

2012年山东省济宁市中考数学试卷解析

一、单项选择题（每小题3分，共30分）

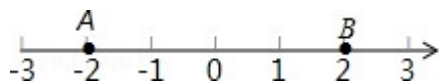
1. (2012·济宁) 在数轴上到原点距离等于2的点所标示的数是 ()

- A. -2 B. 2 C. ±2 D. 不能确定

考点：数轴。

分析：先在数轴上标出到原点距离等于2的点，然后根据图示作出选择即可。

解答：解：在数轴上到原点距离等于2的点如图所示：



点A、B即为所求的点，即在数轴上到原点距离等于2的点所标示的数是-2和2；

故选C。

点评：本题考查了数轴。由于引进了数轴，我们把数和点对应起来，也就是把“数”和“形”结合起来，二者互相补充，相辅相成，把很多复杂的问题转化为简单的问题，在学习中要注意培养数形结合的数学思想。

2. (2012·济宁) 下列运算正确的是 ()

- A. $-2(3x-1) = -6x$ B. $-2(3x-1) = -6x+1$ C. $-2(3x-1) = -6x-1$ D. $-2(3x-1) = -6x+2$

考点：去括号与添括号。

分析：利用去括号法则，将原式去括号，进而判断即可得出答案即可。

解答：解：A. $\because -2(3x-1) = -6x+2$, $\therefore -2(3x-1) = -6x-1$ 错误，故此选项错误；

B. $\because -2(3x-1) = -6x+2$, $\therefore -2(3x-1) = -6x+1$ 错误，故此选项错误；

C. $\because -2(3x-1) = -6x+2$, $\therefore -2(3x-1) = -6x-2$ 错误，故此选项错误；

D. $-2(3x-1) = -6x+2$ ，故此选项正确；

故选：D。

点评：此题主要考查了去括号法则，利用去括号法则：如果括号外的因数是正数，去括号后原括号内各项的符号与原来的符号相同；如果括号外的因数是负数，去括号后原括号内各项的符号与原来的符号相反得出是解题关键。

3. 空气是由多种气体混合而成的，为了简明扼要的介绍空气的组成情况，较好的描述数据，最适合使用的统计图是 ()

- A. 扇形图 B. 条形图 C. 折线图 D. 直方图

考点：统计图的选择。

分析：扇形统计图表示的是部分在总体中所占的百分比，但一般不能直接从图中得到具体的数据；

折线统计图表示的是事物的变化情况；

条形统计图能清楚地表示出每个项目的具体数目；

频数分布直方图，清楚显示在各个不同区间内取值，各组频数分布情况，易于显示各组之间频数的差别。

解答：解：根据题意，得

要求直观反映空气的组成情况，即各部分在总体中所占的百分比，结合统计图各自的特点，应选择扇形统计图。

故选 A .

点评：此题考查扇形统计图、折线统计图、条形统计图各自的特点 .

4 . (2012•济宁) 下列式子变形是因式分解的是 ()

- A . $x^2 - 5x + 6 = x(x - 5) + 6$ B . $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$ C . $(x - 2)(x - 3) = x^2 - 5x + 6$ D . $x^2 - 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$

考点：因式分解的意义。

分析：根据因式分解的定义：就是把整式变形为整式的积的形式，即可作出判断 .

解答：解：A、 $x^2 - 5x + 6 = x(x - 5) + 6$ 右边不是整式积的形式，故不是分解因式，故本选项错误；

B、 $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$ 是整式积的形式，故是分解因式，故本选项正确；

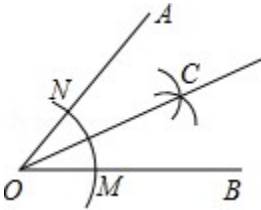
C、 $(x - 2)(x - 3) = x^2 - 5x + 6$ 是整式的乘法，故不是分解因式，故本选项错误；

D、 $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$ ，故本选项错误 .

故选 B .

点评：本题考查的是因式分解的意义，把一个多项式化为几个整式的积的形式，这种变形叫做把这个多项式因式分解，也叫做分解因式 .

5 . (2012•济宁) 用直尺和圆规作一个角的平分线的示意图如图所示，则能说明 $\angle AOC = \angle BOC$ 的依据是 ()



- A . SSS
C . AAS

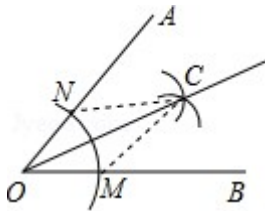
- B . ASA
D . 角平分线上的点到角两边距离相等

考点：全等三角形的判定与性质；作图—基本作图。

专题：证明题。

分析：连接 NC，MC，根据 SSS 证 $\triangle ONC \cong \triangle OMC$ ，即可推出答案 .

解答：



解：连接 NC，MC，

在 $\triangle ONC$ 和 $\triangle OMC$ 中

$$\begin{cases} ON = OM \\ NC = MC \\ OC = OC \end{cases}$$

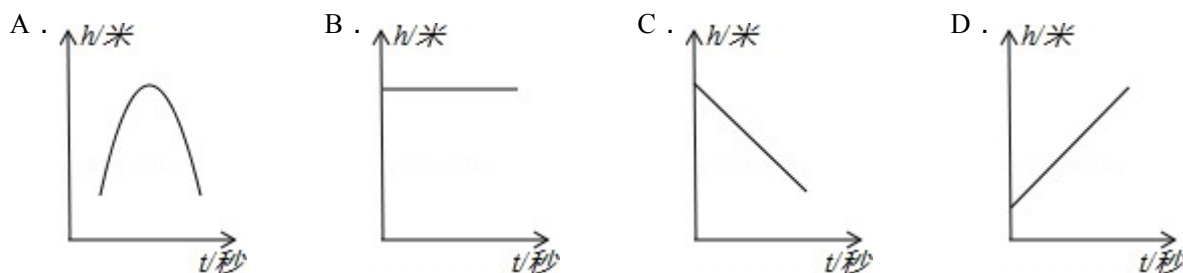
$\therefore \triangle ONC \cong \triangle OMC$ (SSS) ,

$\therefore \angle AOC = \angle BOC$,

故选 A .

点评：本题考查了全等三角形的性质和判定的应用，主要考查学生运用性质进行推理的能力，题型较好，难度适中 .

6. (2012•济宁) 周一的升旗仪式上, 同学们看到匀速上升的旗子, 能反应其高度与时间关系的图象大致是 ()



考点: 函数的图象。

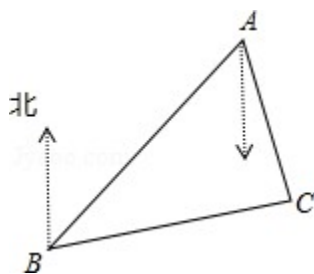
专题: 应用题。

分析: 根据旗子匀速上升可知, 高度与时间的关系是一次函数关系, 且随着时间的增大高度在逐渐增大, 然后根据各选项图象选择即可。

解答: 解: \because 旗子是匀速上升的, 且开始时是拿在同学手中,
 \therefore 旗子的高度与时间关系是一次函数关系, 并且随着时间的增大高度在不断增大,
 纵观各选项, 只有 D 选项图象符合。
 故选 D。

点评: 本题考查了函数图象, 根据题意判断出旗子的高度与时间是一次函数关系, 并且随着时间的增大高度在不断增大是解题的关键。

7. (2012•济宁) 如图, B 处在 A 处的南偏西 45° 方向, C 处在 A 处的南偏东 15° 方向, C 处在 B 处的北偏东 80° 方向, 则 $\angle ACB$ 等于 ()



A. 40°

B. 75°

C. 85°

D. 140°

考点: 方向角。

专题: 计算题。

分析: 根据方向角的定义, 即可求得 $\angle DBA$, $\angle DBC$, $\angle EAC$ 的度数, 然后根据三角形内角和定理即可求解。

解答: 解: 如同:

\because AE, DB 是正南正北方向,

\therefore $BD \parallel AE$,

$\therefore \angle DBA = 45^\circ$,

$\therefore \angle BAE = \angle DBA = 45^\circ$,

$\because \angle EAC = 15^\circ$,

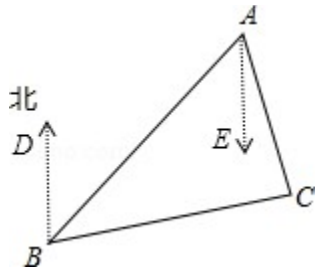
$\therefore \angle BAC = \angle BAE + \angle EAC = 45^\circ + 15^\circ = 60^\circ$,

又 $\because \angle DBC = 80^\circ$,

$\therefore \angle ABC = 80^\circ - 45^\circ = 35^\circ$,

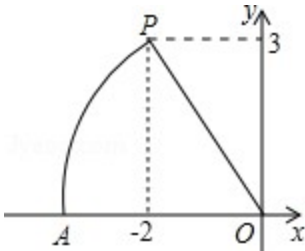
$\therefore \angle ACB = 180^\circ - \angle ABC - \angle BAC = 180^\circ - 60^\circ - 35^\circ = 85^\circ$ 。

故选 C .



点评： 本题主要考查了方向角的定义，以及三角形的内角和定理，正确理解定义是解题的关键 .

8 . (2012•济宁) 如图，在平面直角坐标系中，点 P 坐标为 $(-2, 3)$ ，以点 O 为圆心，以 OP 的长为半径画弧，交 x 轴的负半轴于点 A，则点 A 的横坐标介于 ()



- A . - 4 和 - 3 之间 B . 3 和 4 之间 C . - 5 和 - 4 之间 D . 4 和 5 之间

考点： 勾股定理；估算无理数的大小；坐标与图形性质。

专题： 探究型。

分析： 先根据勾股定理求出 OP 的长，由于 $OP=OA$ ，故估算出 OP 的长，再根据点 A 在 x 轴的负半轴上即可得出结论 .

解答： 解：∵ 点 P 坐标为 $(-2, 3)$ ，

$$\therefore OP = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13},$$

∵ 点 A、P 均在以点 O 为圆心，以 OP 为半径的圆上，

$$\therefore OA = OP = \sqrt{13},$$

$$\because 9 < 13 < 16,$$

$$\therefore 3 < \sqrt{13} < 4.$$

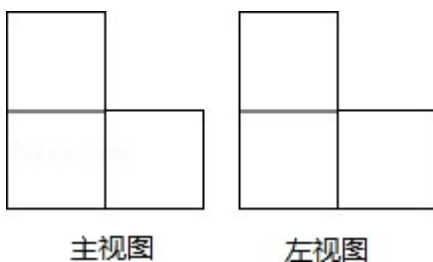
∵ 点 A 在 x 轴的负半轴上，

∴ 点 A 的横坐标介于 - 4 和 - 3 之间 .

故选 A .

点评： 本题考查的是勾股定理及估算无理数的大小，根据题意利用勾股定理求出 OP 的长是解答此题的关键 .

9 . (2012•济宁) 如图，是由若干个完全相同的小正方体组成的一个几何体的主视图和左视图，则组成这个几何体的小正方体的个数是 ()



主视图

左视图

A. 3个或4个

B. 4个或5个

C. 5个或6个

D. 6个或7个

考点：由三视图判断几何体。

分析：左视图底面有2个小正方体，主视图与左视图相同，则可以判断出该几何体底面最少有3个小正方体，最多有4个。根据这个思路可判断出该几何体有多少个小立方块。

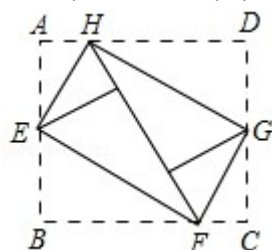
解答：解：左视图与主视图相同，可判断出底面最少有3个小正方体，最多有4个小正方体。而第二行则只有1个小正方体。

则这个几何体的小立方块可能有4或5个。

故选B。

点评：本题考查了由三视图判断几何体，难度不大，主要考查了考生的空间想象能力以及三视图的相关知识。

10. (2012•济宁) 如图，将矩形ABCD的四个角向内折起，恰好拼成一个无缝隙无重叠的四边形EFGH，EH=12厘米，EF=16厘米，则边AD的长是()



A. 12厘米

B. 16厘米

C. 20厘米

D. 28厘米

考点：翻折变换(折叠问题)；勾股定理。

分析：先求出 $\triangle EFH$ 是直角三角形，再根据勾股定理求出 $FH=20$ ，再利用全等三角形的性质解答即可。

解答：解：设斜线上两个点分别为P、Q，

\because P点是B点对折过去的，

$\therefore \angle EPH$ 为直角， $\triangle AEH \cong \triangle PEH$ ，

$\therefore \angle HEA = \angle PEH$ ，

同理 $\angle PEF = \angle BEF$ ，

\therefore 这四个角互补，

$\therefore \angle PEH + \angle PEF = 90^\circ$ ，

\therefore 四边形EFGH是矩形，

$\therefore \triangle DHG \cong \triangle BFE$ ，HEF是直角三角形，

$\therefore BF = DH = PF$ ，

$\therefore AH = HP$ ，

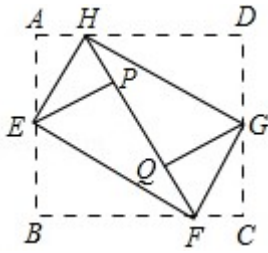
$\therefore AD = HF$ ，

$\because EH = 12\text{cm}$ ， $EF = 16\text{cm}$ ，

$$\therefore FH = \sqrt{EH^2 + EF^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20\text{cm}，$$

$\therefore FH = AD = 20\text{cm}$ 。

故选C。



点评： 本题考查的是翻折变换及勾股定理、全等三角形的判定与性质，解答此题的关键是作出辅助线，构造出全等三角形，再根据直角三角形及全等三角形的性质解答．

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分，只要求填写最后结果）

11. (2012·济宁) 某种苹果的售价是每千克 x 元，用面值为 100 元的人民币购买了 5 千克，应找回 $(100 - 5x)$ 元．

考点： 列代数式。

分析： 单价 \times 重量=应付的钱；剩余的钱即为应找回的钱．

解答： 解：根据题意，5 千克苹果售价为 $5x$ 元，所以应找回 $(100 - 5x)$ 元．

故答案为 $(100 - 5x)$ ．

点评： 此题考查列代数式，属基础题，简单．

12. (2012·济宁) 数学课上，小明拿出了连续五日最低气温的统计表：

日期	一	二	三	四	五
最低气温 ($^{\circ}\text{C}$)	22	24	26	23	25

考点： 极差；算术平均数。

分析： 根据极差和平均数的定义即可求得．

解答： 解：这组数据的平均数是 $(22+24+26+23+25) \div 5=24$ ，

极差为 $26 - 22=4$ ．

故答案为：24，4．

点评： 此题考查了极差和平均数，极差反映了一组数据变化范围的大小，求极差的方法是用一组数据中的最大值减去最小值．注意：①极差的单位与原数据单位一致．②如果数据的平均数、中位数、极差都完全相同，此时用极差来反映数据的离散程度就显得不准确．

13. (2012·济宁) 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\angle A$ 、 $\angle B$ 满足 $|\cos A - \frac{1}{2}| + (\sin B - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 = 0$ ，则 $\angle C =$ 75° ．

考点： 特殊角的三角函数值；非负数的性质：绝对值；非负数的性质：偶次方；三角形内角和定理。

分析： 首先根据绝对值与偶次幂具有非负性可知 $\cos A - \frac{1}{2}=0$ ， $\sin B - \frac{\sqrt{2}}{2}=0$ ，然后根据特殊角的三角函数值得到 $\angle A$ 、 $\angle B$ 的度数，再根据三角形内角和为 180° 算出 $\angle C$ 的度数即可．

解答： 解： $\because |\cos A - \frac{1}{2}| + (\sin B - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 = 0$ ，

$$\therefore \cos A - \frac{1}{2} = 0, \sin B - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,$$

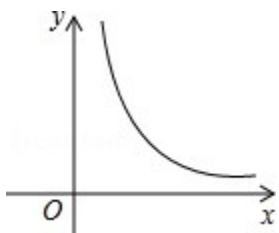
$$\therefore \cos A = \frac{1}{2}, \sin B = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

∴ ∠A=60°, ∠B=45°,
 则∠C=180° - ∠A - ∠B=180° - 60° - 45°=75°,
 故答案为: 75°.

点评: 此题主要考查了非负数的性质, 特殊角的三角函数值, 三角形内角和定理, 关键是要熟练掌握特殊角的三角函数值.

14. (2012•济宁) 如图, 是反比例函数 $y = \frac{k-2}{x}$ 的图象的一个分支, 对于给出的下列说法:

- ① 常数 k 的取值范围是 $k > 2$;
 - ② 另一个分支在第三象限;
 - ③ 在函数图象上取点 A (a_1, b_1) 和点 B (a_2, b_2), 当 $a_1 > a_2$ 时, 则 $b_1 < b_2$;
 - ④ 在函数图象的某一个分支上取点 A (a_1, b_1) 和点 B (a_2, b_2), 当 $a_1 > a_2$ 时, 则 $b_1 < b_2$;
- 其中正确的是 ①②④ (在横线上填出正确的序号)



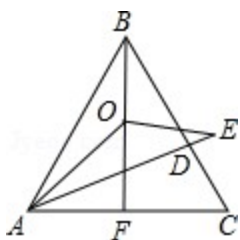
考点: 反比例函数的图象; 反比例函数的性质; 反比例函数图象上点的坐标特征。

分析: 根据反比例函数的性质: (1) 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的图象是双曲线; (2) 当 $k > 0$, 双曲线的两支分别位于第一、第三象限, 在每一象限内 y 随 x 的增大而减小; (3) 当 $k < 0$, 双曲线的两支分别位于第二、第四象限, 在每一象限内 y 随 x 的增大而增大. 针对四个说法依次分析可得答案.

解答: 解: ① 根据函数图象在第一象限可得 $k-2 > 0$, 故 $k > 2$, 故①正确;
 ② 根据反比例函数的性质可得, 另一个分支在第三象限, 故②正确;
 ③ 根据反比例函数的性质, 图象在第一、三象限时, 在图象的每一支上 y 随 x 的增大而减小, A、B 不一定在图象的同一支上, 故③错误;
 ④ 根据反比例函数的性质, 图象在第一、三象限时, 在图象的每一支上 y 随 x 的增大而减小, 故在函数图象的某一个分支上取点 A (a_1, b_1) 和点 B (a_2, b_2), 当 $a_1 > a_2$ 时, 则 $b_1 < b_2$ 正确;
 故答案为: ①②④.

点评: 此题主要考查了反比例函数图象的性质, 关键是熟练掌握反比例函数的性质.

15. (2012•济宁) 如图, 在等边三角形 ABC 中, D 是 BC 边上的一点, 延长 AD 至 E, 使 $AE=AC$, ∠BAE 的平分线交 △ABC 的高 BF 于点 O, 则 $\tan \angle AEO = \frac{\sqrt{3}}{3}$.



考点: 全等三角形的判定与性质; 等边三角形的性质; 特殊角的三角函数值。

专题：证明题。

分析：根据等边三角形性质和三线合一性质求出 $\angle BAF=30^\circ$ ，推出 $AB=AE$ ，根据 SAS 证 $\triangle BAO \cong \triangle EAO$ ，推出 $\angle AEO = \angle ABO = 30^\circ$ 即可。

解答：解： $\because \triangle ABC$ 是等边三角形，

$$\angle ABC = 60^\circ, AB = BC,$$

$$\therefore BF \perp AC,$$

$$\therefore \angle ABF = \frac{1}{2} \angle ABC = 30^\circ,$$

$$\therefore AB = AC, AE = AC,$$

$$\therefore AB = AE,$$

$$\therefore AO \text{ 平分 } \angle BAE,$$

$$\therefore \angle BAO = \angle EAO,$$

\therefore 在 $\triangle BAO$ 和 $\triangle EAO$ 中

$$\therefore \begin{cases} AB = AE \\ \angle BAO = \angle EAO, \\ AO = AO \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BAO \cong \triangle EAO,$$

$$\therefore \angle AEO = \angle ABO = 30^\circ,$$

$$\therefore \tan \angle AEO = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

故答案为： $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 。

点评：本题考查了等边三角形性质，全等三角形的性质和判定，特殊角的三角函数值等知识点的应用，关键是证出 $\angle AEO = \angle ABO$ ，题目比较典型，难度适中。

三、解答题（共 55 分，解答时应写出文字说明、证明过程或推演步骤）

16. (2012·济宁) 解不等式组 $\begin{cases} \frac{x+5}{2} > x \\ x-3(x-1) \leq 5 \end{cases}$ ，并在数轴上表示出它的解集。

考点：解一元一次不等式组；在数轴上表示不等式的解集。

专题：计算题。

分析：利用去分母及去括号法则化简原不等式组的两不等式，分别求出解集，将两解集表示在数轴上，找出两解集的公共部分，即可得到原不等式组的解集。

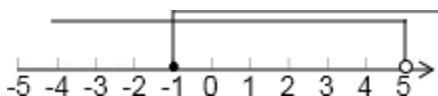
解答：

$$\text{解：} \begin{cases} \frac{x+5}{2} > x \text{ ①} \\ x-3(x-1) \leq 5 \text{ ②} \end{cases},$$

由不等式①去分母得： $x+5 > 2x$ ，解得： $x < 5$ ；

由不等式②去括号得： $x-3x+3 \leq 5$ ，解得： $x \geq -1$ ，

把不等式①、②的解集表示在数轴上为：

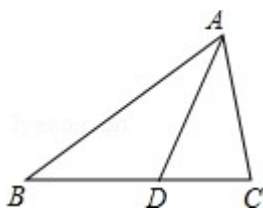


则原不等式的解集为 $-1 \leq x < 5$ 。

点评：此题考查了一元一次不等式组的解法，以及在数轴上表示不等式的解集，其中不等式组取解集的方法为：同大取大；同小取小；大小小大取中间；大大小小无解。

17. (2012•济宁) 如图, AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线, 过点 D 作 $DE \parallel AB$, $DF \parallel AC$, 分别交 AC、AB 于点 E 和 F.

- (1) 在图中画出线段 DE 和 DF;
- (2) 连接 EF, 则线段 AD 和 EF 互相垂直平分, 这是为什么?



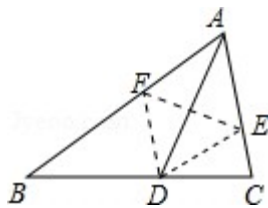
考点: 菱形的判定与性质; 作图—复杂作图。

分析: (1) 根据题目要求画出线段 DE、DF 即可;

(2) 首先证明四边形 AEDF 是平行四边形, 再证明 $\angle EAD = \angle EDA$, 根据等角对等边可得 $EA = ED$, 由有一组邻边相等的平行四边形是菱形可证明四边形 AEDF 是菱形, 再根据菱形的性质可得线段 AD 和 EF 互相垂直平分.

解答: 解 (1) 如图所示;

(2) $\because DE \parallel AB, DF \parallel AC,$
 \therefore 四边形 AEDF 是平行四边形,
 $\because AD$ 是 $\triangle ABC$ 的角平分线,
 $\therefore \angle FAD = \angle EAD,$
 $\because AB \parallel DE,$
 $\therefore \angle FAD = \angle EDA,$
 $\therefore \angle EAD = \angle EDA,$
 $\therefore EA = ED,$
 \therefore 平行四边形 AEDF 是菱形,
 $\therefore AD$ 与 EF 互相垂直平分.



点评: 此题主要考查了画平行线, 菱形的判定与性质, 关键是掌握菱形的判定方法, 判定四边形为菱形可以结合菱形的性质证出线段相等, 角相等, 线段互相垂直且平分.

18. (2012•济宁) 一学校为了绿化校园环境, 向某园林公司购买一批树苗, 园林公司规定: 如果购买树苗不超过 60 棵, 每棵售价 120 元; 如果购买树苗超过 60 棵, 每增加 1 棵, 所出售的这批树苗每棵售价均降低 0.5 元, 但每棵树苗最低售价不得少于 100 元, 该校最终向园林公司支付树苗款 8800 元, 请问该校共购买了多少棵树苗?

考点: 一元二次方程的应用。

分析: 根据设该校共购买了 x 棵树苗, 由题意得: $x[120 - 0.5(x - 60)] = 8800$, 进而得出即可.

解答: 解: 因为 60 棵树苗售价为 $120 \text{ 元} \times 60 = 7200 \text{ 元} < 8800 \text{ 元}$,

所以该校购买树苗超过 60 棵, 设该校共购买了 x 棵树苗, 由题意得:

$$x[120 - 0.5(x - 60)] = 8800,$$

解得： $x_1=220$ ， $x_2=80$ 。

当 $x_2=220$ 时， $120 - 0.5 \times (220 - 60) = 40 < 100$ ，

$\therefore x_1=220$ (不合题意，舍去)；

当 $x_2=80$ 时， $120 - 0.5 \times (80 - 60) = 110 > 100$ ，

$\therefore x=80$ ，

答：该校共购买了 80 棵树苗。

点评：此题主要考查了一元二次方程的应用，根据已知“如果购买树苗超过 60 棵，每增加 1 棵，所出售的这批树苗每棵售价均降低 0.5 元”得出方程是解题关键。

19. (2012·济宁) 问题情境：

用同样大小的黑色棋子按如图所示的规律摆放，则第 2012 个图共有多少枚棋子？

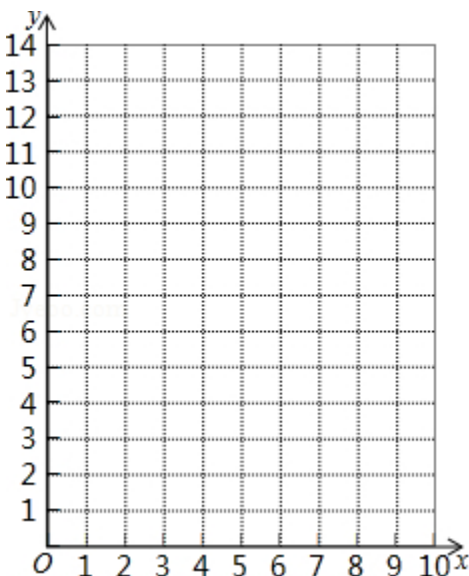


建立模型：

有些规律问题可以借助函数思想来探讨，具体步骤：第一步，确定变量；第二步：在直角坐标系中画出函数图象；第三步：根据函数图象猜想并求出函数关系式；第四步：把另外的某一点代入验证，若成立，则用这个关系式去求解。

解决问题：

根据以上步骤，请你解答“问题情境”。



考点：一次函数的应用；规律型：图形的变化类。

专题：阅读型。

分析：画出相关图形后可得这些点在一条直线上，设出直线解析式，把任意两点代入可得直线解析式，进而把 $x=2012$ 代入可得相应的棋子数目。

解答：解：以图形的序号为横坐标，棋子的枚数为纵坐标，描点： $(1, 4)$ 、 $(2, 7)$ 、 $(3, 10)$ 、 $(4, 13)$ 依次连接以上各点，所有各点在一条直线上，

设直线解析式为 $y=kx+b$ ，把 $(1, 4)$ 、 $(2, 7)$ 两点坐标代入得

$$\begin{cases} k+b=4 \\ 2k+b=7 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} k=3 \\ b=1 \end{cases},$$

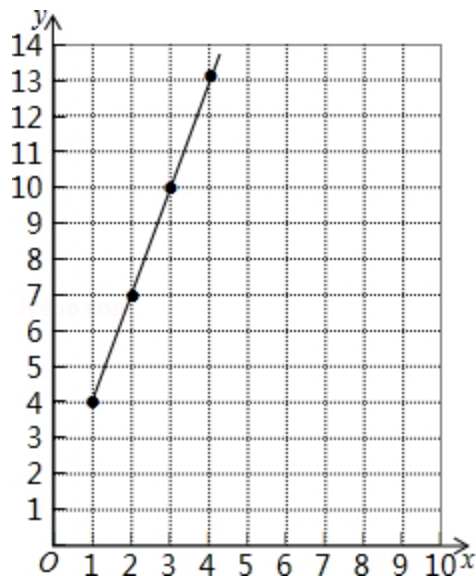
所以 $y=3x+1$,

验证：当 $x=3$ 时， $y=10$.

所以，另外一点也在这条直线上 .

当 $x=2012$ 时， $y=3 \times 2012 + 1 = 6037$.

答：第 2012 个图有 6037 枚棋子 .

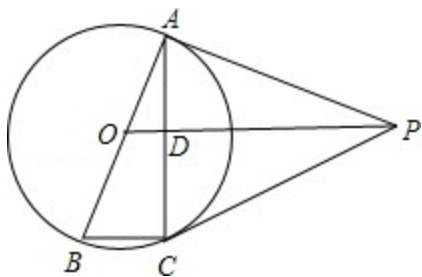


点评：考查一次函数的应用；根据所给点画出的相关图形判断出相应的函数是解决本题的突破点 .

20 . (2012·济宁) 如图，AB 是 $\odot O$ 的直径，AC 是弦， $OD \perp AC$ 于点 D，过点 A 作 $\odot O$ 的切线 AP，AP 与 OD 的延长线交于点 P，连接 PC、BC .

(1) 猜想：线段 OD 与 BC 有何数量和位置关系，并证明你的结论 .

(2) 求证：PC 是 $\odot O$ 的切线 .



考点：切线的判定与性质；全等三角形的判定与性质；三角形中位线定理；圆周角定理。

分析： (1) 根据垂径定理可以得到 D 是 AC 的中点，则 OD 是 $\triangle ABC$ 的中位线，根据三角形的中位线定

理可以得到 $OD \parallel BC$ ， $CD = \frac{1}{2}BC$ ；

(2) 连接 OC，设 OP 与 $\odot O$ 交于点 E，可以证得 $\triangle OAP \cong \triangle OCP$ ，利用全等三角形的对应角相等，以及切线的性质定理可以得到： $\angle OCP = 90^\circ$ ，即 $OC \perp PC$ ，即可等证 .

解答： (1) 猜想： $OD \parallel BC$ ， $CD = \frac{1}{2}BC$.

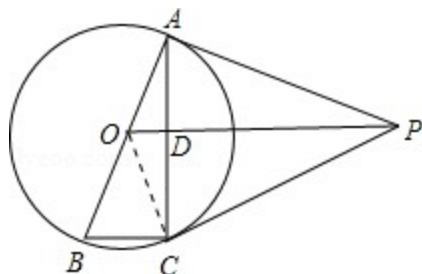
证明： $\because OD \perp AC$ ，

$\therefore AD = DC$

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径，

$\therefore OA=OB$...2分
 $\therefore OD$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线，
 $\therefore OD \parallel BC, OD = \frac{1}{2}BC$

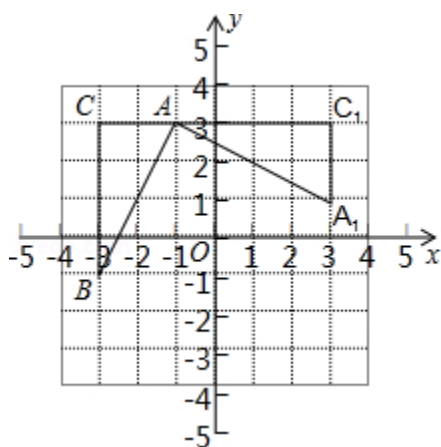
(2) 证明：连接 OC ，设 OP 与 $\odot O$ 交于点 E 。
 $\because OD \perp AC$ ， OD 经过圆心 O ，
 $\therefore \widehat{AE} = \widehat{CE}$ ，即 $\angle AOE = \angle COE$
 在 $\triangle OAP$ 和 $\triangle OCP$ 中，
 $\because OA=OC, OP=OP$ ，
 $\therefore \triangle OAP \cong \triangle OCP$ ，
 $\therefore \angle OCP = \angle OAP$
 $\because PA$ 是 $\odot O$ 的切线，
 $\therefore \angle OAP = 90^\circ$ 。
 $\therefore \angle OCP = 90^\circ$ ，即 $OC \perp PC$
 $\therefore PC$ 是 $\odot O$ 的切线。



点评： 本题考查了切线的性质定理以及判定定理，三角形的中位线定理，证明圆的切线的问题常用的思路是根据切线的判定定理转化成证明垂直的问题。

21. (2012·济宁) 如图，在平面直角坐标系中，有一 $Rt\triangle ABC$ ，且 $A(-1, 3)$ ， $B(-3, -1)$ ， $C(-3, 3)$ ，已知 $\triangle A_1AC_1$ 是由 $\triangle ABC$ 旋转得到的。

- (1) 请写出旋转中心的坐标是 $O(0, 0)$ ，旋转角是 90° 度；
- (2) 以 (1) 中的旋转中心为中心，分别画出 $\triangle A_1AC_1$ 顺时针旋转 90° 、 180° 的三角形；
- (3) 设 $Rt\triangle ABC$ 两直角边 $BC=a$ 、 $AC=b$ 、斜边 $AB=c$ ，利用变换前后所形成的图案证明勾股定理。



考点： 作图-旋转变换；勾股定理的证明。

专题： 作图题。

分析： (1) 由图形可知，对应点的连线 CC_1 、 AA_1 的垂直平分线过点 O ，根据旋转变换的性质，点 O 即

为旋转中心，再根据网格结构，观察可得旋转角为 90° ；

(2) 利用网格结构，分别找出旋转后对应点的位置，然后顺次连接即可；

(3) 利用面积，根据正方形 $CC_1C_2C_3$ 的面积等于正方形 AA_1A_2B 的面积加上 $\triangle ABC$ 的面积的 4 倍，列式计算即可得证．

解答：解：(1) 旋转中心坐标是 $O(0, 0)$ ，旋转角是 90° ；…2 分

(2) 画出的图形如图所示；…6 分

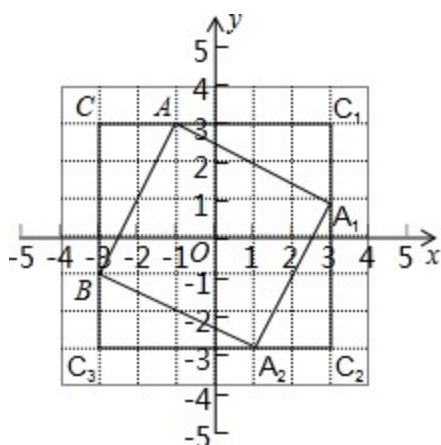
(3) 有旋转的过程可知，四边形 $CC_1C_2C_3$ 和四边形 AA_1A_2B 是正方形．

$\therefore S_{\text{正方形}CC_1C_2C_3} = S_{\text{正方形}AA_1A_2B} + 4S_{\triangle ABC}$ ，

$$\therefore (a+b)^2 = c^2 + 4 \times \frac{1}{2}ab,$$

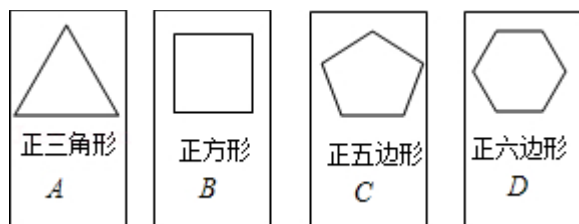
$$\text{即 } a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab,$$

$$\therefore a^2 + b^2 = c^2.$$



点评：本题考查了利用旋转变换作图，旋转变换的旋转以及对应点连线的垂直平分线的交点即为旋转中心，勾股定理的证明，熟练掌握网格结构，找出对应点的位置是解题的关键．

22. (2012·济宁) 有四张形状、大小和质地相同的卡片 A、B、C、D，正面分别写有一个正多边形（所有正多边形的边长相等），把四张卡片洗匀后正面朝下放在桌面上，从中随机抽取一张（不放回），接着再随机抽取一张．



(1) 请你用画树形图或列表的方法列举出可能出现的所有结果；

(2) 如果在 (1) 中各种结果被选中的可能性相同，求两次抽取的正多边形能构成平面镶嵌的概率；

(3) 若两种正多边形构成平面镶嵌， p 、 q 表示这两种正多边形的个数， x 、 y 表示对应正多边形的每个内角的度数，则有方程 $px + qy = 360$ ，求每种平面镶嵌中 p 、 q 的值．

考点：列表法与树状图法；平面镶嵌（密铺）。

专题：图表型。

分析：(1) 列出图表即可得到所有的可能情况；

(2) 根据平面镶嵌的定义，能构成平面镶嵌的多边形有正三角形与正方形，正三角形与正六边

形，然后根据概率公式列式计算即可得解；

(3) 对两种平面镶嵌的情况，根据方程代入数据整理，再根据 p 、 q 都是整数解答。

解答：解：(1) 所有出现的结果共有如下 12 种：…3 分

第一次/第二次	A	B	C	D
A		BA	CA	DA
B	AB		CB	DB
C	AC	BC		DC
D	AD	BD	CD	

所以 P (两次抽取的正多边形能构成平面镶嵌) $=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$ ；…6 分

(3) 当正三角形和正方形构成平面镶嵌时，

则有 $60p+90q=360$ ，即 $2p+3q=12$ 。

因为 p 、 q 是正整数，

所以 $p=3$ ， $q=2$ ，…7 分

当正三角形和六边形构成平面镶嵌时，

则有 $60p+120q=360$ ，即 $p+2q=6$ 。

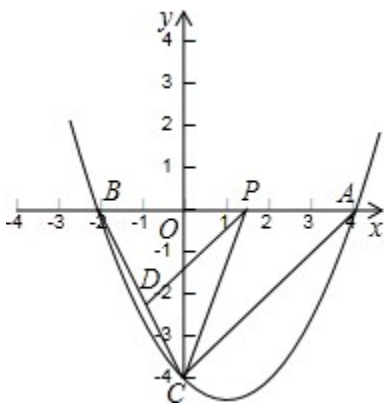
因为 p 、 q 是正整数，

所以 $p=4$ ， $q=1$ 或 $p=2$ ， $q=2$ 。

点评：本题考查了列表法或树状图法求概率，以及平面镶嵌的知识，概率=所求情况数与总情况数之比，平面镶嵌的条件：各个顶点处内角和恰好为 360° 。

23. (2012·济宁) 如图，抛物线 $y=ax^2+bx-4$ 与 x 轴交于 $A(4, 0)$ 、 $B(-2, 0)$ 两点，与 y 轴交于点 C ，点 P 是线段 AB 上一动点 (端点除外)，过点 P 作 $PD \parallel AC$ ，交 BC 于点 D ，连接 CP 。

- (1) 求该抛物线的解析式；
- (2) 当动点 P 运动到何处时， $BP^2=BD \cdot BC$ ；
- (3) 当 $\triangle PCD$ 的面积最大时，求点 P 的坐标。



考点：二次函数综合题。

专题：压轴题；转化思想。

分析：(1) 该抛物线的解析式中有两个待定系数，只需将点 A 、 B 的坐标代入解析式中求解即可。

(2) 首先设出点 P 的坐标，由 $PD \parallel AC$ 得到 $\triangle BPD \sim \triangle BAC$ ，通过比例线段可表示出 BD 的长； BC 的长易得，根据题干给出的条件 $BP^2=BD \cdot BC$ 即可求出点 P 的坐标。

(3) 由于 $PD \parallel AC$ ，根据相似三角形 $\triangle BPD$ 、 $\triangle BAC$ 的面积比，可表示出 $\triangle BPD$ 的面积；以 BP 为底， OC 为高，易表示出 $\triangle BPC$ 的面积， $\triangle BPC$ 、 $\triangle BPD$ 的面积差为 $\triangle PDC$ 的面积，通过所列

二次函数的性质，即可确定点 P 的坐标。

解答：

$$\text{解：(1) 由题意，得} \begin{cases} 16a+4b-4=0 \\ 4a-2b-4=0 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=-1 \end{cases}$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为 } y=\frac{1}{2}x^2-x-4;$$

(2) 设点 P 运动到点 (x, 0) 时，有 $BP^2=BD \cdot BC$ ，

令 $x=0$ 时，则 $y=-4$ ，

\therefore 点 C 的坐标为 (0, -4)。

$\therefore PD \parallel AC$ ，

$\therefore \triangle BPD \sim \triangle BAC$ ，

$$\therefore \frac{BD}{BC} = \frac{BP}{BA}$$

$$\therefore BC = \sqrt{BC^2 + OC^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$$

$$AB=6, BP=x - (-2) = x+2$$

$$\therefore BD = \frac{BP \times BC}{BA} = \frac{2\sqrt{5}(x+2)}{6} = \frac{\sqrt{5}(x+2)}{3}$$

$\therefore BP^2 = BD \cdot BC$ ，

$$\therefore (x+2)^2 = \frac{\sqrt{5}(x+2)}{3} \times 2\sqrt{5}$$

解得 $x_1 = \frac{4}{3}$ ， $x_2 = -2$ (-2 不合题意，舍去)，

\therefore 点 P 的坐标是 $(\frac{4}{3}, 0)$ ，即当点 P 运动到 $(\frac{4}{3}, 0)$ 时， $BP^2 = BD \cdot BC$ ；

(3) $\therefore \triangle BPD \sim \triangle BAC$ ，

$$\therefore \frac{S_{\triangle BPD}}{S_{\triangle BAC}} = \left(\frac{BP}{AB}\right)^2$$

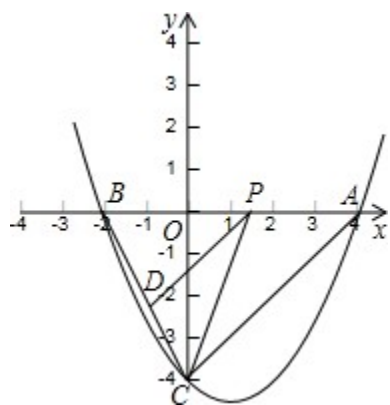
$$\therefore S_{\triangle BPD} = \left(\frac{BP}{AB}\right)^2 \cdot S_{\triangle BAC} = \left(\frac{x+2}{6}\right)^2 \times \frac{1}{2} \times 6 \times 4 = \frac{(x+2)^2}{3}$$

$$S_{\triangle BPC} = \frac{1}{2} \times (x+2) \times 4 - \frac{(x+2)^2}{3} = -\frac{1}{3}(x-1)^2 + 3$$

$$\therefore -\frac{1}{3} < 0$$

\therefore 当 $x=1$ 时， $S_{\triangle BPC}$ 有最大值为 3。

即点 P 的坐标为 (1, 0) 时， $\triangle PDC$ 的面积最大。



点评：该题综合了相似三角形、图形面积的求法等知识，难度系数大，(3)题中，将所求三角形的面积进行适当的转化是解题的关键所在。