

2012年临沂市初中学生学业考试试题

数 学

一、选择题（本大题共 14 小题，每小题 3 分，满分 42 分）在每小题所给的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. (2012 临沂) $-\frac{1}{6}$ 的倒数是 ()

- A. 6 B. -6 C. $\frac{1}{6}$ D. $-\frac{1}{6}$

考点：倒数。

解答：解： $\because (-\frac{1}{6}) \times (-6) = 1$,

$\therefore -\frac{1}{6}$ 的倒数是 -6.

故选 B.

2. (2012 临沂) 太阳的半径大约是 696000 千米，用科学记数法可表示为 ()

- A. 696×10^3 千米 B. 696×10^4 千米 C. 696×10^5 千米 D. 696×10^6 千米

考点：科学记数法—表示较大的数。

解答：解： $696000 = 696 \times 10^5$;

故选 C.

3. (2012 临沂) 下列计算正确的是 ()

- A. $2a^2 + 4a^2 = 6a^4$ B. $(a+1)^2 = a^2 + 1$ C. $(a^2)^3 = a^5$ D. $x^7 \div x^5 = x^2$

考点：完全平方公式；合并同类项；幂的乘方与积的乘方；同底数幂的除法。

解答：解：A. $2a^2 + 4a^2 = 6a^2$ ，所以 A 选项不正确；

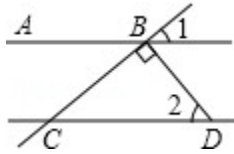
B. $(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1$ ，所以 B 选项不正确；

C. $(a^2)^5 = a^{10}$ ，所以 C 选项不正确；

D. $x^7 \div x^5 = x^2$ ，所以 D 选项正确。

故选 D.

4. (2012 临沂) 如图， $AB \parallel CD$ ， $DB \perp BC$ ， $\angle 1 = 40^\circ$ ，则 $\angle 2$ 的度数是 ()



- A. 40° B. 50° C. 60° D. 140°

考点：平行线的性质；直角三角形的性质。

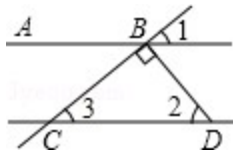
解答：解： $\because AB \parallel CD$ ， $DB \perp BC$ ， $\angle 1 = 40^\circ$ ，

$\therefore \angle 3 = \angle 1 = 40^\circ$ ，

$\because DB \perp BC$ ，

$\therefore \angle 2 = 90^\circ - \angle 3 = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$ 。

故选 B.



5. (2012 临沂) 化简 $\left(1 + \frac{4}{a-2}\right) \div \frac{a}{a-2}$ 的结果是 ()

- A. $\frac{a+2}{a}$ B. $\frac{a}{a+2}$ C. $\frac{a-2}{a}$ D. $\frac{a}{a-2}$

考点：分式的混合运算。

解答：解：原式 $= \frac{a-2+4}{a-2} \cdot \frac{a-2}{a} = \frac{a+2}{a}$.

故选 A .

6. (2012 临沂) 在四张完全相同的卡片上，分别画有圆、菱形、等腰三角形、等腰梯形，现从中随机抽取一张，卡片上的图形恰好是中心对称图形的概率是 ()

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{3}{4}$ D. 1

考点：概率公式；中心对称图形。

解答：解： \because 是中心对称图形的有圆、菱形，

所以从中随机抽取一张，卡片上的图形恰好是中心对称图形的概率是 $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ；

故选 B .

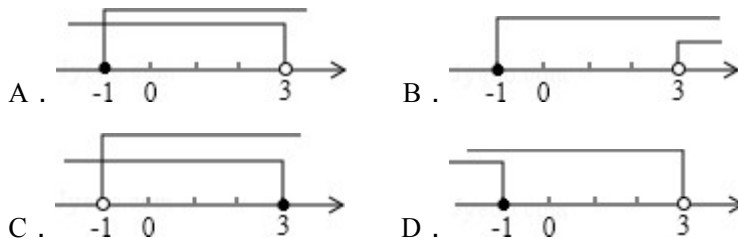
7. (2012 临沂) 用配方法解一元二次方程 $x^2 - 4x = 5$ 时，此方程可变形为 ()

- A. $(x+2)^2 = 1$ B. $(x-2)^2 = 1$ C. $(x+2)^2 = 9$ D. $(x-2)^2 = 9$

考点：解一元二次方程-配方法。

解答：解： $\because x^2 - 4x = 5$ ， $\therefore x^2 - 4x + 4 = 5 + 4$ ， $\therefore (x-2)^2 = 9$. 故选 D .

8. (2012 临沂) 不等式组 $\begin{cases} 2x-1 < 5, \\ \frac{3x-1}{2} + 1 \geq x \end{cases}$ 的解集在数轴上表示正确的是 ()



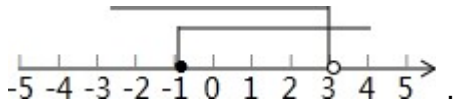
考点：在数轴上表示不等式的解集；解一元一次不等式组。

解答：解： $\begin{cases} 2x-1 < 5 & \text{①} \\ \frac{3x-1}{2} + 1 \geq x & \text{②} \end{cases}$ ，

由①得： $x < 3$ ，

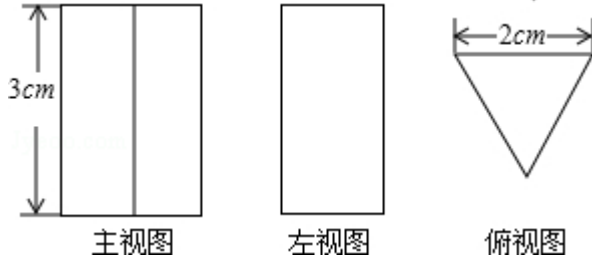
由②得： $x \geq -1$ ，

∴不等式组的解集为： $-1 \leq x < 3$ ，
在数轴上表示为：



故选：A．

9. (2012 临沂) 如图是一个几何体的三视图，则这个几何体的侧面积是 ()

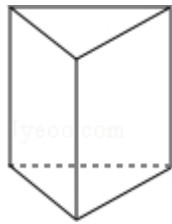


- A. 18cm^2 B. 20cm^2 C. $(18+2\sqrt{3})\text{cm}^2$ D. $(18+4\sqrt{3})\text{cm}^2$

考点：由三视图判断几何体。

解答：解：根据三视图判断，该几何体是正三棱柱，
底边边长为 2cm ，侧棱长是 3cm ，
所以侧面积是： $(3 \times 2) \times 3 = 6 \times 3 = 18\text{cm}^2$ 。

故选 A．



10. (2012 临沂) 关于 x 、 y 的方程组 $\begin{cases} 3x - y = m \\ x + my = n \end{cases}$ 的解是 $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ ，则 $|m - n|$ 的值是 ()

- A. 5 B. 3 C. 2 D. 1

考点：二元一次方程组的解。

解答：解：∵方程组 $\begin{cases} 3x - y = m \\ x + my = n \end{cases}$ 的解是 $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ ，

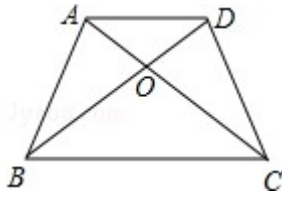
$$\therefore \begin{cases} 3 - 1 = m \\ 1 + m = n \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} m = 2 \\ n = 3 \end{cases}$$

所以， $|m - n| = |2 - 3| = 1$ 。

故选 D．

11. (2012 临沂) 如图，在等腰梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ，对角线 AC 、 BD 相交于点 O ，下列结论不一定正确的是 ()



- A . AC=BD B . OB=OC C . $\angle BCD = \angle BDC$ D . $\angle ABD = \angle ACD$

考点：等腰梯形的性质。

解答：解：A . \because 四边形 ABCD 是等腰梯形，

$\therefore AC=BD$ ，

故本选项正确；

B . \because 四边形 ABCD 是等腰梯形，

$\therefore AB=DC$ ， $\angle ABC = \angle DCB$ ，

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DCB$ 中，

$$\therefore \begin{cases} AB=DC \\ \angle ABC = \angle DCB \\ BC=CB \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DCB$ (SAS) ，

$\therefore \angle ACB = \angle DBC$ ，

$\therefore OB=OC$ ，

故本选项正确；

C . \because 无法判定 $BC=BD$ ，

$\therefore \angle BCD$ 与 $\angle BDC$ 不一定相等，

故本选项错误；

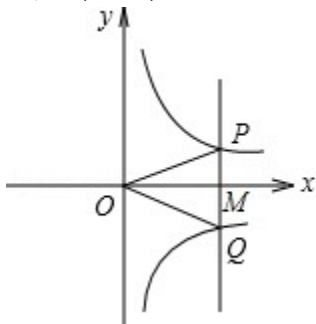
D . $\because \angle ABC = \angle DCB$ ， $\angle ACB = \angle DBC$ ，

$\therefore \angle ABD = \angle ACD$.

故本选项正确 .

故选 C .

12 . (2012 临沂) 如图，若点 M 是 x 轴正半轴上任意一点，过点 M 作 $PQ \parallel y$ 轴，分别交函数 $y = \frac{k_1}{x} (x > 0)$ 和 $y = \frac{k_2}{x} (x > 0)$ 的图象于点 P 和 Q，连接 OP 和 OQ . 则下列结论正确的是 ()



A . $\angle POQ$ 不可能等于 90°

B . $\frac{PM}{QM} = \frac{k_1}{k_2}$

C . 这两个函数的图象一定关于 x 轴对称

D . $\triangle POQ$ 的面积是 $\frac{1}{2}(|k_1 + k_2|)$

考点：反比例函数综合题。

解答：解：A. ∵P点坐标不知道，当PM=MO=MQ时，∠POQ=90°，故此选项错误；

B. 根据图形可得： $k_1 > 0$ ， $k_2 < 0$ ，而PM，QM为线段一定为正值，故 $\frac{PM}{QM} = \frac{|k_1|}{|k_2|}$ ，故此选项

错误；

C. 根据 k_1 ， k_2 的值不确定，得出这两个函数的图象不一定关于x轴对称，故此选项错误；

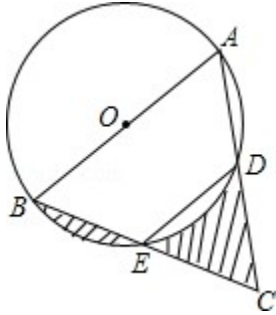
D. ∵ $|k_1| = PM \cdot MO$ ， $|k_2| = MQ \cdot MO$ ， $\triangle POQ$ 的面积 $= \frac{1}{2} MO \cdot PQ = \frac{1}{2} MO (PM + MQ) = \frac{1}{2}$

$MO \cdot PM + \frac{1}{2} MO \cdot MQ$ ，

∴ $\triangle POQ$ 的面积是 $\frac{1}{2} (|k_1| + |k_2|)$ ，故此选项正确。

故选：D。

13. (2012临沂) 如图，AB是⊙O的直径，点E为BC的中点，AB=4，∠BED=120°，则图中阴影部分的面积之和为 ()



- A. 1 B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{3}$

考点：扇形面积的计算；等边三角形的判定与性质；三角形中位线定理。

解答：解：连接AE，

∵AB是直径，

∴∠AEB=90°，

又∵∠BED=120°，

∴∠AED=30°，

∴∠AOD=2∠AED=60°。

∵OA=OD

∴ $\triangle AOD$ 是等边三角形，

∴∠A=60°，

∵点E为BC的中点，∠AED=90°，

∴AB=AC，

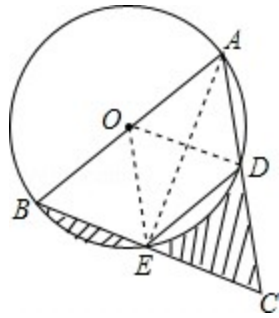
∴ $\triangle ABC$ 是等边三角形。 $\triangle EDC$ 是等边三角形，边长是4。

∴∠BOE=∠EOD=60°，

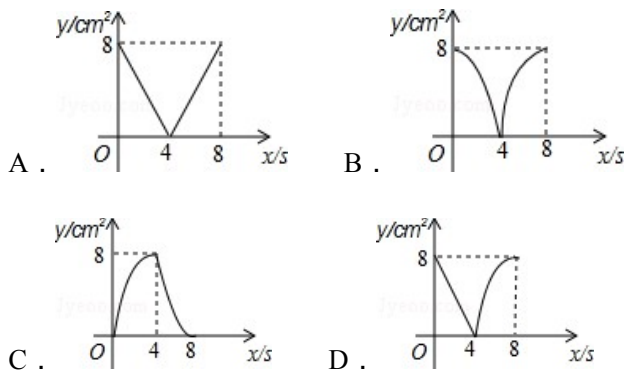
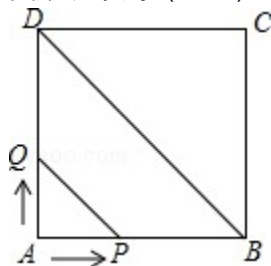
∴ \widehat{BE} 和弦BE围成的部分的面积= \widehat{DE} 和弦DE围成的部分的面积。

∴阴影部分的面积 $= S_{\triangle EDC} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 = \sqrt{3}$ 。

故选 C .



14 . (2012 临沂) 如图, 正方形 ABCD 的边长为 4cm, 动点 P、Q 同时从点 A 出发, 以 1cm/s 的速度分别沿 A→B→C 和 A→D→C 的路径向点 C 运动, 设运动时间为 x (单位: s), 四边形 PBDQ 的面积为 y (单位: cm²), 则 y 与 x (0≤x≤8) 之间函数关系可以用图象表示为 ()



考点：动点问题的函数图象。

解答：解：① $0 \leq x \leq 4$ 时，

\because 正方形的边长为 4cm，

$$\therefore y = S_{\triangle ABD} - S_{\triangle APQ}$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 4 - \frac{1}{2} \cdot t \cdot t$$

$$= -\frac{1}{2}t^2 + 8,$$

② $4 \leq x \leq 8$ 时，

$$y = S_{\triangle BCD} - S_{\triangle CPQ}$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 4 - \frac{1}{2} \cdot (8-t) \cdot (8-t)$$

$$= -\frac{1}{2}(8-t)^2 + 8,$$

所以，y 与 x 之间的函数关系可以用两段二次函数图象表示，纵观各选项，只有 B 选项图象符合。

故选 B。

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）把答案填在题中横线上。

15. (2012 临沂) 分解因式： $a - 6ab + 9ab^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

考点：提公因式法与公式法的综合运用。

解答：解：原式= $a(1 - 6b + 9b^2)$ ，
 $=a(1 - 3b)^2$ 。

故答案为： $a(1 - 3b)^2$ 。

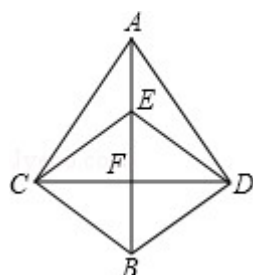
16. (2012 临沂) 计算： $4\sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{8} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

考点：二次根式的加减法。

解答：解：原式= $4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 2\sqrt{2} = 0$ 。

故答案为：0。

17. (2012 临沂) 如图，CD 与 BE 互相垂直平分， $AD \perp DB$ ， $\angle BDE = 70^\circ$ ，则 $\angle CAD = \underline{\hspace{2cm}}$ °。



考点：轴对称的性质；平行线的判定与性质。

解答：解： \because CD 与 BE 互相垂直平分，

\therefore 四边形 BDEC 是菱形，

$\therefore DB = DE$ ，

$\because \angle BDE = 70^\circ$ ，

$\therefore \angle ABD = \frac{180^\circ - 70^\circ}{2} = 55^\circ$ ，

$\because AD \perp DB$ ，

$\therefore \angle BAD = 90^\circ - 55^\circ = 35^\circ$ ，

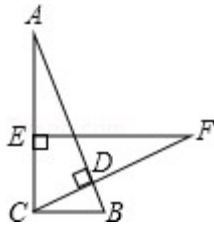
根据轴对称性，四边形 ACBD 关于直线 AB 成轴对称，

$\therefore \angle BAC = \angle BAD = 35^\circ$ ，

$\therefore \angle CAD = \angle BAC + \angle BAD = 35^\circ + 35^\circ = 70^\circ$ 。

故答案为：70。

18. (2012 临沂) 在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $BC = 2\text{cm}$ ， $CD \perp AB$ ，在 AC 上取一点 E，使 $EC = BC$ ，过点 E 作 $EF \perp AC$ 交 CD 的延长线于点 F，若 $EF = 5\text{cm}$ ，则 $AE = \underline{\hspace{2cm}}\text{cm}$ 。



考点：全等三角形的判定与性质。

解答：解： $\because \angle ACB=90^\circ$ ，

$\therefore \angle ECF+\angle BCD=90^\circ$ ，

$\because CD \perp AB$ ，

$\therefore \angle BCD+\angle B=90^\circ$ ，

$\therefore \angle ECF=\angle B$ ，

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle FEC$ 中，
$$\begin{cases} \angle ECF=\angle B \\ EC=BC \\ \angle ACB=\angle FEC=90^\circ \end{cases}$$
，

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle FEC$ (ASA) ，

$\therefore AC=EF$ ，

$\because AE=AC-CE$ ， $BC=2\text{cm}$ ， $EF=5\text{cm}$ ，

$\therefore AE=5-2=3\text{cm}$ 。

故答案为：3。

19. (2012 临沂) 读一读：式子“ $1+2+3+4+\dots+100$ ”表示从 1 开始的 100 个连续自然数的和，

由于式子比较长，书写不方便，为了简便起见，我们将其表示为 $\sum_{n=1}^{100} n$ ，这里“ Σ ”是求和符

号通过对以上材料的阅读，计算 $\sum_{n=1}^{2012} \frac{1}{n(n+1)} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

考点：分式的加减法，寻找规律。

解答：解：由题意得，
$$\sum_{n=1}^{2012} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2011} - \frac{1}{2012} + \frac{1}{2012} -$$

$\frac{1}{2013}$

$= 1 - \frac{1}{2013} = \frac{2012}{2013}$ 。

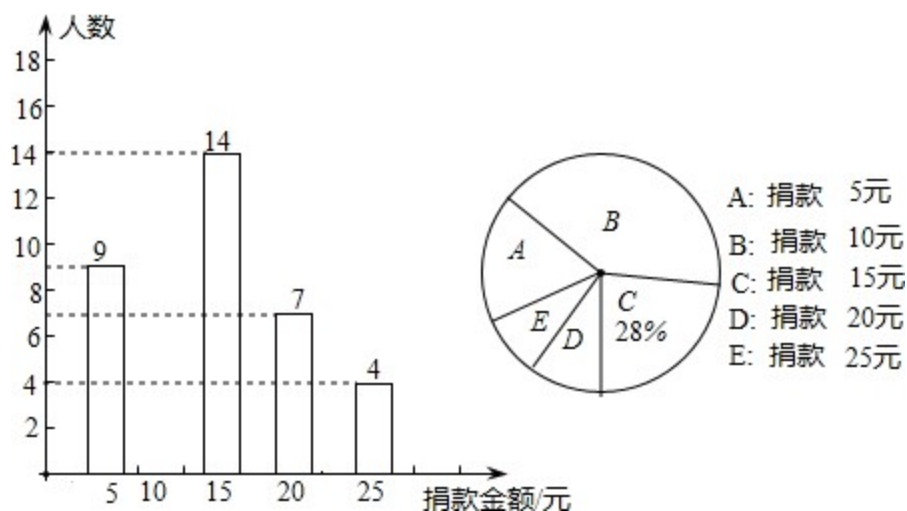
故答案为： $\frac{2012}{2013}$ 。

三、开动脑筋，你一定能做对！（本大题共 3 小题，6+7+7=20 分）

20. (2012 临沂) “最美女教师”张丽莉，为抢救两名学生，以致双腿高位截肢，社会各界纷纷为她捐款，我市某中学九年级一班全体同学参加了捐款活动，该班同学捐款情况的部

分统计图如图所示：

- (1) 求该班的总人数；
- (2) 将条形图补充完整，并写出捐款总额的众数；
- (3) 该班平均每人捐款多少元？



考点：条形统计图；扇形统计图；加权平均数；众数。

解答：解：(1) $\frac{14}{28\%} = 50$ (人) .

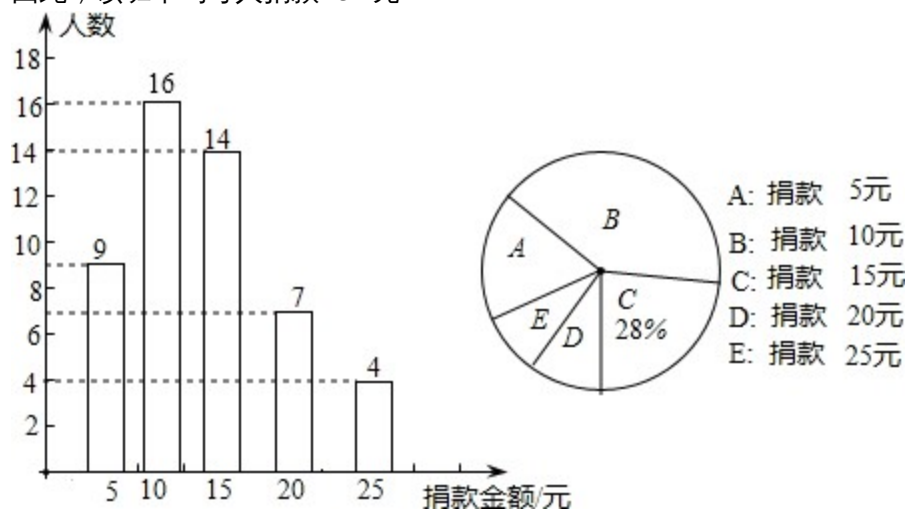
该班总人数为 50 人；

(2) 捐款 10 元的人数：50 - 9 - 14 - 7 - 4 = 50 - 34 = 16 ,

图形补充如右图所示，众数是 10；

(3) $\frac{1}{50} (5 \times 9 + 10 \times 16 + 15 \times 14 + 20 \times 7 + 25 \times 4) = \frac{1}{50} \times 655 = 13.1$ 元，

因此，该班平均每人捐款 13.1 元 .



21. (2012 临沂) 某工厂加工某种产品. 机器每小时加工产品的数量比手工每小时加工产品的数量的 2 倍多 9 件, 若加工 1800 件这样的产品, 机器加工所用的时间是手工加工所用时间的 $\frac{3}{7}$ 倍, 求手工每小时加工产品的数量 .

考点：分式方程的应用。

解答：解：设手工每小时加工产品 x 件, 则机器每小时加工产品 $(2x+9)$ 件,

根据题意可得： $\frac{1800}{x} \times \frac{3}{7} = \frac{1800}{2x+9}$,

解方程得 $x=27$,

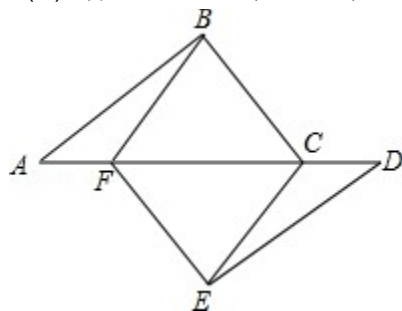
经检验, $x=27$ 是原方程的解,

答：手工每小时加工产品 27 件 .

22. (2012 临沂) 如图, 点 A、F、C、D 在同一直线上, 点 B 和点 E 分别在直线 AD 的两侧, 且 $AB=DE$, $\angle A=\angle D$, $AF=DC$.

(1) 求证: 四边形 BCEF 是平行四边形,

(2) 若 $\angle ABC=90^\circ$, $AB=4$, $BC=3$, 当 AF 为何值时, 四边形 BCEF 是菱形.



考点: 相似三角形的判定与性质; 全等三角形的判定与性质; 勾股定理; 平行四边形的判定; 菱形的判定.

解答: (1) 证明: $\because AF=DC$,

$\therefore AF+FC=DC+FC$, 即 $AC=DF$.

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中,

$$\begin{cases} AC=DF \\ \angle A=\angle D \\ AB=DE \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF$ (SAS),

$\therefore BC=EF$, $\angle ACB=\angle DFE$,

$\therefore BC \parallel EF$,

\therefore 四边形 BCEF 是平行四边形.

(2) 解: 连接 BE, 交 CF 与点 G,

\because 四边形 BCEF 是平行四边形,

\therefore 当 $BE \perp CF$ 时, 四边形 BCEF 是菱形,

$\because \angle ABC=90^\circ$, $AB=4$, $BC=3$,

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 5,$$

$\because \angle BGC = \angle ABC = 90^\circ$, $\angle ACB = \angle BCG$,

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle BGC$,

$$\therefore \frac{BC}{AC} = \frac{CG}{BC},$$

$$\text{即 } \frac{3}{5} = \frac{CG}{3},$$

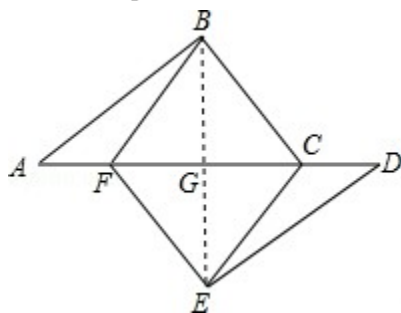
$$\therefore CG = \frac{9}{5},$$

$\because FG=CG$,

$$\therefore FC = 2CG = \frac{18}{5},$$

$$\therefore AF = AC - FC = 5 - \frac{18}{5} = \frac{7}{5},$$

∴当 $AF = \frac{7}{5}$ 时，四边形 BCEF 是菱形．

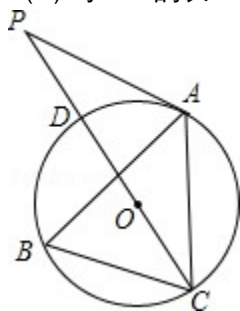


四、认真思考，你一定能成功！（本大题共2小题，9+10=19分）

23. (2012 临沂) 如图，点 A、B、C 分别是 $\odot O$ 上的点， $\angle B = 60^\circ$ ， $AC = 3$ ，CD 是 $\odot O$ 的直径，P 是 CD 延长线上的一点，且 $AP = AC$ ．

(1) 求证：AP 是 $\odot O$ 的切线；

(2) 求 PD 的长．



考点：切线的判定；圆周角定理；解直角三角形。

解答： (1) 证明：连接 OA．

$$\because \angle B = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle AOC = 2\angle B = 120^\circ,$$

又 $\because OA = OC$,

$$\therefore \angle ACP = \angle CAO = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle AOP = 60^\circ,$$

$$\because AP = AC,$$

$$\therefore \angle P = \angle ACP = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle OAP = 90^\circ,$$

$$\therefore OA \perp AP,$$

∴ AP 是 $\odot O$ 的切线，

(2) 解：连接 AD．

\because CD 是 $\odot O$ 的直径，

$$\therefore \angle CAD = 90^\circ,$$

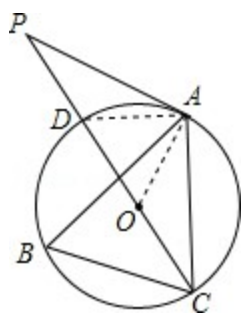
$$\therefore AD = AC \cdot \tan 30^\circ = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3},$$

$$\because \angle ADC = \angle B = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle PAD = \angle ADC - \angle P = 60^\circ - 30^\circ,$$

$$\therefore \angle P = \angle PAD,$$

$$\therefore PD = AD = \sqrt{3}.$$



24. (2012 临沂) 小明家今年种植的“红灯”樱桃喜获丰收, 采摘上市 20 天全部销售完, 小明对销售情况进行跟踪记录, 并将记录情况绘成图象, 日销售量 y (单位: 千克) 与上市时间 x (单位: 天) 的函数关系如图 1 所示, 樱桃价格 z (单位: 元/千克) 与上市时间 x (单位: 天) 的函数关系式如图 2 所示.

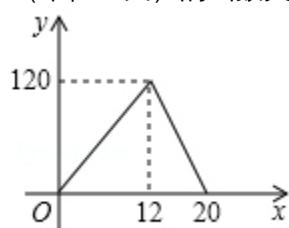


图1

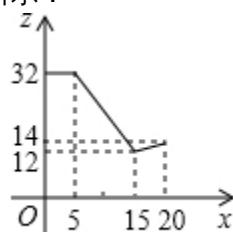


图2

- (1) 观察图象, 直接写出日销售量的最大值;
- (2) 求小明家樱桃的日销售量 y 与上市时间 x 的函数解析式;
- (3) 试比较第 10 天与第 12 天的销售金额哪天多?

考点: 一次函数的应用。

解答: 解: (1) 由图象得: 120 千克,

(2) 当 $0 \leq x \leq 12$ 时, 设日销售量与上市的时间的函数解析式为 $y=kx$,

\because 点 $(12, 120)$ 在 $y=kx$ 的图象上,

$\therefore k=10$,

\therefore 函数解析式为 $y=10x$,

当 $12 < x \leq 20$, 设日销售量与上市时间的函数解析式为 $y=kx+b$,

\because 点 $(12, 120)$, $(20, 0)$ 在 $y=kx+b$ 的图象上,

$$\therefore \begin{cases} 12k+b=120 \\ 20k+b=0 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} k=-15 \\ b=300 \end{cases}$$

\therefore 函数解析式为 $y=-15x+300$,

\therefore 小明家樱桃的日销售量 y 与上市时间 x 的函数解析式为: $y=$

$$\begin{cases} 10x & (0 \leq x \leq 12) \\ -15x+300 & (12 < x \leq 20) \end{cases};$$

(3) \because 第 10 天和第 12 天在第 5 天和第 15 天之间,

\therefore 当 $5 < x \leq 15$ 时, 设樱桃价格与上市时间的函数解析式为 $z=kx+b$,

\because 点 $(5, 32)$, $(15, 12)$ 在 $z=kx+b$ 的图象上,

$$\therefore \begin{cases} 5k+b=32 \\ 15k+b=12 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} k = -2 \\ b = 42 \end{cases},$$

\therefore 函数解析式为 $z = -2x + 42$,

当 $x = 10$ 时, $y = 10 \times 10 = 100$, $z = -2 \times 10 + 42 = 22$,

销售金额为: $100 \times 22 = 2200$ (元),

当 $x = 12$ 时, $y = 120$, $z = -2 \times 12 + 42 = 18$,

销售金额为: $120 \times 18 = 2160$ (元),

$\therefore 2200 > 2160$,

\therefore 第 10 天的销售金额多.

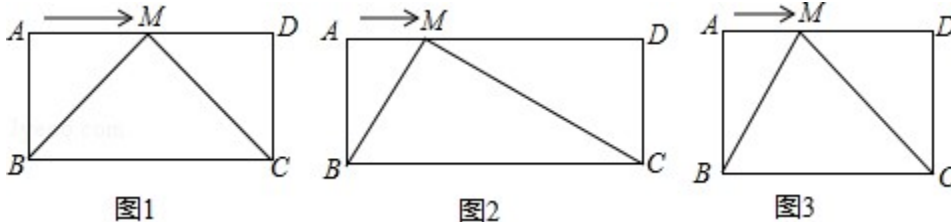
五、相信自己,加油啊!(本大题共 2 小题, 11+13=24 分)

25. (2012 临沂) 已知, 在矩形 ABCD 中, $AB = a$, $BC = b$, 动点 M 从点 A 出发沿边 AD 向点 D 运动.

(1) 如图 1, 当 $b = 2a$, 点 M 运动到边 AD 的中点时, 请证明 $\angle BMC = 90^\circ$;

(2) 如图 2, 当 $b > 2a$ 时, 点 M 在运动的过程中, 是否存在 $\angle BMC = 90^\circ$, 若存在, 请给与证明; 若不存在, 请说明理由;

(3) 如图 3, 当 $b < 2a$ 时, (2) 中的结论是否仍然成立? 请说明理由.



考点: 相似三角形的判定与性质; 根的判别式; 矩形的性质.

解答: (1) 证明: $\because b = 2a$, 点 M 是 AD 的中点,

$\therefore AB = AM = MD = DC = a$,

又 \because 在矩形 ABCD 中, $\angle A = \angle D = 90^\circ$,

$\therefore \angle AMB = \angle DMC = 45^\circ$,

$\therefore \angle BMC = 90^\circ$.

(2) 解: 存在,

理由: 若 $\angle BMC = 90^\circ$,

则 $\angle AMB = \angle DMC = 90^\circ$,

又 $\because \angle AMB + \angle ABM = 90^\circ$,

$\therefore \angle ABM = \angle DMC$,

又 $\because \angle A = \angle D = 90^\circ$,

$\therefore \triangle ABM \sim \triangle DMC$,

$$\therefore \frac{AM}{CD} = \frac{AB}{DM},$$

设 $AM = x$, 则 $\frac{x}{a} = \frac{a}{b-x}$,

整理得: $x^2 - bx + a^2 = 0$,

$\because b > 2a$, $a > 0$, $b > 0$,

$\therefore \Delta = b^2 - 4a^2 > 0$,

\therefore 方程有两个不相等的实数根, 且两根均大于零, 符合题意,

\therefore 当 $b > 2a$ 时, 存在 $\angle BMC = 90^\circ$,

(3) 解：不成立．

理由：若 $\angle BMC=90^\circ$ ，

由 (2) 可知 $x^2 - bx + a^2 = 0$ ，

$\because b < 2a, a > 0, b > 0$ ，

$\therefore \Delta = b^2 - 4a^2 < 0$ ，

\therefore 方程没有实数根，

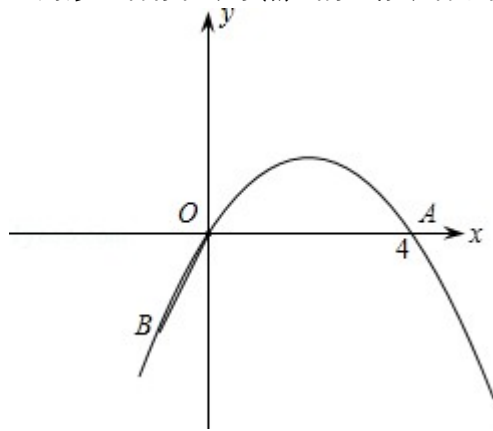
\therefore 当 $b < 2a$ 时，不存在 $\angle BMC=90^\circ$ ，即 (2) 中的结论不成立．

26. (2012 临沂) 如图，点 A 在 x 轴上，OA=4，将线段 OA 绕点 O 顺时针旋转 120° 至 OB 的位置．

(1) 求点 B 的坐标；

(2) 求经过点 A、O、B 的抛物线的解析式；

(3) 在此抛物线的对称轴上，是否存在点 P，使得以点 P、O、B 为顶点的三角形是等腰三角形？若存在，求点 P 的坐标；若不存在，说明理由．



考点：二次函数综合题；分类讨论．

解答：解：(1) 如图，过 B 点作 $BC \perp x$ 轴，垂足为 C，则 $\angle BCO=90^\circ$ ，

$\because \angle AOB=120^\circ$ ，

$\therefore \angle BOC=60^\circ$ ，

又 $\because OA=OB=4$ ，

$\therefore OC = \frac{1}{2}OB = \frac{1}{2} \times 4 = 2$ ， $BC = OB \cdot \sin 60^\circ = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ ，

\therefore 点 B 的坐标为 $(-2, -2\sqrt{3})$ ；

(2) \because 抛物线过原点 O 和点 A、B，

\therefore 可设抛物线解析式为 $y = ax^2 + bx$ ，

将 A $(4, 0)$ ，B $(-2, -2\sqrt{3})$ 代入，得

$$\begin{cases} 16a + 4b = 0 \\ 4a - 2b = -\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ b = \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

\therefore 此抛物线的解析式为 $y = -\frac{\sqrt{3}}{6}x^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}x$

(3) 存在，

如图，抛物线的对称轴是 $x=2$ ，直线 $x=2$ 与 x 轴的交点为 D ，设点 P 的坐标为 $(2, y)$ ，

① 若 $OB=OP$ ，

则 $2^2+|y|^2=4^2$ ，

解得 $y=\pm 2\sqrt{3}$ ，

当 $y=2\sqrt{3}$ 时，在 $\text{Rt}\triangle POD$ 中， $\angle PDO=90^\circ$ ， $\sin \angle POD=\frac{PD}{OP}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

$\therefore \angle POD=60^\circ$ ，

$\therefore \angle POB=\angle POD+\angle AOB=60^\circ+120^\circ=180^\circ$ ，

即 P 、 O 、 B 三人在同一直线上，

$\therefore y=2\sqrt{3}$ 不符合题意，舍去，

\therefore 点 P 的坐标为 $(2, -2\sqrt{3})$

② 若 $OB=PB$ ，则 $4^2+|y+2\sqrt{3}|^2=4^2$ ，

解得 $y=-2\sqrt{3}$ ，

故点 P 的坐标为 $(2, -2\sqrt{3})$ ，

③ 若 $OP=BP$ ，则 $2^2+|y|^2=4^2+|y+2\sqrt{3}|^2$ ，

解得 $y=-2\sqrt{3}$ ，

故点 P 的坐标为 $(2, -2\sqrt{3})$ ，

综上所述，符合条件的点 P 只有一个，其坐标为 $(2, -2\sqrt{3})$ ，

