考点跟踪训练43　阅读理解型问题

一、选择题

1．若将代数式中的任意两个字母交换，代数式不变，则称这个代数式为完全对称式，如 $a+b+c$ 就是完全对称式．下列三个代数式：①$(a-b)^2$；② $ab+bc+ca$；③ $a^2b+b^2c+c^2a$.其中是完全对称式的是(　　)

A．①②　B．①③　C．②③　D．①②③

答案　A

解析　若把 $a^2b+b^2c+c^2a$ 中的 a，b 两个字母交换，得 $b^2a+a^2c+c^2b$，代数式发生变化，不是完全对称式；而$(a-b)^2=(a-a)^2$，$ab+bc+ca=ba+ac+cb$，是完全对称式．

2．(2010·嘉兴)若自然数 n 使得三个数的加法运算“$n+(n+1)+(n+2)$”产生进位现象，则称 n 为“连加进位数”．例如：2 不是“连加进位数”，因为 $2+3+4=9$ 不产生进位现象；4 是“连加进位数”，因为 $4+5+6=15$ 产生进位现象；51 是“连加进位数”，因为 $51+52+53=156$ 产生进位现象．如果从 0,1,2，…，99 这 100 个自然数中任取一个数，那么取到“连加进位数”的概率是(　　)

A．0.88　B．0.89　C．0.90　D．0.91

答案　A

解析　先利用分类讨论，得到一位数中“连加进位数”有 7 个，分别为(3,4,5,6,7,8,9)，再考虑到两位数中“连加进位数”有 67 个分别为(33,34,35，…，99)，再考虑到两位数中(13，…，19)与(23，…，29)中个位数中产生了进位，合计 $7+67+7+7=88$ 个．故取到“连加进位数”的概率 $P==0.88$.

3．(2010·日照)古希腊人常用小石子在沙滩上摆成各种形状来研究数，例如：

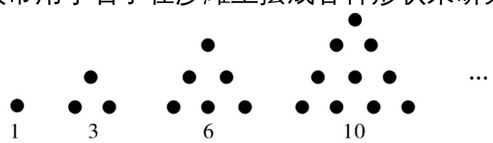


图1

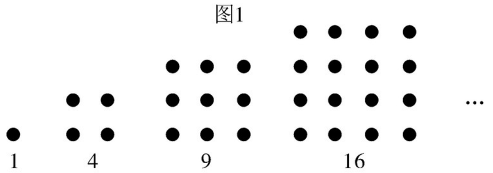


图2

他们研究过图 1 中的 1,3,6,10，…，由于这些数能够表示成三角形，将其称为三角形数；类似地，称图 2 中的 1,4,9,16，…，这样的数为正方形数．下列数中既是三角形数又是正方形数的是(　　)

A．15　B．25　C．55　D．1225

答案　D

解析　第 n 个三角数是，正方形数是 n^2，当对于 1225，有 $=1225$，$n=49$ 或 -51；$n^2=1225$，$n=\pm 35$.所以 1225 即是三角形数又是正方形数．

4．(2008·湖北)因为 $\sin 30°=$，$\sin 210°=-$，所以 $\sin 210°=\sin(180°+30°)=-\sin 30°$；因为 $\sin 45°=$，$\sin 225°=-$，所以 $\sin 225°=\sin(180°+45°)=-\sin 45°$；由此猜想，推理知：一般地当 α 为锐角时有 $\sin(180°+\alpha)=-\sin\alpha$，由此可知：$\sin 240°=$(　　)

A．－　B．－　C．－　D．－

答案　C

解析　由 $\sin(180°+\alpha)=-\sin\alpha$，得 $\sin 240°=\sin(180°+60)=-\sin 60°=-$.

5．(2010·广州)为确保信息安全，信息需加密传输，发送方由明文→密文(加密)，接收

方由密文→明文(解密)，已知有一种密码，将英文 26 个小写字母 a，b，c，…，z 依次对应 0,1,2，…，25 这 26 个自然数(见表格)，当明文中的字母对应的序号为 β 时，将 $\beta+10$ 除以 26 后所得的余数作为密文中的字母对应的序号，例如明文 s 对应密文 c.

字母	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
序号	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
字母	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
序号	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

按上述规定，将明文"*maths*"译成密文后是(　　)

A．*wkdrc*　B．*wkhtc*　C．*eqdjc*　D．*eqhjc*

答案　A

解析　m 对应的数字是 12,12＋10＝22，除以 26 的余数仍然是 22，因此对应的字母是 w；a 对应的数字是 0,0＋10＝10，除以 26 的余数仍然是 10，因此对应的字母是 k；t 对应的数字是 19,19＋10＝29，除以 26 的余数仍然是 3，因此对应的字母是 d；…，所以本题译成密文后是 *wkdrc*.

二、填空题

6．(2010·黄石)若自然数 n 使得作竖式加法 $n+(n+1)+(n+2)$ 均不产生进位现象，则称 n 为"可连数"，例如 32 是"可连数"，因为 32＋33＋34 不产生进位现象；23 不是"可连数"，因为 23＋24＋25 生产了进位现象，那么小于 200 的"可连数"的个数为________．

答案　24

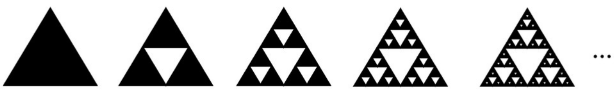
解析　利用分类讨论，一位数中"可连数"有 3 个，分别为(0,1,2)；再考虑两位数中"可连数"有(10,11,12)，(20,21,22)，(30,31,32)；三位数中"可连数"有(100,101,102)，(110,111,112)，(120,121,122)，(130,131,132)．故合计 3×8＝24 个．

7．(2011·怀化)定义新运算：对任意实数 a、b，都有 $a*b=a^2-b$，例如，3]　　　.

答案　3

解析　据题意，有 2]

8．(2010·曲靖)把一个正三角形分成四个全等的三角形，第一次挖去中间一个小三角形，对剩下的三个小正三角形再重复以上做法……，一直到第 n 次挖去后剩下的三角形有________个．



第一次　第二次　第三次　第四次

答案　3^n

解析　第一次操作之后有 3 个小正三角形，第二次操作之后有 9 个小正三角形，第三次操工作之后有 27 个小正三角形，……，则第 n 次操作之后有 3^n 个小正三角形．

9．数学的美无处不在．数学家们研究发现，弹拨琴弦发出声音的音调高低，取决于弦的长度，绷得一样紧的几根弦，如果长度的比能够表示成整数的比，发出的声音就比较和谐．例如，三根弦长度之比是 15∶12∶10，把它们绷得一样紧，用同样的力弹拨，它们将分别发出很调和的乐声 *do*、*mi*、*so*.研究 15、12、10 这三个数的倒数发现：－＝－.我们称 15、12、10 这三个数为一组调和数．现有一组调和数：x、5、3($x>5$)，则 x 的值是_________．

答案　15

解析　依据调和数的意义，有－＝－，解得 $x=15$.

10．(2011·北京)在下表中，我们把第 i 行第 j 列的数记为 $a_{i,j}$(其中 i，j 都是不大于 5 的

正整数)，对于表中的每个数 $a_{i,j}$，规定如下：当 $i\geq j$ 时，$a_{i,j}=1$；当 $i<j$ 时，$a_{i,j}=0$.例如：当 $i=2$，$j=1$ 时，$a_{i,j}=a_{2,1}=1$.按此规定，$a_{1,3}=$________；表中的25个数中，共有________个1；计算 $a_{1,1}\cdot a_{i,1}+a_{1,2}\cdot a_{i,2}+a_{1,3}\cdot a_{i,3}+a_{1,4}\cdot a_{i,4}+a_{1,5}\cdot a_{i,5}$的值为________.

$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$	$a_{1,4}$	$a_{1,5}$
$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{2,3}$	$a_{2,4}$	$a_{2,5}$
$a_{3,1}$	$a_{3,2}$	$a_{3,3}$	$a_{3,4}$	$a_{3,5}$
$a_{4,1}$	$a_{4,2}$	$a_{4,3}$	$a_{4,4}$	$a_{4,5}$
$a_{5,1}$	$a_{5,2}$	$a_{5,3}$	$a_{5,4}$	$a_{5,5}$

答案　0；15；1

解析　由题意，i 与 j 之间大小分析：当 $i<j$ 时，$a_{i,j}=0$；当 $i\geq j$ 时，$a_{i,j}=1$.由图表可知有15个1，故填0；15；1.

三、解答题

11．(2010·凉山)先阅读下列材料，然后解答问题：

材料1：从3张不同的卡片中选取2张排成一列，有6种不同的排法，抽象成数学问题就是从3个不同元素中选取2个元素的排列，排列数记为 $A_3^2=3\times2=6$.

一般地，从 n 个不同元素中选取 m 个元素的排列数记作 A_n^m，$A_n^m=n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)(m\leq n)$．

例：从5个不同元素中选3个元素排成一列的排列数为：$A_5^3=5\times4\times3=60$.

材料2：从3张不同的卡片中选取2张，有3种不同的选法，抽象成数学问题就是从3个元素中选取2个元素的组合，组合数记为 $C_3^2==3$.

一般地，从 n 个不同元素中选取 m 个元素的组合数记作 C_n^m，$C_n^m=(m\leq n)$．

例：从6个不同元素中选3个元素的组合数为：$C_6^3==20$.

问：(1)从7个人中选取4人排成一排，有多少种不同的排法？

(2)从某个学习小组8人中选取3人参加活动，有多少种不同的选法？

解　(1)$A_7^4=7\times6\times5\times4=840$(种)．

(2)$C_8^3==56$(种).

12．(2010·益阳)我们把对称中心重合，四边分别平行的两个正方形之间的部分叫“方形环”，易知方形环四周的宽度相等．

一条直线 l 与方形环的边线有四个交点 M、M'、N'、N.小明在探究线段 MM' 与 $N'N$ 的数量关系时，从点 M'、N' 向对边作垂线段 $M'E$、$N'F$，利用三角形全等、相似及锐角三角函数等相关知识解决了问题．请你参考小明的思路解答下列问题：

(1)当直线 l 与方形环的对边相交时，如图1，直线 l 分别交 AD、$A'D'$、$B'C'$、BC 于 M、M'、N'、N，小明发现 MM' 与 $N'N$ 相等，请你帮他说明理由；

(2)当直线 l 与方形环的邻边相交时，如图2，l 分别交 AD、$A'D'$、$D'C'$、DC 于 M、M'、N'、N，l 与 DC 的夹角为 α，你认为 MM' 与 $N'N$ 还相等吗？若相等，说明理由；若不相等，求出的值(用含 α 的三角函数表示)．

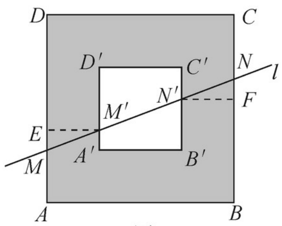


图1

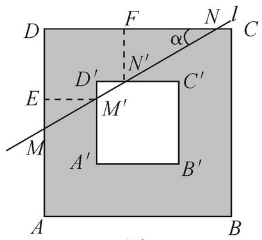


图2

解　(1)解：在方形环中，

∵$M'E\perp AD$，$N'F\perp BC$，$AD\parallel BC$，

∴$M'E=N'F$，$\angle M'EM=\angle N'FN=90°$，

$\angle EMM'=\angle FNN'$，

∴$\triangle MM'E\cong\triangle NN'F$.

∴$MM'=N'N$.

(2)解法一：∵$\angle NFN'=\angle MEM'=90°$，

$\angle FNN'=\angle EM'M=\alpha$，

∴$\triangle NFN'\backsim\triangle M'EM$，

∴＝.

∵$M'E=N'F$，

∴＝＝$\tan\alpha$(或)．

① 当 $\alpha=45°$时，$\tan\alpha=1$，则 $MM'=NN'$；

② 当 $\alpha\neq45°$时，$MM'\neq NN'$，

则 ＝$\tan\alpha$(或)．

解法二：在方形环中，$\angle D=90°$.

又∵$M'E\perp AD$，$N'F\perp CD$，

∴$M'E\parallel DC$，$N'F=M'E$.

∴$\angle MM'E=\angle N'NF=\alpha$.

在 Rt$\triangle NN'F$ 与 Rt$\triangle MM'E$ 中，

$\sin\alpha=$ ，$\cos\alpha=$ ，

即＝$\tan\alpha$(或)．

① 当 $\alpha=45°$时，$MM'=NN'$；

② 当 $\alpha\neq45°$时，$MM'\neq NN'$，

则 ＝$\tan\alpha$(或)．

13．(2011·苏州)如图①，小慧同学把一个正三角形纸片(即$\triangle OAB$)放在直线 l_1 上，OA 边与直线 l_1 重合，然后将三角形纸片绕着顶点 A 按顺时针方向旋转 120°，此时点 O 运动到了点 O_1 处，点 B 运动到了点 B_1 处；小慧又将三角形纸片 AO_1B_1 绕 B_1 点按顺时针方向旋转 120°，此时点 A 运动到了点 A_1 处，点 O_1 运动到了点 O_2 处(即顶点 O 经过上述两次旋转到达 O_2 处)．

小慧还发现：三角形纸片在上述两次旋转过程中，顶点 O 运动所形成的图形是两段圆弧，即弧 OO_1 和弧 O_1O_2，顶点 O 所经过的路程是这两段圆弧的长度之和，并且这两端圆弧与直线 l_1 围成的图形面积等于扇形 AOO_1 的面积、$\triangle AO_1B_1$ 的面积和扇形 $B_1O_1O_2$ 的面积之和．

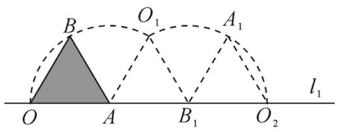
小慧进行类比研究：如图②，她把边长为 1 的正方形纸片 $OABC$ 放在直线 l_2 上，OA 边与直线 l_2 重合，然后将正方形纸片绕着顶点 A 按顺时针方向旋转 90°，此时点 O 运动到了点 O_1 处(即点 B 处)，点 C 运动到了点 C_1 处，点 B 运动到了点 B_1 处；小慧又将正方形纸片 $AO_1C_1B_1$ 绕 B_1 点按顺时针方向旋转 90°，……，按上述方法经过若干次旋转后，她提出了如

下问题：

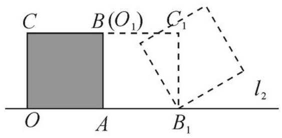
问题①：若正方形纸片 $OABC$ 按上述方法经过 3 次旋转，求顶点 O 经过的路程，并求顶点 O 在此运动过程中所形成的图形与直线 l_2 围成图形的面积；若正方形 $OABC$ 按上述方法经过 5 次旋转，求顶点 O 经过的路程；

问题②：正方形纸片 $OABC$ 按上述方法经过多少次旋转，顶点 O 经过的路程是 π？

请你解答上述两个问题．



图①

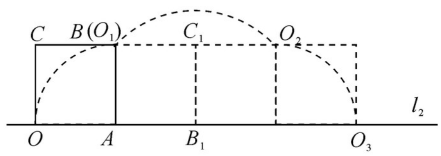


图②

解　问题①：如图，正方形纸片 $OABC$ 经过 3 次旋转，顶点 O 运动所形成的图形是三段弧，即弧 OO_1、弧 O_1O_2 以及弧 O_2O_3，

∴顶点 O 运动过程中经过的路程为

$\times 2 + = (1 +)\pi.$



顶点 O 在此运动过程中所形成的图形与直线 l_2 围成图形的面积为

$\times 2 + + 2\times\times 1\times 1 = 1 + \pi.$

正方形 $OABC$ 经过 5 次旋转，顶点 O 经过的路程为

$\times 3 + = (+)\pi.$

问题②：∵正方形 $OABC$ 经过 4 次旋转，顶点 O 经过的路程为 $\times 2 + = (1 +)\pi.$

∵$\pi = 20\times(1 +)\pi + \pi.$

∴正方形纸片 $OABC$ 经过了 81 次旋转．