考点跟踪训练 26　圆的基本性质

一、选择题

1．(2011·上海)矩形 ABCD 中，AB＝8，BC＝3，点 P 在边 AB 上，且 BP＝3AP，如果圆 P 是以点 P 为圆心，PD 为半径的圆，那么下列判断正确的是(　　)

A. 点 B、C 均在圆 P 外

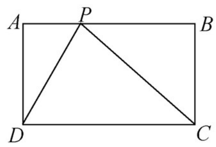
B. 点 B 在圆 P 外、点 C 在圆 P 内

C. 点 B 在圆 P 内、点 C 在圆 P 外

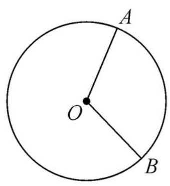
D．点 B、C 均在圆 P 内

答案　C

解析　如图，AB＝8，BP＝3AP，得 BP＝6，AP＝2.在 Rt△APD 中，PD＝＝7>BP，所以点 B 在圆 P 内；在 Rt△BPC 中，PC＝＝9>PD，所以点 C 在圆 P 外．



2．(2011·凉山)如图，∠AOB＝100°，点 C 在⊙O 上，且点 C 不与 A、B 重合，则∠ACB 的度数为(　　)



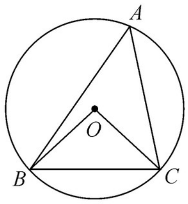
A．50°　　　　B．80°或 50°

C．130°　　　　D．50° 或 130°

答案　D

解析　当点 C 在优弧上，∠ACB＝∠AOB＝50°；当点 C 在劣弧上，∠ACB＝180°－50°＝130°.综上，∠ACB＝50°或 130°.

3．(2011·重庆)如图，⊙O是△ABC的外接圆，∠OCB＝40°，则∠A的度数等于(　　)



A．60°　　　　B．50°

C．40°　　　　D．30°

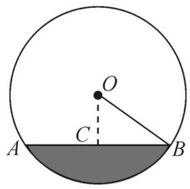
答案　B

解析　在△OBC中，OB＝OC，∠OCB＝40°，

∴∠BOC＝180°－2×40°＝100°.

∴∠A＝∠BOC＝×100°＝50°.

4．(2011·绍兴)一条排水管的截面如图所示．已知排水管的截面圆半径OB＝10，截面圆圆心O到水面的距离OC是6，则水面宽AB是(　　)



A．16　　　　B．10

C．8　　　　D．6

答案　A

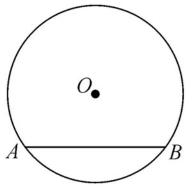
解析　在Rt△OBC中，OB＝10，OC＝6，

∴BC＝＝8.

∵OC⊥AB，

∴AC＝BC.

∴AB＝2BC＝2×8＝16.



5．(2011·嘉兴)如图，半径为 10 的⊙O 中，弦 AB 的长为 16，则这条弦的弦心距为(　　)

A．6　B．8

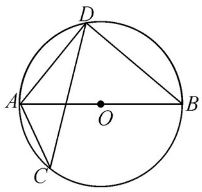
C．10　D．12

答案　A

解析　作弦心距 OC，得 AC＝BC＝×16＝8.连接 AO，在 Rt△AOC 中，OC＝＝6.

二、填空题

6．(2011·扬州)如图，⊙O 的弦 CD 与直径 AB 相交，若∠BAD＝50°，则∠ACD＝__________度．



答案　40

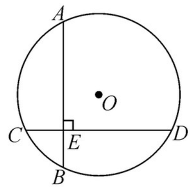
解析　∵AB 是⊙O 的直径，

∴∠ADB＝90°.

∴∠B＝90°－∠BAD＝90°－50°＝40°.

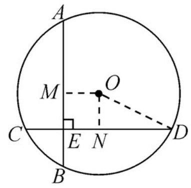
∴∠ACD＝∠B＝40°.

7．(2011·安徽)如图，⊙O 的两条弦 AB、CD 互相垂直，垂足为 E，且 AB＝CD，已知 CE＝1，ED＝3，则⊙O 的半径是________________．



答案

解析　画 OM⊥AB，ON⊥CD，垂足分别为 M、N，连接 OD.



∵AB＝CD，

∴OM＝ON.

易证四边形 OMEN 是正方形.

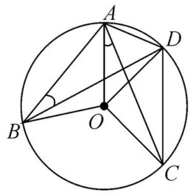
∵CN＝DN＝CD＝×(1＋3)＝2，

∴EN＝CN－CE＝2－1＝1.

∴ON＝1.

∴在 Rt△DON 中，OD＝＝.

8．(2011·杭州)如图，点 A、B、C、D 都在⊙O 上，的度数等于 84°，CA 是∠OCD 的平分线，则∠ABD＋∠CAO＝__________.



答案　48°

解析　∵OA＝OC，

∴∠CAO＝∠ACO.

又∵∠ABD＝∠ACD，

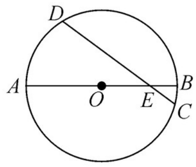
∴∠ABD＋∠CAO＝∠ACD＋∠ACO＝∠DCO.

在△CDO 中，OC＝OD，∠COD＝＝＝＝＝＝84°，

∴∠DCO＝＝48°，即∠ABD＋∠CAO＝48°.

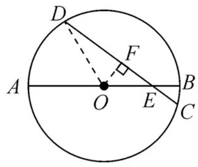
9．(2011·威海)如图，⊙O 的直径 AB 与弦 CD

相交于点E，若AE＝5，BE＝1，CD＝4，则∠AED＝____________.



答案　30°

解析　连接DO，画OF⊥CD，垂足是F.



∴CF＝DF＝CD＝×4 ＝2 .

∵AB＝AE＋BE＝5＋1＝6，

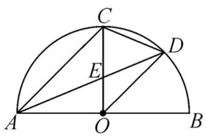
∴DO＝AB＝3.

在Rt△DFO中，OF＝＝1，

在Rt△OFE中，OE＝3－1＝2，OF＝1.∴∠AED＝30°.

10．(2011·舟山)如图，AB是半圆直径，半径OC⊥AB于点O，AD平分∠CAB交弧BC于点D，连接CD、OD，给出以下四个结论：① AC∥OD；② CE＝OE；③△ODE∽△ADO；④ $2CD^2$＝CE·AB.其中正确结论的序号是________ .

答案　①④



解析　∵OC⊥AB，∴A＝B＝90°.

∵AD平分∠CAD，

∴∠CAD＝∠BAD，＝＝45°.

∴∠CAB======＝45°，

∠DOB=====＝45°，

∴∠CAD＝∠DOB，AC∥OD；

在△ACO中，AC>AO，AE平分∠CAO，∴CE≠EO；

由AC∥OD，得△ODE∽△CAE，而∠CAD＝∠BAO，∠ACE≠∠AOD，∠AEC≠∠AOD.∴△ACE与△ADO不相似，即△ODE与△ADO不相似；

连接BD，有BD＝CD，可求得∠B＝67.5°，又∵∠CED＝∠AEO＝67.5°，∴∠B＝∠CED.又∵∠CDE＝∠DOB＝45°，∴△CDE∽△DOB，＝，CD·DB＝CE·DO，∴CD^2＝CE·，即$2CD^2$＝CE·AB.

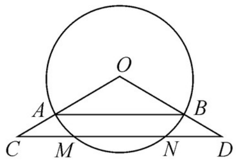
故结论①、④正确．

三、解答题

11．(2011·上海)如图，点C、D分别在扇形AOB的半径OA、OB的延长线上，且OA＝3，AC＝2，CD平行于AB，并与A相交于点M、N.

(1)求线段OD的长；

(2)若tan∠C＝，求弦MN的长．



解　(1)∵CD∥AB，

∴∠OAB＝∠C，∠OBA＝∠D.

∵OA＝OB，

∴∠OAB＝∠OBA.

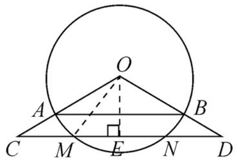
∴∠C＝∠D.

∴OC＝OD.

∵OA＝3，AC＝2，

∴OC＝5.

∴OD＝5.



(2)过点O作OE⊥CD，E为垂足，连接OM.

在Rt△OCE中，OC＝5，tan∠C＝ ，设OE＝x，则CE＝2x.由勾股定理得$x^2+(2x)^2=5^2$，解得$x_1=$ ，$x_2=-$(舍去)．

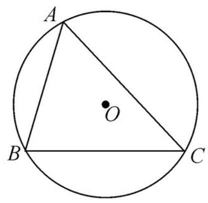
∴OE＝.

在Rt△OME中，OM＝OA＝3，

∴ME＝＝＝2.

∴MN＝2ME＝4.

12．(2011·江西)如图，已知⊙O的半径为2，弦BC的长为2 ，点A为弦BC所对优弧上任意一点(B、C两点除外)．



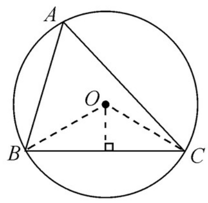
(1)求∠BAC的度数；

(2)求△ABC面积的最大值．

(参考数据：sin60°＝ ，cos30°＝ ，tan30°＝.)

解　(1) 解法一：

连接OB、OC，过O作OE⊥BC于点E(如图)．



∵OE⊥BC，BC＝2 ，

∴BE＝EC＝.

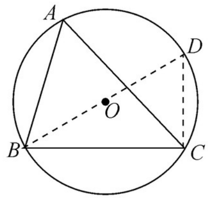
在 Rt△OBE 中，OB＝2，

∵sin∠BOE＝＝，

∴∠BOE＝60°，

∴∠BOC＝120°，

∴∠BAC＝∠BOC＝60°.



解法二：

连接 BO 并延长，交⊙O 于点 D，连接 CD.(如图)

∵BD 是直径，

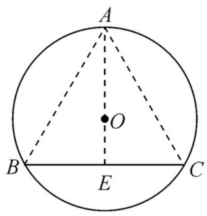
∴BD＝4，∠DCB＝90°.

在 Rt△DBC 中，

sin∠BDC＝＝＝，∴∠BDC＝60°，

∴∠BAC＝∠BDC＝60°.

(2)因为△ABC 的边 BC 的长不变，所以当 BC 边上的高最大时，△ABC 的面积最大，此时点 A 落在优弧 BC 的中点处.



如图，过 O 作 OE⊥BC 于 E，延长 EO 交⊙O 于点 A，则 A 为优弧 BC 的中点.连接 AB、AC，则 AB＝AC，∠BAE＝∠BAC＝30°.

在 Rt△ABE 中，

∵BE＝，∠BAE＝30°，

∴AE＝＝3，

∴$S_{\triangle ABC}$＝×2 ×3＝3．

答：△ABC 面积的最大值是 3．

13．(2011·德州)

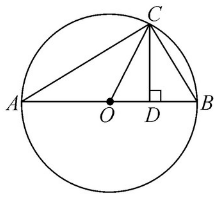
●观察计算

当 a＝5，b＝3 时， 与的大小关系是____________________；

当 a＝4，b＝4 时， 与的大小关系是____________________．

●探究证明

如图所示，△ABC 为圆 O 的内接三角形，AB 为直径，过 C 作 CD⊥AB 于 D，设 AD＝a，BD＝b.



(1)分别用 a、b 表示线段 OC、CD；

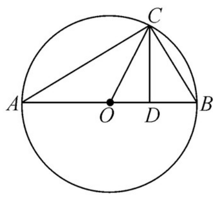
(2)探求 OC 与 CD 表达式之间存在的关系(用含 a、b 的式子表示)．

●归纳结论

根据上面的观察计算、探究证明，你能得出与的大小关系是：____________________________.

●实践应用

要制作面积为 1 平方米的长方形镜框，直接利用探究得出的结论，求出镜框周长的最小值．



解　观察计算：

＞；＝.

探究证明：

(1)∵AB＝AD＋BD＝2OC，

∴OC＝.

∵AB 为⊙O 直径，

∴∠ACB＝90°.

∵∠A＋∠ACD＝90°，∠ACD＋∠BCD＝90°，

∴∠A＝∠BCD.

∴△ACD∽△CBD.

∴＝.

即 CD^2＝AD·BD＝ab，

∴CD＝.

(2)当 a＝b 时，OC＝CD，＝；

a≠b 时，OC>CD，>.

结论归纳：≥.

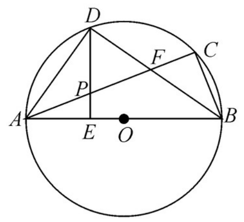
实践应用：

设长方形一边长为 x 米，则另一边长为米，设镜框周长为 l 米，则 l＝2(x＋) ≥4 ＝4．

当 x＝，即 x＝1(米)时，镜框周长最小．

此时四边形为正方形时，周长最小为 4 米．

14．(2011·肇庆)已知：如图，△ABC 内接于⊙O，AB 为直径，∠CBA 的平分线交 AC 于点 F，交⊙O 于点 D，DE⊥AB 于点 E，且交 AC 于点 P，连接 AD.



(1)求证：∠DAC ＝∠DBA；

(2)求证：P 是线段 AF 的中点；

(3)若⊙O 的半径为 5，AF = ，求 tan∠ABF 的值．

解 (1)证明：∵BD 平分∠CBA，∴∠CBD＝∠DBA.

∵∠DAC 与∠CBD 都是弧 CD 所对的圆周角，

∴∠DAC＝∠CBD.

∴∠DAC ＝∠DBA.

(2)证明：∵AB 为直径，∴∠ADB＝90°.

又∵DE⊥AB 于点 E，∴∠DEB＝90°.

∴∠ADE ＋∠EDB＝∠ABD＋∠EDB＝90°.

∴∠ADE＝∠ABD＝∠DAP.∴PD＝PA.

又∵∠DFP ＋∠DAC＝∠ADE ＋∠PDF＝90°，

且∠ADE＝∠DAC，

∴∠PDF＝∠PFD，∴PD＝PF.

∴PA＝PF，即 P 是线段 AF 的中点．

(3)解：∵∠DAF＝∠DBA，∠ADB＝∠FDA＝90°，

∴△FDA ∽△ADB，

∴＝.

∴在 Rt△ABD 中，

tan∠ABD＝＝＝＝，即 tan∠ABF＝.

15．(2011·广州)如图 1，⊙O 中 AB 是直径，C 是⊙O 上一点，∠ABC＝45°，等腰直角三角形 DCE 中∠DCE 是直角，点 D 在线段 AC 上．

(1)证明：B、C、E 三点共线；

(2)若 M 是线段 BE 的中点，N 是线段 AD 的中点，证明：MN＝OM；

(3)将△DCE 绕点 C 逆时针旋转 $\alpha(0^0<\alpha<90^0)$ 后，记为$\triangle D_1CE_1$(图 2)，若 M_1 是线段 BE_1 的中点，N_1 是线段 AD_1 的中点，M_1N_1＝OM_1 是否成立？若成

立，请证明；若不成立，说明理由．

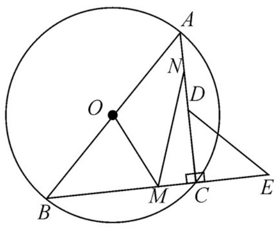


图1

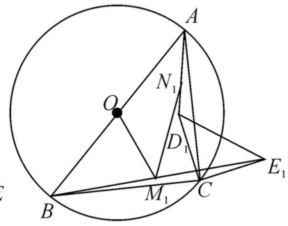


图2

解　(1)证明：∵ AB 是⊙O 的直径，

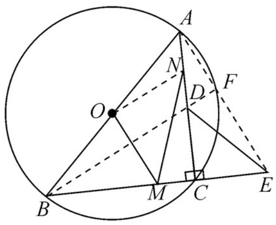
∴ $\angle ACB＝90°$.

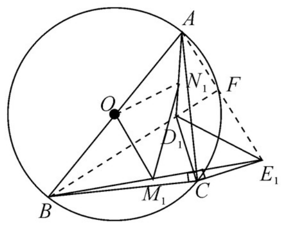
∵ $\angle DCE＝90°$，

∴$\angle ACB＋\angle DCE＝180°$，

∴ B、C、E 三点共线．

(2)证明：如图，连接 ON、AE、BD，延长 BD 交 AE 于点 F.





∵ $\angle ABC＝45°$，$\angle ACB＝90°$，∴ BC＝AC.

又$\angle ACB＝\angle DCE＝90°$，DC＝EC，

∴ △BCD≌△ACE.

∴ BD＝AE，$\angle DBC＝\angle CAE$.

∴$\angle DBC＋\angle AEC＝\angle CAE＋\angle AEC＝90°$.

∴ BF⊥AE.

∵ AO＝OB，AN＝ND，

∴ ON＝BD，ON∥BD.

∵ AO＝OB，EM＝MB，

∴ OM＝AE，OM∥AE.

∴ OM＝ON，OM⊥ON.

∴ $\angle OMN＝45°$.

又 cos$\angle OMN＝$ ，∴ MN＝OM.

(3) $M_1N_1=OM_1$成立，证明同(2)．