $l\parallel AC$ 交抛物线于点 P_2和点 P_3，易求出直线 l 的解析式为：

$y=-x-2$，由

解得 $x_1=-2$ 或 $x_2=4.$

$\therefore P_2(-2，-1)$，$P_3(4，-4)$．

作 $P_2F\perp y$ 轴于 F，同理可求得 $BP_2==AB$，$\therefore\triangle P_2AB$ 是以 AB 为直角边的等腰直角三角形．

作 $P_3H\perp y$ 轴于 H，可求得 $BP_3==2\neq AB$，$\therefore\triangle ABP_3$不是等腰直角三角形，$\therefore$点 P_3不满足条件．

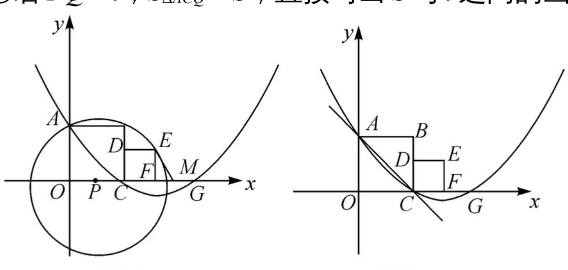
综上，抛物线上存在点 $P_1(-1,1)$，$P_2(-2，-1)$两点，使得$\triangle ABP_1$和$\triangle ABP_2$ 是以 AB 为直角边的等腰直角三角形．

13．(2011·荆州)如图甲，分别以两个彼此相邻的正方形 $OABC$ 与 $CDEF$ 的边 OC、OA 所在直线为 x 轴、y 轴建立平面直角坐标系(O、C、F 三点在 x 轴正半轴上)．若⊙P 过 A、B、E 三点(圆心在 x 轴上)，抛物线 $y=x^2+bx+c$ 经过 A、C 两点，与 x 轴的另一交点为 G，M 是 FG 的中点，正方形 $CDEF$ 的面积为 1.

(1)求 B 点的坐标；

(2)求证：ME 是⊙P 的切线；

(3)设直线 AC 与抛物线对称轴交于 N，Q 点是此对称轴上不与 N 点重合的一动点，①求$\triangle ACQ$ 周长的最小值；②若 $FQ=t$，$S_{\triangle ACQ}=S$，直接写出 S 与 t 之间的函数关系式．



图甲　　图乙

解　(1)如图甲，连接 PE、PB，设 $PC=n.$

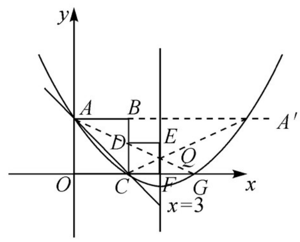
$\because$正方形 $CDEF$ 面积为 1，$\therefore CD=CF=1.$

根据圆和正方形的对称性知 $OP=PC=n$，

$\therefore BC=2PC=2n.$

而 $PB=PE$，$PB^2=BC^2+PC^2=4n^2+n^2=5n^2$.
又 $PE^2=PF^2+EF^2=(n+1)^2+1$，
$\therefore 5n^2=(n+1)^2+1$.
解得 $n_1=1$，$n_2=-$(舍去)．
$\therefore BC=OC=2$.
$\therefore B$ 点坐标为(2,2)．
(2)如图甲，由(1)知 $A(0,2)$，$C(2,0)$．
$\because A$、C 在抛物线上，
$\therefore$解之，得：

$\therefore$抛物线的解析式为 $y=x^2-x+2$.
$\therefore$抛物线的对称轴为 $x=3$，即 EF 所在直线．
$\because C$ 与 G 关于直线 $x=3$ 对称，$\therefore CF=FG=1$.
$\therefore MF=FG=$.
在 Rt△PEF 与 Rt△EMF 中，
＝，＝＝，
∴＝.
$\because \angle PFE=\angle EFM=90°$，
$\therefore \triangle PEF\backsim\triangle EMF$.
$\therefore \angle EPF=\angle FEM$.
$\therefore \angle PEM=\angle PEF+\angle FEM=\angle PEF+\angle EPF=90°$.
$\therefore ME$ 与⊙P 相切．



图丙

(3)① 如图丙，延长 AB 交抛物线于 A'，连 CA'交对称轴 $x=3$ 于 Q，连接 AQ，则有 $AQ=A'Q$，△ACQ 周长的最小值为($AC+A'C$)的长．
$\because A$ 与 A'关于直线 $x=3$ 对称，$A(0,2)$，
$\therefore A'(6,2)$．
又$\because C(2,0)$，
$\therefore A'C=\ =2$，
而 $AC=\ =2$．
∴△ACQ 周长的最小值为 2 ＋2 ；
② 当 Q 点在 F 点上方时，$S=t+1$；
当 Q 点在线段 FN 上时，$S=1-t$；
当 Q 点在 N 点下方时，$S=t-1$.