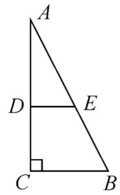
考点跟踪训练24　矩形、菱形和正方形

一、选择题

1．(2011·滨州)如图，在一张△ABC纸片中，$\angle C=90°$，$\angle B=60°$，DE是中位线，现把纸片沿中位线DE剪开，计划拼出以下四个图形：①邻边不等的矩形；②等腰梯形；③有一个角为锐角的菱形；④正方形．那么以上图形一定能被拼成的个数为(　　)

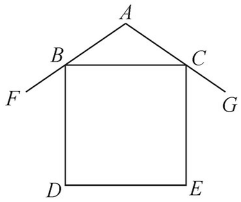


A．1 B．2 C．3 D．4

答案　C

解析　一定能拼成的是邻边不等的矩形、等腰梯形、有一个角为锐角的菱形．

2．(2011·衢州)衢州市新农村建设推动了农村住宅旧貌变新颜，如图为一农村民居侧面截图，屋坡AF、AG分别架在墙体的点B、点C处，且$AB=AC$，侧面四边形$BDEC$为矩形，若测得$\angle FAG=110°$，则$\angle FBD=$(　　)



A．35° B．40° C．55° D．70°

答案　C

解析　在△ABC中，$AB=AC$，$\angle FAG=110°$，

∴$\angle ABC==35°$.

又∵$\angle DBC=90°$，

∴$\angle FBD=180°-\angle ABC-\angle DBC=55°$.

3．(2011·绵阳)下列关于矩形的说法中正确的是(　　)

A．对角线相等的四边形是矩形

B．对角线互相平分的四边形是矩形

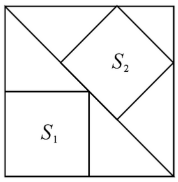
C．矩形的对角线互相垂直且平分

D．矩形的对角线相等且互相平分

答案　D

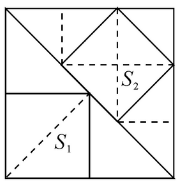
解析　矩形的对角线相等且互相平分．

4．(2011·兰州)如图，边长为6的大正方形中有两个小正方形，若两个小正方形的面积分别为S_1，S_2，则S_1+S_2的值为(　　)



A．16　B．17　C．18　D．19

答案　B



解析　如图，S_1占三角形面积的，

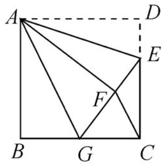
$\therefore S_1=\times=9$；

S_2占三角形面积的，

$\therefore S_2=\times=8$；

所以$S_1+S_2=9+8=17$.

5．(2011·重庆)如图，正方形$ABCD$中，$AB=6$，点E在边CD上，且$CD=3DE$.将$\triangle ADE$沿AE对折至$\triangle AFE$，延长EF交边BC于点G，连接AG、CF.下列结论：①$\triangle ABG\cong\triangle AFG$；②$BG=GC$；③$AG\parallel CF$；④$S_{\triangle FGC}=3$.其中正确结论的个数是(　　)



A．1 B．2 C．3 D．4

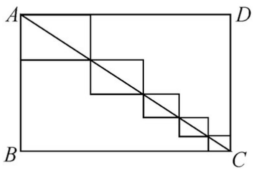
答案　C

解析　经过折叠，有$\triangle ADE\cong\triangle AFE$，$AD=AF$，$\angle D=\angle AFE=90°$，$\therefore AB=AF$，$\angle B=\angle AFG=90°$.又$\because AG=AG$，$\therefore\triangle ABG\cong\triangle AFG$；设$BG=FG=x$，则$CG=6-x$，$EG=2+x$，$EC=4$，由勾股定理，得$(2+x)^2=4^2+(6-x)^2$，解之，得$x=3$，所以$CG=BG=3$；画$FH\perp GC$于$H$，$\triangle GFH\backsim\triangle GEC$，有$==$，$==$，$\therefore FH=$，$GH=$.在$Rt\triangle CFH$中，$\tan\angle FCG==\;=2$，在$Rt\triangle ABG$中，$\tan\angle AGB==2$，$\therefore\angle FCG=\angle AGB$，$\therefore AG\parallel CF$；$S_{\triangle FGC}=GC\cdot FH=\times3\times=\neq3$；

故结论①、②、③正确．

二、填空题

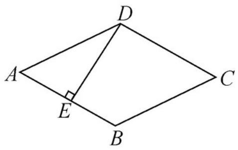
6．(2011·黄冈)如图：矩形$ABCD$的对角线$AC=10$，$BC=8$，则图中五个小矩形的周长之和为________．



答案　28

解析　在$Rt\triangle ABC$中，$AC=10$，$BC=8$，所以$AB=6$，故五个小矩形的周长之和等于矩形$ABCD$的周长28.

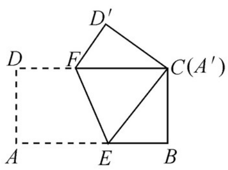
7．(2011·南京)如图，菱形$ABCD$的边长是2 cm，E是AB中点，且$DE\perp AB$，则菱形$ABCD$的面积为________cm^2.



答案　2

解析　在$Rt\triangle ADF$中，$AD=2$，$AE=AB=1$，所以$DE=$，$S_{菱形ABCD}=AB\cdot DE=2\times=2$ cm^2.

8．(2011·绵阳)如图，将长8 cm，宽4 cm的矩形纸片$ABCD$折叠，使点A与C重合，则折痕EF的长为__________cm.



答案　2

解析　因为折叠，设 $DF=D'F=x$，则 $FC=8-x$，$D'C=AD=4$，在 Rt△$D'FC$ 中，由勾股定理，得 $x^2+4^2=(8-x)^2$，解之，得 $x=3$.连接 AC 交 EF 于点 O，由折叠得∠$FOC=90°$，在 Rt△FCO 中，$CO=AC=×=2$ ，所以 $EO==$ ，$EF=2EO=2$.

9．(2011·广东)如图 1，已知小正方形 $ABCD$ 的面积为 1，把它的各边延长一倍得到新正方形 $A_1B_1C_1D_1$；把正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 边长按原法延长一倍得到正方形 $A_2B_2C_2D_2$(如图 2)；以此下去……，则正方形 $A_4B_4C_4D_4$ 的面积为______________．

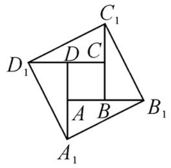


图1

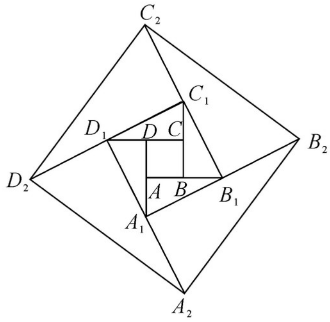
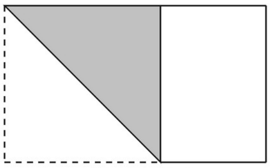


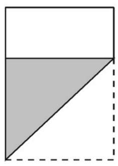
图2

答案　625

解析　因为正方形 $ABCD$ 的面积为 1，所以 $AB=1$，$AB_1=2$，正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的面积等于 $1^2+2^2=5$；同理，正方形 $A_2B_2C_2D_2$ 的面积等于$()^2+(2\ )^2=25$；正方形 $A_3B_3C_3D_3$ 的面积等于 $5^2+10^2=125$；正方形 $A_4B_4C_4D_4$ 的面积等于$(5\ )^2+(10\ )^2=625$.

10．(2011·德州)长为 1，宽为 a 的矩形纸片($<a<1$)，如图 1 那样折一下，剪下一个边长等于矩形宽度的正方形(称为第一次操作)；再把剩下的矩形如图 2 那样折一下，剪下一个边长等于此时矩形宽度的正方形(称为第二次操作)；如此反复操作下去．若在第 n 此操作后，剩下的矩形为正方形，则操作终止．当 $n=3$ 时，a 的值为____________．


第一次操作


第二次操作

答案　或

解析　由题意，可知当 $<a<1$ 时，第一次操作后剩下的矩形的长为 a，宽为 $1-a$，所以第二次操作时正方形的边长为 $1-a$，第二次操作以后剩下的矩形的两边分别为 $1-a,2a-1$.此时，分两种情况：

① 如果 $1-a>2a-1$，即 $a<$ ，那么第三次操作时正方形的边长为 $2a-1$.

则 $2a-1=(1-a)-(2a-1)$，解得 $a=$ ；

② 如果 $1-a<2a-1$，即 $a>$ ，那么第三次操作时正方形的边长为 $1-a$.

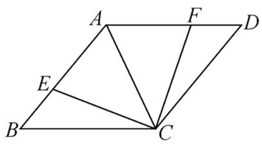
则 $1-a=(2a-1)-(1-a)$，解得 $a=$.

故答案为或.

三、解答题

11．(2011·广州)如图，AC 是菱形 $ABCD$ 的对角线，点 E、F 分别在边 AB、AD 上，且 $AE=AF$.

求证：△ACE≌△ACF.



解　证明：∵ AC 是菱形 $ABCD$ 的对角线，

∴ ∠CAE＝∠CAF.

在△ACE 和△ACF 中，

$AE=AF$，∠CAE＝∠CAF，$AC=AC$，

∴$\triangle ACE \cong \triangle ACF$.

12．(2011·衢州)如图，$\triangle ABC$中，AD是边BC上的中线，过点A作$AE \parallel BC$，过点D作$DE \parallel AB$，DE与AC、AE分别交于点O、点E，连接EC.

(1)求证：$AD=EC$；

(2)当$\angle BAC=\mathrm{Rt}\angle$时，求证：四边形$ADCE$是菱形；

(3)在(2)的条件下，若$AB=AO$，求$\tan\angle OAD$的值．

解　(1)解法一：

证明：∵$DE \parallel AB$，$AE \parallel BC$，

∴四边形$ABDE$是平行四边形，

∴$AE \parallel BD$，且$AE=BD$.

又∵AD是BC边上的中线，

∴$BD=CD$，

∴$AE \parallel CD$，且$AE=CD$，

∴四边形$ADCE$是平行四边形．

∴$AD=CE$.

解法二：

证明：∵$DE \parallel AB$，$AE \parallel BC$，

∴四边形$ABDE$是平行四边形，$\angle B=\angle EDC$.

∴$AB=DE$.

又∵AD是BC边上的中线，

∴$BD=CD$.

∴$\triangle ABD \cong \triangle EDC(SAS)$．

∴$AD=EC$.

(2)解法一：

证明：∵$\angle BAC=\mathrm{Rt}\angle$，$AD$是斜边$BC$上的中线，

∴$AD=BD=CD$.

又∵由(1)得四边形$ADCE$是平行四边形，

∴四边形$ADCE$是菱形．

解法二：

证明：∵$DE \parallel AB$，$\angle BAC=\mathrm{Rt}\angle$，

∴$DE \perp AC$.

又∵由(1)得四边形$ADCE$是平行四边形，

∴四边形$ADCE$是菱形．

解法三：

证明：∵$\angle BAC=\mathrm{Rt}\angle$，$AD$是斜边$BC$上的中线，

∴$AD=BD=CD$.

∵四边形$ABDE$是平行四边形，

∴$AE=BD=CD$.

又∵$AD=EC$，

∴$AD=CD=CE=AE$.

∴四边形$ADCE$是菱形．

(3)解法一：

解：∵四边形$ADCE$是菱形，

∴$AO=CO$，$\angle AOD=90°$.

又∵$BD=CD$，

∴OB是$\triangle ABC$的中位线，则$OD=AB$.

∵$AB=AO$，

∴$OD=AO$.

∴在$\mathrm{Rt}\triangle AOD$中，$\tan\angle OAD==$.

解法二：

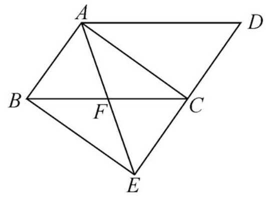
解：∵四边形$ADCE$是菱形，

∴$AO=CO=AC$，$AD=CD$，$\angle AOD=90°$.
∵$AB=AO$，
∴$AB=AC$.
∴在Rt△ABC中，$\tan\angle ACB==$.
∵$AD=CD$，
∴$\angle DAC=\angle DCA$.
∴$\tan\angle OAD=\tan\angle ACB=$.

13．(2011·南京)如图，将▱$ABCD$的边DC延长到点E，使$CE=DC$，连接AE，交BC于点F.

(1)求证：$\triangle ABF\cong\triangle ECF$；

(2)若$\angle AFC=2\angle D$，连接AC、BE.求证：四边形$ABEC$是矩形．



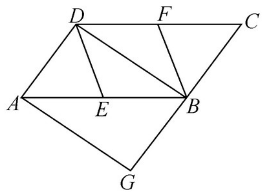
解　(1)证明：∵四边形$ABCD$是平行四边形，
∴$AB\parallel CD$，$AB=CD$.∴$\angle ABF=\angle ECF$.
∵$EC=DC$, ∴$AB=EC$.
在$\triangle ABF$和$\triangle ECF$中，
∵$\angle ABF=\angle ECF$，$\angle AFB=\angle EFC$，$AB=EC$，
∴$\triangle ABF\cong\triangle ECF$.
(2)解法一：∵$AB=CD=EC$，$AB\parallel EC$，
∴四边形$ABEC$是平行四边形．
∴$AF=EF$, $BF=CF$.
∵四边形$ABCD$是平行四边形，
∴$\angle ABC=\angle D$.
又∵$\angle AFC=2\angle D$，
∴$\angle AFC=2\angle ABC$.

∵$\angle AFC=\angle ABF+\angle BAF$，
∴$\angle ABF=\angle BAF$.
∴$FA=FB$.
∴$FA=FE=FB=FC$,
∴$AE=BC$.∴▱$ABEC$是矩形．
解法二：∵$AB=EC$，$AB\parallel EC$，
∴四边形$ABEC$是平行四边形．
∵四边形$ABCD$是平行四边形，
∴$AD\parallel BC$，∴$\angle D=\angle BCE$.
又∵$\angle AFC=2\angle D$，
∴$\angle AFC=2\angle BCE$.
∵$\angle AFC=\angle FCE+\angle FEC$，
∴$\angle FCE=\angle FEC$.
∴$\angle D=\angle FEC$.∴$AE=AD$.
又∵$CE=DC$，
∴$AC\perp DE$.即$\angle ACE=90°$.
∴▱$ABEC$是矩形.

14．(2011·宁波)如图，在▱$ABCD$中，E、F分别为边AB、CD的中点，BD是对角线，过A点作$AG\parallel BD$交CB的延长线于点G.

(1)求证：$DE\parallel BF$；

(2)若$\angle G=90°$，求证：四边形$DEBF$是菱形．



解　(1)证明：在▱$ABCD$中，$AB\parallel CD$，$AB=CD$.

$\because E$、F分别为边AB、CD的中点，

$\therefore DF=DC$，$BE=AB$，

$\therefore DF\parallel BE$，$DF=BE$.

$\therefore$四边形$DEBF$为平行四边形．

$\therefore DE\parallel BF$.

(2)证明：$\because AG\parallel BD$，

$\therefore \angle G=\angle DBC=90°$.

$\therefore \triangle DBC$为直角三角形．

又$\because F$为边CD的中点，

$\therefore BF=CD=DF$.

又$\because$四边形$DEBF$为平行四边形，

$\therefore$四边形$DEBF$是菱形．