操作探究

一、选择题

1.（2014•德州，第12题3分）如图，在一张矩形纸片 $ABCD$ 中，$AB=4$，$BC=8$，点 E，F 分别在 AD，BC 上，将纸片 $ABCD$ 沿直线 EF 折叠，点 C 落在 AD 上的一点 H 处，点 D 落在点 G 处，有以下四个结论：

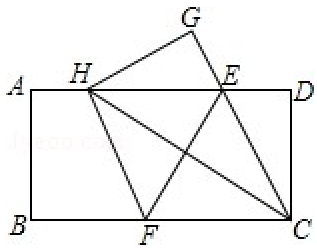
① 四边形 $CFHE$ 是菱形；

② EC 平分 $\angle DCH$；

③ 线段 BF 的取值范围为 $3\leq BF\leq 4$；

④ 当点 H 与点 A 重合时，$EF=2\sqrt{5}$．

以上结论中，你认为正确的有（　　）个．



A．1　　　　B．2　　　　C．3　　　　D．4

考点：翻折变换（折叠问题）

分析：先判断出四边形 $CFHE$ 是平行四边形，再根据翻折的性质可得 $CF=FH$，然后根据邻边相等的平行四边形是菱形证明，判断出①正确；

根据菱形的对角线平分一组对角线可得 $\angle BCH=\angle ECH$，然后求出只有 $\angle DCE=30°$ 时 EC 平分 $\angle DCH$，判断出②错误；

点 H 与点 A 重合时，设 $BF=x$，表示出 $AF=FC=8-x$，利用勾股定理列出方程求解得到 BF 的最小值，点 G 与点 D 重合时，$CF=CD$，求出 $BF=4$，然后写出 BF 的取值范围，判断出③正确；

过点 F 作 $FM\perp AD$ 于 M，求出 ME，再利用勾股定理列式求解得到 EF，判断出④正确．

解答：解：∵FH 与 CG，EH 与 CF 都是矩形 $ABCD$ 的对边 AD、BC 的一部分，

∴$FH\parallel CG$，$EH\parallel CF$，

∴四边形 $CFHE$ 是平行四边形，

由翻折的性质得，$CF=FH$，

∴四边形 $CFHE$ 是菱形，故①正确；

∴$\angle BCH=\angle ECH$，

∴只有 $\angle DCE=30°$ 时 EC 平分 $\angle DCH$，故②错误；

点 H 与点 A 重合时，设 $BF=x$，则 $AF=FC=8-x$，

在 $Rt\triangle ABF$ 中，$AB^2+BF^2=AF^2$，

即 $4^2+x^2=(8-x)^2$，

解得 $x=3$，

点 G 与点 D 重合时，$CF=CD=4$，

∴$BF=4$，

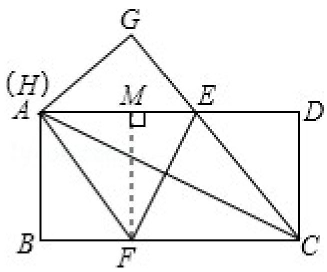
∴线段 BF 的取值范围为 $3\le BF\le 4$，故③正确；

过点 F 作 $FM\perp AD$ 于 M，则 $ME=(8-3)-3=2$，

由勾股定理得，$EF=\sqrt{MF^2+ME^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$，故④正确；

综上所述，结论正确的有①③④共 3 个．

故选 C．



点评：本题考查了翻折变换的性质，菱形的判定与性质，勾股定理的应用，难点在于③判断出 BF 最小和最大时的两种情况．

二.填空题

三.解答题

1.（2014•福建泉州，第 25 题 12 分）如图，在锐角三角形纸片 ABC 中，$AC>BC$，点 D，E，F 分别在边 AB，BC，CA 上．

（1）已知：$DE\parallel AC$，$DF\parallel BC$．

① 判断

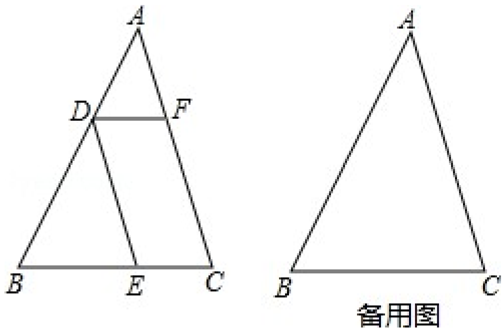
四边形 $DECF$ 一定是什么形状？

② 裁剪

当 $AC=24cm$，$BC=20cm$，$\angle ACB=45°$时，请你探索：如何剪四边形 $DECF$，能使它的面积最大，并证明你的结论；

（2）折叠

请你只用两次折叠，确定四边形的顶点 D，E，C，F，使它恰好为菱形，并说明你的折法和理由．



考点：四边形综合题

分析：（1）①根据有两组对边互相平行的四边形是平行四边形即可求得，②根据△ADF∽△ABC 推出对应边的相似比，然后进行转换，即可得出 h 与 x 之间的函数关系式，根据平行四边形的面积公式，很容易得出面积 S 关于 h 的二次函数表达式，求出顶点坐标，就可得出面积 s 最大时 h 的值．

（2）第一步，沿∠ABC 的对角线对折，使 C 与 $C1$ 重合，得到三角形 $ABB1$，第二步，沿 $B1$ 对折，使 $DA1\perp BB1$．

解答：解：（1）①∵$DE\parallel AC$，$DF\parallel BC$，x_k_b_1

∴四边形 $DECF$ 是平行四边形．

② 作 $AG\perp BC$，交 BC 于 G，交 DF 于 H，

∵ $\angle ACB=45°$，$AC=24cm$

∴$AG=\sqrt{\frac{1}{2}\times AC^2}=12\sqrt{2}$，

设 $DF=EC=x$，平行四边形的高为 h，

则 $AH=12\sqrt{2}-h$，

∵$DF\parallel BC$，

$\therefore \frac{DF}{BC}=\frac{12\sqrt{2}-h}{12\sqrt{2}}$，

$\because BC=20cm$，

即：$\frac{x}{20}=\frac{12\sqrt{2}-h}{12\sqrt{2}}$

$\therefore x=\frac{12\sqrt{2}-h}{12\sqrt{2}}\times 20$，

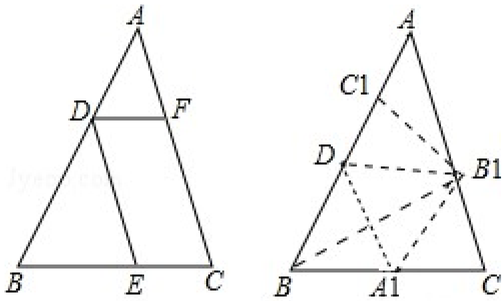
$\because S=xh=x\bullet\frac{12\sqrt{2}-h}{12\sqrt{2}}\times 20=20h-\frac{5\sqrt{2}}{6}h^2$．

$\therefore -\frac{b}{2a}=-\frac{20}{-2\times\frac{5\sqrt{2}}{6}}=6\sqrt{2}$，

$\because AH=12\sqrt{2}$，

$\therefore AF=FC$，

∴在 AC 中点处剪四边形 $DECF$，能使它的面积最大．



（2）第一步，沿 $\angle ABC$ 的对角线对折，使 C 与 C_1 重合，得到三角形 ABB_1，第二步，沿 B_1 对折，使 $DA_1\perp BB_1$．

理由：对角线互相垂直平分的四边形是菱形．

点评：本题考查了相似三角形的判定及性质、菱形的判定、二次函数的最值．关键在于根据相似三角形及已知条件求出相关线段的表达式，求出二次函数表达式，即可求出结论．

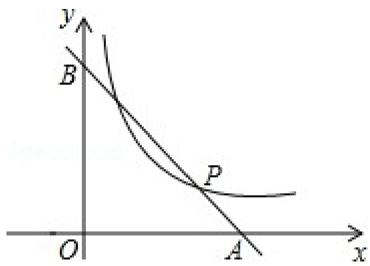
2.（2014•福建泉州，第 26 题 14 分）如图，直线 $y=-x+3$ 与 x，y 轴分别交于点 A，B，与反比例函数的图象交于点 P（2，1）．

（1）求该反比例函数的关系式；

（2）设 $PC\perp y$ 轴于点 C，点 A 关于 y 轴的对称点为 A'；

① 求△$A'BC$的周长和 $sin∠BA'C$ 的值；

② 对大于 1 的常数 m，求 x 轴上的点 M 的坐标，使得 $sin∠BMC=\frac{1}{\pi}$．xk|b|1



考点： 反比例函数综合题；待定系数法求反比例函数解析式；勾股定理；矩形的判定与性质；垂径定理；直线与圆的位置关系；锐角三角函数的定义

专题： 压轴题；探究型．

分析： （1）设反比例函数的关系式 $y=\frac{k}{x}$，然后把点 P 的坐标（2，1）代入即可．

（2）①先求出直线 $y=-x+3$ 与 x、y 轴交点坐标，然后运用勾股定理即可求出△$A'BC$ 的周长；过点 C 作 $CD⊥AB$，垂足为 D，运用面积法可以求出 CD 长，从而求出 $sin∠BA'C$ 的值．

② 由于 $BC=2$，$sin∠BMC=\frac{1}{\pi}$，因此点 M 在以 BC 为弦，半径为 m 的⊙E 上，因而点 M 应是⊙E 与 x 轴的交点．然后对⊙E 与 x 轴的位置关系进行讨论，只需运用矩形的判定与性质、勾股定理等知识就可求出满足要求的点 M 的坐标．

解答： 解：（1）设反比例函数的关系式 $y=\frac{k}{x}$．

∵点 P（2，1）在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象上，

∴$k=2×1=2$．

∴反比例函数的关系式 $y=\frac{2}{x}$．

（2）①过点 C 作 $CD⊥AB$，垂足为 D，如图 1 所示．

当 $x=0$ 时，$y=0+3=3$，

则点 B 的坐标为（0，3）．$OB=3$．

当 $y=0$ 时，$0=-x+3$，解得 $x=3$，

则点 A 的坐标为（3，0），$OA=3$．

∵点 A 关于 y 轴的对称点为 A'，

∴$OA'=OA=3$．

∵$PC\perp y$ 轴，点 P（2，1），

∴$OC=1$，$PC=2$．

∴$BC=2$．

∵$\angle AOB=90°$，$OA'=OB=3$，$OC=1$，

∴$A'B=3\sqrt{2}$，$A'C=\sqrt{10}$．

∴$\triangle A'BC$ 的周长为 $3\sqrt{2}+\sqrt{10}+2$．

∵$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\bullet A'O=\frac{1}{2}A'B\bullet CD$，

∴$BC\bullet A'O=A'B\bullet CD$．

∴$2\times3=3\sqrt{2}\times CD$．

∴$CD=\sqrt{2}$．

∵$CD\perp A'B$，

∴$\sin\angle BA'C=\frac{DC}{A'C}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$．

∴$\triangle A'BC$ 的周长为 $3\sqrt{2}+\sqrt{10}+2$，$\sin\angle BA'C$ 的值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$．

② 当 $1<m<2$ 时，

作经过点 B、C 且半径为 m 的⊙E，

连接 CE 并延长，交⊙E 于点 P，连接 BP，

过点 E 作 $EG\perp OB$，垂足为 G，

过点 E 作 $EH\perp x$ 轴，垂足为 H，如图 2① 所示．

∵CP 是⊙E 的直径，

∴$\angle PBC=90°$．

∴$\sin\angle BPC=\frac{BC}{PC}=\frac{2}{2\pi}=\frac{1}{\pi}$．

∵$\sin\angle BMC=\frac{1}{\pi}$，

∴$\angle BMC=\angle BPC$．

∴点 M 在⊙E 上．

∵点M在x轴上

∴点M是⊙E与x轴的交点．

∵$EG\perp BC$，

∴$BG=GC=1$．

∴$OG=2$．

∵$\angle EHO=\angle GOH=\angle OGE=90°$，

∴四边形$OGEH$是矩形．

∴$EH=OG=2$，$EG=OH$．

∵$1<m<2$，

∴$EH>EC$．

∴⊙E与x轴相离．

∴x轴上不存在点M，使得$\sin\angle BMC=\frac{1}{\pi}$．

② 当$m=2$时，$EH=EC$．

∴⊙E与x轴相切．

Ⅰ．切点在x轴的正半轴上时，如图2② 所示．

∴点M与点H重合．

∵$EG\perp OG$，$GC=1$，$EC=m$，

∴$EG=\sqrt{EC^2-GC^2}=\sqrt{3}$．

∴$OM=OH=EG=\sqrt{3}$．

∴点M的坐标为（$\sqrt{3}$，0）．

Ⅱ．切点在x轴的负半轴上时，

同理可得：点M的坐标为（$-\sqrt{3}$，0）．

③ 当$m>2$时，$EH<EC$．

∴⊙E与x轴相交．

Ⅰ．交点在x轴的正半轴上时，

设交点为M、M'，连接EM，如图2③ 所示．

∵$\angle EHM=90°$，$EM=m$，$EH=2$，

∴$MH=\sqrt{EM^2-EH^2}=\sqrt{m^2-2^2}=\sqrt{m^2-4}$．

$\because EH\perp MM'$，

$\therefore MH=M'H$．

$\therefore M'H=\sqrt{m^2-4}$．

$\because \angle EGC=90°$，$GC=1$，$EC=m$，

$\therefore EG=\sqrt{EC^2-GC^2}=\sqrt{m^2-1^2}=\sqrt{m^2-1}$．

$\therefore OH=EG=\sqrt{m^2-1}$．

$\therefore OM=OH-MH=\sqrt{m^2-1}-\sqrt{m^2-4}$，

$\therefore OM'=OH+HM'=\sqrt{m^2-1}+\sqrt{m^2-4}$，

$\therefore M$（$\sqrt{m^2-1}-\sqrt{m^2-4}$，0）、$M'$（$\sqrt{m^2-1}+\sqrt{m^2-4}$，0）．

Ⅱ．交点在x轴的负半轴上时，

同理可得：M（$-\sqrt{m^2-1}+\sqrt{m^2-4}$，0）、$M'$（$-\sqrt{m^2-1}-\sqrt{m^2-4}$，0）．

综上所述：当$1<m<2$时，满足要求的点M不存在；

当$m=2$时，满足要求的点M的坐标为（$\sqrt{3}$，0）和（$-\sqrt{3}$，0）；

当$m>2$时，满足要求的点M的坐标为（$\sqrt{m^2-1}-\sqrt{m^2-4}$，0）、（$\sqrt{m^2-1}+\sqrt{m^2-4}$，0）、（$-\sqrt{m^2-1}+\sqrt{m^2-4}$，0）、（$-\sqrt{m^2-1}-\sqrt{m^2-4}$，0）．

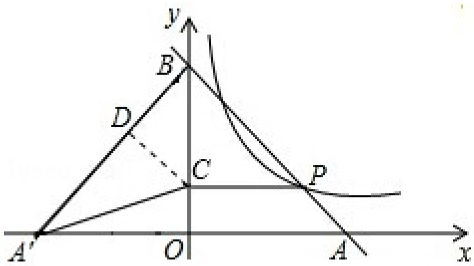


图1

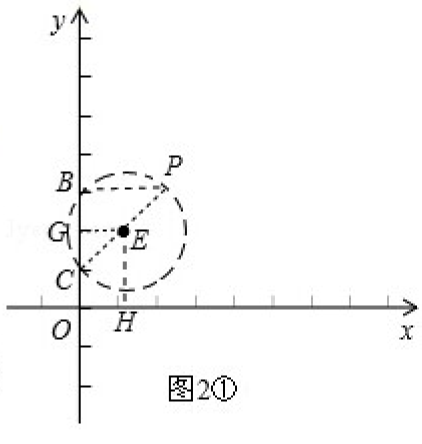


图2①

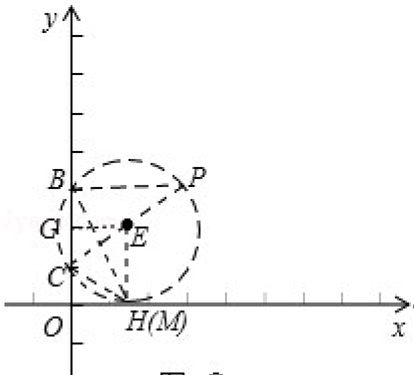


图2②

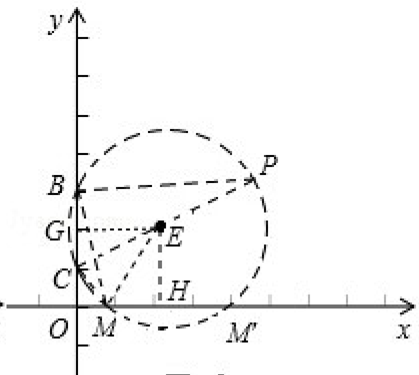


图2③

点评：本题考查了用待定系数法求反比例函数的关系式、勾股定理、三角函数的定义、矩形的判定与性质、直线与圆的位置关系、垂径定理等知识，考查了用面积法求三角形的高，考查了通过构造辅助圆解决问题，综合性比较强，难度系数比较大．由 $BC=2$，$\sin\angle BMC=\frac{1}{\pi}$联想到点 M 在以 BC 为弦，半径为 m 的⊙E 上是解决本题的关键．

3．（2014•浙江宁波，第 25 题 12 分）课本的作业题中有这样一道题：把一张顶角为 36°的等腰三角形纸片剪两刀，分成 3 张小纸片，使每张小纸片都是等腰三角形，你能办到吗？请画示意图说明剪法．

我们有多少种剪法，图 1 是其中的一种方法：

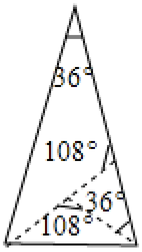


图1

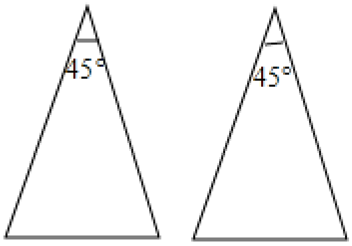


图2

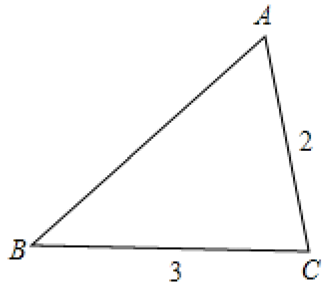


图3

定义：如果两条线段将一个三角形分成 3 个等腰三角形，我们把这两条线段叫做这个三角形的三分线．

（1）请你在图 2 中用两种不同的方法画出顶角为 45°的等腰三角形的三分线，并标注每个等腰三角形顶角的度数；（若两种方法分得的三角形成 3 对全等三角形，则视为同一种）

（2）△ABC 中，∠B=30°，AD 和 DE 是△ABC 的三分线，点 D 在 BC 边上，点 E 在 AC 边上，且 $AD=BD$，$DE=CE$，设∠C=x°，试画出示意图，并求出 x 所有可能的值；

（3）如图 3，△ABC 中，AC=2，BC=3，∠C=2∠B，请画出△ABC 的三分线，并求出三分线的长．

考点：　相似形综合题；图形的剪拼

分析：　（1）45°自然想到等腰直角三角形，过底角一顶点作对边的高，发现形成一个等腰直角三角形和直角三角形．直角三角形斜边的中线可形成两个等腰三角形，则易得一种情况．第二种情形可以考虑题例中给出的方法，试着同样以一底角作为新等腰三角形的底角，则另一底脚被分为 45°和 22.5°，再以 22.5°分别作为等腰三角形的底角或顶角，易得其中作为底角时所得的三个三角形恰都为等腰三角形．即又一三分线作法．

（2）用量角器，直尺标准作 30°角，而后确定一边为 BA，一边为 BC，根据题意可以先固定 BA 的长，而后可确定 D 点，再标准作图实验﹣﹣分别考虑 AD 为等腰三角形的腰或者底边，兼顾 AEC 在同一直线上，易得 2 种三角形 ABC．根据图形易得 x 的值．

（3）因为∠C=2∠B，作∠C 的角平分线，则可得第一个等腰三角形．而后借用圆规，以边长画弧，根据交点，寻找是否存在三分线，易得如图 4 图形为三分线．则可根据外角等于内角之和及腰相等等情况列出等量关系，求解方程可知各线的长．

解答：　解：（1）如图 2 作图，

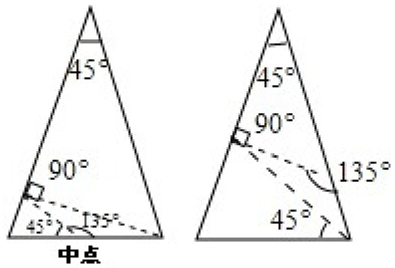


图2

（2）如图 3 ①、②作△ABC．

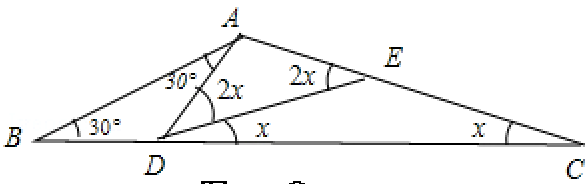


图 3　①

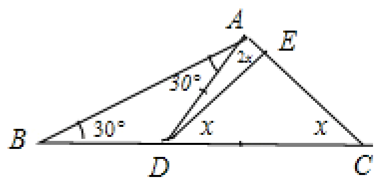


图3 ②

① 当 $AD=AE$ 时，

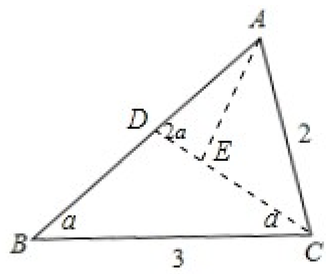
$\because 2x+x=30+30$，

$\therefore x=20$．

② 当 $AD=DE$ 时，

$\because 30+30+2x+x=180$，

$\therefore x=40$．



（3） 图4

如图4，CD、AE 就是所求的三分线．

设$\angle B=a$，则$\angle DCB=\angle DCA=\angle EAC=a$，$\angle ADE=\angle AED=2a$，

此时$\triangle AEC\backsim\triangle BDC$，$\triangle ACD\backsim\triangle ABC$，

设 $AE=AD=x$，$BD=CD=y$，

$\because\triangle AEC\backsim\triangle BDC$，

$\therefore x:y=2:3$，

$\because\triangle ACD\backsim\triangle ABC$，

$\therefore 2x=(x+y):2$，

所以联立得方程组$\begin{cases}x:y=2:3\\2x=(x+y):2\end{cases}$，

解得$\begin{cases}x=\frac{2}{5}\sqrt{10}\\y=\frac{3}{5}\sqrt{10}\end{cases}$，

即三分线长分别是$\frac{2}{5}\sqrt{10}$和$\frac{3}{5}\sqrt{10}$.

点评： 本题考查了学生学习的理解能力及动手创新能力，知识方面重点考查三角形内角、外角间的关系及等腰三角形知识，是一道很锻炼学生能力的题目．