

考点跟踪训练4 分式及其运算

一、选择题

1. (2010·孝感)化简 $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ 的结果是()

A. $\frac{1}{x}$ B. $\frac{1}{x+1}$ C. $\frac{1}{x(x+1)}$ D. $\frac{1}{x^2}$

答案 B

解析 原式 $=\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-x}{x(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)}$.

2. (2011·宿迁)方程 $\frac{1}{x-2} = \frac{1}{x}$ 的解是()

A. -1 B. 2 C. 1 D. 0

答案 B

解析 把 $x=2$ 代入方程,可知方程左边 $=\frac{1}{2-2}$,右边 $=\frac{1}{2}$, $\therefore x=2$ 是方程的解.

3. (2011·苏州)已知 $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$,则 $\frac{1}{a-b}$ 的值是()

A. $\frac{1}{b}$ B. $\frac{1}{c}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{-2}$

答案 D

解析 $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, $\frac{1}{a-b} = \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = \frac{c-b}{bc}$, 所以 $\frac{1}{a-b} = -\frac{1}{2}$.

4. (2011·威海)计算 $\frac{1}{m^2-2m-1}$ 的结果()

A. $-\frac{1}{m^2-2m-1}$ B. $-\frac{1}{m^2+2m-1}$

C. $\frac{1}{m^2-2m-1}$ D. $\frac{1}{m^2-1}$

答案 B

解析 原式 $=\frac{1}{m^2-2m-1} = \frac{1}{(m-1)^2-2} = \frac{1}{m^2-2m-1}$.

5. (2011·鸡西)分式方程 $\frac{1}{x-2} = \frac{1}{x}$ 有增根,则 m 的值为()

A. 0和3 B. 1 C. 1和-2 D. 3

答案 D

解析 去分母,得 $x(x+2) - (x-1)(x+2) = m$,当增根 $x=1$ 时, $m=3$;当增根 $x=-2$ 时, $m=0$,经检验,当 $m=0$ 时, $\frac{1}{x-2} = \frac{1}{x}$,方程无解,不存在增根,故舍去 $m=0$.所以 $m=3$.

二、填空题

6. (2011·嘉兴)当 x _____时,分式有意义.

答案 $x \neq 3$

解析 因为分式有意义,所以 $3-x \neq 0$,即 $x \neq 3$.

7. (2011·内江)如果分式的值为0,那么 x 的值应为_____.

答案 -3

解析 分母 $x-3 \neq 0$, $x \neq 3$;分子 $3x^2-27=0$, $x^2=9$, $x=\pm 3$,综上, $x=-3$.

8. (2011·杭州)已知分式 $\frac{1}{x^2-5x+a}$,当 $x=2$ 时,分式无意义,则 $a=$ _____;当 $x < 6$ 时,使分式无意义的 x 的值共有_____个.

答案 6,2

解析 当 $x=2$ 时,分母 $x^2-5x+a=0$, $2^2-5 \times 2+a=0$, $a=6$;在 $x^2-5x+a=0$ 时,分式无意义, $x=$,当 $x < 6$ 时, $25-4a > 0$,方程有两个不相等的实数根,所以 x 的值有2个.

9. (2011·呼和浩特)若 $x^2-3x+1=0$,则 $\frac{1}{x^2-3x+1}$ 的值为_____.

答案 1

解析 因为 $x^2-3x+1=0$,所以 $x^2+1=3x$,而 $\frac{1}{x^2-3x+1} = \frac{1}{x^2+1-3x} = \frac{1}{3x-3x} = \frac{1}{0}$.故 $\frac{1}{x^2-3x+1} = 1$.

10. (2011·乐山)若 m 为正实数,且 $m^2-3=3$,则 $m^2-1=$ _____.

答案 3

解析 因为 $m > 0$,所以 $m^2-3=3$, $m^2=6$,故 $m^2-1=6-1=5$.

三、解答题

11. (2011·衢州)化简: $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$.

解 原式 $=\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{x+1+x}{x(x+1)} = \frac{2x+1}{x(x+1)}$.

12. (2010·镇江)描述证明

海宝在研究数学问题时发现了一个有趣的现象:

a, b 表示两个正数，并分别作为分子、分母，得到两个分式，如果这两个分式的和比这两个正数的积小2，那么这两个正数的和等于这两个正数的积。



现象描述

已知 $a > 0, b > 0$,
如果_____,
那么_____.

将上图横线处补充完整，并加以证明。

解 如果 $\frac{a}{a} + \frac{b}{b} = ab$ ，那么 $a + b = ab$.

证明： $\because \frac{a}{a} + \frac{b}{b} = ab, \therefore \frac{a}{a} = ab$,

$\therefore a^2 + b^2 + 2ab = (ab)^2, \therefore (a + b)^2 = (ab)^2$,

$\because a > 0, b > 0, a + b > 0, ab > 0$,

$\therefore a + b = ab$.

13. (2011·广安)先化简 $(\frac{a^2 - 2a + 1}{a^2 - 1}) \div (\frac{a - 1}{a + 1})$ ，然后从不等式组的解集中，选取一个你认为符合题意的 x 的值代入求值。

解 原式 $= \frac{a^2 - 2a + 1}{a^2 - 1} \times \frac{a + 1}{a - 1} = \frac{(a - 1)^2}{(a - 1)(a + 1)} \times \frac{a + 1}{a - 1} = 1$.

解不等式组得： $-5 \leq x < 6$.

选取的数字在 $-5 \leq x < 6$ 的范围内不为 5， $-5, 0$ 即可(答案不唯一)，代入求值略。

14. (2011·重庆)先化简，再求值：

$(\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}) \div (\frac{x - 1}{x + 1})$ ，其中 x 满足 $x^2 - x - 1 = 0$.

解 原式 $= (\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}) \times \frac{x + 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)^2}{(x - 1)(x + 1)} \times \frac{x + 1}{x - 1} = 1$.

$= 1$.

$= 1$.

当 $x^2 - x - 1 = 0$ 时， $x^2 = x + 1$ ，原式 $= 1$.

15. (1)(2011·盐城)解方程： $\frac{x + 3}{x - 1} = 2$.

解 去分母，得 $x + 3 = 2(x - 1)$.

解之，得 $x = 5$.

经检验， $x = 5$ 是原方程的解。 $\therefore x = 5$.

(2)(2011·菏泽)解方程： $\frac{x + 1}{x} = \frac{2x + 1}{x + 1}$.

解 原方程两边同乘以 $6x$ ，得 $3(x + 1) = 2x \cdot (x + 1)$,

整理得 $2x^2 - x - 3 = 0$,

解得 $x = -1$ 或 $x = \frac{3}{2}$,

经检验： $x_1 = -1, x_2 = \frac{3}{2}$ 都是原方程的解，故原方程的解是 $x_1 = -1, x_2 = \frac{3}{2}$.

四、选做题

16. 若 $abc = 1$ ，求 $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$ 的值。

分析 本题可将分式通分后，再进行化简求值，但较复杂。下面介绍两种简单的解法。

解法一 因为 $abc = 1$ ，所以 a, b, c 都不为零。

原式 $= \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = \frac{a^2c + b^2a + c^2b}{abc}$.

$= \frac{a^2c + b^2a + c^2b}{1}$

$= a^2c + b^2a + c^2b$

$= 1$.

解法二 由 $abc = 1$ ，得 $a = \frac{1}{bc}$ ，将之代入原式。

原式 $= \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = \frac{1}{bc} \cdot \frac{1}{b} + \frac{b}{c} + c \cdot bc$

$= \frac{1}{b^2c} + \frac{b}{c} + bc$

$= 1$.