考点跟踪训练47　方程与函数相结合型综合问题

一、选择题

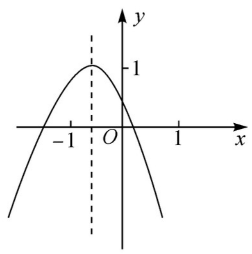
1．在平面直角坐标系中，抛物线 $y=x^2-1$ 与 x 轴的交点的个数是(　　)

A．3 B．2 C．1 D．0

答案　B

解析　令 $y=0$，得 $x^2-1=0$，$x=1$ 或 -1，抛物线交 x 轴于点 $(1,0)$，$(-1,0)$．

2．(2011·兰州)如图所示的二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象中，刘星同学观察得出了下面四条信息：(1)$b^2-4ac>0$；(2)$c>1$；(3)$2a-b<0$；(4)$a+b+c<0$.你认为其中错误的有(　　)

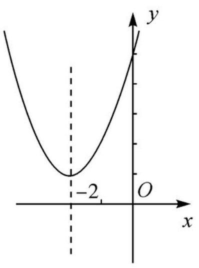


A．2个 B．3个 C．4个 D．1个

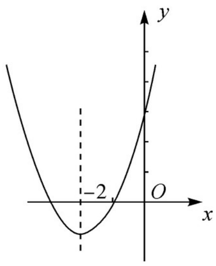
答案　D

解析　由抛物线与 x 轴交于两点，可知关于 x 的二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不相等的实数根，则 $b^2-4ac>0$；又抛物线的对标轴直线 $x=-\ >-1$，而 $a<0$，所以 $b>2a,2a-b<0$；当 $x=1$ 时，函数值 $y=a+b+c<0$，信息(1)，(3)，(4)正确；抛物线与 y 轴交于点 $(0，c)$，在点 $(0,1)$ 下方，$c<1$，信息(2)错误．

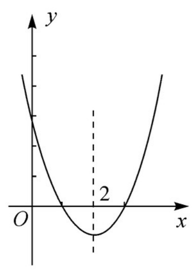
3．(2011·潍坊)已知一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a>0)$ 的两个实数根 x_1、x_2 满足 $x_1+x_2=4$ 和 $x_1 \cdot x_2=3$，那么二次函数 $y=ax^2+bx+c\ (a>0)$ 的图象有可能是(　　)



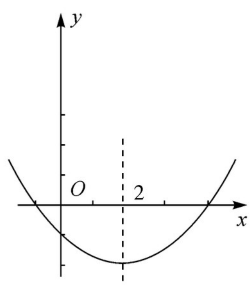
A



B



C



D

答案　C

解析　由 $x_1+x_2=4$ 和 $x_1x_2=3$，可解得两根为1、3，抛物线与 x 轴交点为 $(1,0)$，$(3,0)$，选C.

4．(2011·呼和浩特)已知一元二次方程 $x^2+bx-3=0$ 的一根为 -3，在二次函数 $y=x^2+$

$bx-3$的图象上有三点、、，y_1、y_2、y_3的大小关系是(　　)

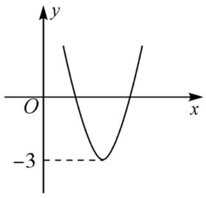
A． $y_1<y_2<y_3$ B．$y_2<y_1<y_3$

C． $y_3<y_1<y_2$ D．$y_1<y_3<y_2$

答案　A

解析　当方程的一根为$x=-3$时，$(-3)^2-3b-3=0$，$b=2$，所以$y=x^2+2x-3=(x+1)^2-4$，∴对称轴$x=-1$，∴$x=-$与$x=-$时y值相同，∵在$x=-1$右侧，y随x增大而增大，∴$y_1<y_2<y_3$，选A.

5．已知函数$y=ax^2+bx+c$的图象如图所示，那么关于x的方程$ax^2+bx+c+2=0$的根的情况是(　　)



A．无实数根

B．有两个相等实数根

C．有两个异号实数根

D．有两个同号不等实数根

答案　D

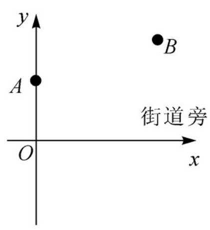
解析　画直线$y=-2$，与抛物线$y=ax^2+bx+c$交于两点，且在第四象限，故方程$ax^2+bx+c=-2$，有两个不等的正数根．

二、填空题

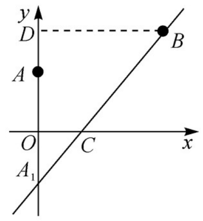
6．(2008·义乌)李老师给出了一个函数，甲、乙、丙三位学生分别指出这个函数的一个特征．甲：它的图象经过第一象限；乙：它的图象也经过第二象限；丙：在第一象限内函数值y随x增大而增大．在你学过的函数中，写出一个满足上述特征的函数解析式____________________．

答案　形如$y=kx+b(k>0，b>0)$或$y=ax^2+bx+c(a>0，b>0)$

7．要在街道旁修建一个奶站，向居民区A、B提供牛奶，奶站应建在什么地方，才能使从A、B到它的距离之和最短？小聪根据实际情况，以街道旁为x轴，建立了如图所示的平面直角坐标系，测得A点的坐标为(0,3)，B点的坐标为(6,5)，则从A、B两点到奶站距离之和的最小值是__________．



答案　10



解析　如图，画点 A 关于 x 轴的对称点 A_1，其坐标为$(0，-3)$，根据两点之间线段最短，可知 AC、BC 距离之和的最小值为线段 A_1B，画 $BD\perp y$ 轴于 D，在 $\mathrm{Rt}\triangle A_1BD$ 中，$A_1D=3+5=8$，$BD=6$，所以 $A_1B==10$.

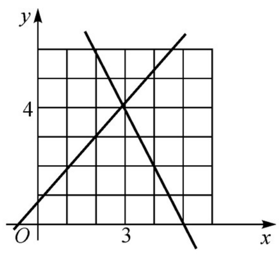
8．(2010·绥化)已知关于 x 的分式方程 $=1$ 的解是非正数，则 a 的取值范围是____________．

答案　$a\leq-1$ 且 $a\neq-2$

解析　去分母，$a+2=x+1$，

$\because x\neq-1$，$a\neq-2$，$x=a+1\leq0$，$\therefore a\leq-1$ 且 $a\neq-2$.

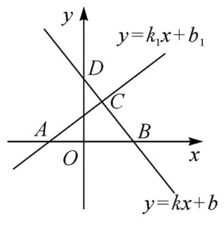
9．(2008·西宁)如图所示的是函数 $y=kx+b$ 与 $y=mx+n$ 的图象，则方程组的解关于原点对称的点的坐标是__________．



答案　$(-3，-4)$

解析　两直线 $y=kx+b$ 与 $y=mx+n$ 交于点$(3,4)$，所以关于原点对称的点的坐标为$(-3，-4)$．

10．如图，点 D 的纵坐标等于____________；点 A 的横坐标是方程____________的解；大于点 B 的横坐标是不等式____________的解集；点 C 的坐标是方程组______________的解；小于点 C 的横坐标是不等式____________的解集．



答案　b；$k_1x+b_1=0$；$kx+b<0$；；　$kx+b>k_1x+b_1$

三、解答题

11．如果一个二次函数的图象经过点 $A(6,10)$，与 x 轴交于 B、C 两点，点 B、C 的横坐标为 x_1、x_2，且 $x_1+x_2=6$，$x_1\cdot x_2=5$.求这个二次函数的解析式．

解　$\because$这个二次函数的图象与 x 轴交于 $B(x_1,0)$、$C(x_2,0)$两点，

$\therefore$这个二次函数的解析式是 $y=a(x-x_1)(x-x_2)$，

即 $y=a[x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2]$．

$\because x_1+x_2=6$，$x_1\cdot x_2=5$，

$\therefore y=a(x^2-6x+5)$．

∵这个二次函数的图象经过点$A(6,10)$，

∴$a\times(6^2-6\times6+5)=10$，

解之，得$a=2$，

∴所求二次函数的解析式为：$y=2x^2-12x+10$.

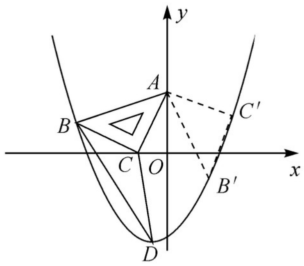
12．如图，在平面直角坐标系中，将一块腰长为的等腰直角三角尺ABC放在第二象限，且斜靠在两坐标轴上，直角顶点C的坐标为$(-1,0)$，点B在抛物线$y=ax^2+ax-2$上．

(1)点A的坐标为________，点B的坐标为________；

(2)抛物线的关系式为______________；

(3)设(2)中抛物线的顶点为D，求$\triangle DBC$的面积；

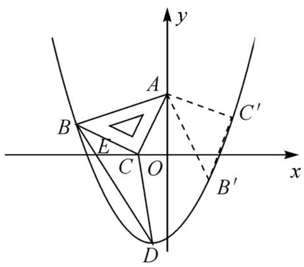
(4)将三角尺ABC绕顶点A逆时针方向旋转90°，到达$\triangle AB'C'$的位置．请判断点B'、C'是否在(2)中的抛物线上，并说明理由．



解　(1)$A(0,2)$，$B(-3,1)$．

(2)$y=x^2+x-2$.

(3)如图①，可求得抛物线的顶点D.



图①

设直线BD的关系式为$y=kx+b$，将点B、D的坐标代入，求得$k=-$，$b=-$，

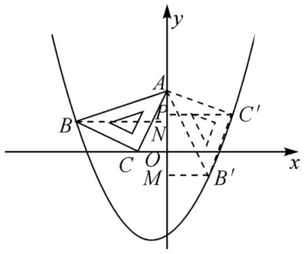
∴BD的关系式为$y=-x-$.

设直线BD和x轴交点为E，

则点E，$CE=$.

∴$\triangle DBC$的面积为××=.

(4)如图②，过点B'作$B'M\perp y$轴于点M，过点B作$BN\perp y$轴于点N，过点C'作$C'P\perp y$轴于点P.



图②

在 Rt△$AB'M$ 与 Rt△BAN 中，

∵$AB=AB'$，$\angle AB'M=\angle BAN=90°-\angle B'AM$，

∴Rt△$AB'M$≌Rt△BAN.

∴$B'M=AN=1$，$AM=BN=3$，∴$B'(1，-1)$．

同理：△$AC'P$≌△CAO，$C'P=OA=2$，$AP=OC=1$，

∴$C'(2,1)$．

将点 B'、C'的坐标代入 $y=x^2+x-2$，可知点 B'、C'在抛物线上(事实上，点 P 与点 N 重合)．

13．已知抛物线 $y=(9-m^2)x^2-2(m-3)x+3m$ 的顶点 D 在双曲线 $y=$上，直线 $y=kx+c$ 过点 D 和点 $C(a，b)$，且 y 随 x 的增大而减小，a、b 满足方程组求直线 $y=kx+c$ 的解析式．

解　∵$y=(9-m^2)x^2-2(m-3)x+3m$，

∴抛物线的顶点 D 的坐标为.

∵点 D 在双曲线 $y=-$上，

∴$=-5$，

整理得：$m^2+10m+24=0$，

解之，得 $m_1=-4$，$m_2=-6$，

∴D 点的坐标为 $D_1(1，-5)$或 D_2.

解方程组

得，

∴C 点的坐标为 $C_1(-2，-1)$或 $C_2(2,1)$．

∵直线 $y=kx+c$ 经过 D、C 两点，且 y 随 x 的增大而减小，

∴点 $C_2(2,1)$不合题意，舍去．

∴直线 $x_1y=kx+c$ 经过点 $D_1(1，-5)$和点 $C_1(-2，-1)$或点 D_2和 $C_1(-2，-1)$．

∴或

解之，得或

∴这条直线的解析式为 $y=-x-$或 $y=-6x-13$.