2014年湖南省株洲市中考数学试卷

一、选择题（共8小题，每小题3分，满分24分）

1．（3分）（2014年湖南株洲）下列各数中，绝对值最大的是（　　）

A．－3 B．－2 C．0 D．1

考点：　绝对值；有理数大小比较．

分析：　根据绝对值是实数轴上的点到原点的距离，可得答案．

解答：　解：|－3|＞|－2|＞＞|0|，

故选：A．

点评：　本题考查了绝对值，绝对值是实数轴上的点到原点的距离．

2．（3分）（2014年湖南株洲）x取下列各数中的哪个数时，二次根式$\sqrt{x-3}$有意义（

）

A．－2 B．0 C．2 D．4

考点：　二次根式有意义的条件．

分析：　二次根式的被开方数是非负数．

解答：　解：依题意，得

x－3≥0，

解得，x≥3．

观察选项，只有D符合题意．

故选：D．

点评：　考查了二次根式的意义和性质．概念：式子$\sqrt{a}$（a≥0）叫二次根式．性质：二次根式中的被开方数必须是非负数，否则二次根式无意义．

3．（3分）（2014年湖南株洲）下列说法错误的是（　　）

A．必然事件的概率为1

B．数据1、2、2、3的平均数是2

C．数据5、2、－3、0的极差是8

D．如果某种游戏活动的中奖率为40%，那么参加这种活动10次必有4次中奖

考点：　概率的意义；算术平均数；极差；随机事件．

分析：　A．根据必然事件和概率的意义判断即可；

B．根据平均数的秋乏判断即可；

C．求出极差判断即可；

D．根据概率的意义判断即可．

解答：　解：A．概率值反映了事件发生的机会的大小，必然事件是一定发生的事件，所以概率为1，本项正确；

B．数据1、2、2、3的平均数是$\frac{1+2+2+3}{4}$=2，本项正确；

C．这些数据的极差为5－（－3）=8，故本项正确；

D．某种游戏活动的中奖率为40%，属于不确定事件，可能中奖，也可能不中奖，故本说法错误，

故选：D．

点评： 本题主要考查了概率的意义、求算术平均数以及极差的方法，比较简单．

4．（3分）（2014年湖南株洲）已知反比例函数$y=\frac{k}{x}$的图象经过点（2，3），那么下列四个点中，也在这个函数图象上的是（　　）

A．（﹣6，1）　B．（1，6）　C．（2，﹣3）　D．（3，﹣2）

考点： 反比例函数图象上点的坐标特征．

分析： 先根据点（2，3），在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$的图象上求出k的值，再根据k=xy的特点对各选项进行逐一判断．

解答： 解：∵反比例函数$y=\frac{k}{x}$的图象经过点（2，3），

∴k=2×3=6，

A、∵（﹣6）×1=﹣6≠6，∴此点不在反比例函数图象上；

B、∵1×6=6，∴此点在反比例函数图象上；

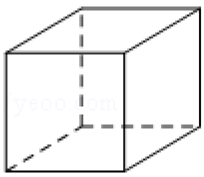
C、∵2×（﹣3）=﹣6≠6，∴此点不在反比例函数图象上；

D、∵3×（﹣2）=﹣6≠6，∴此点不在反比例函数图象上．

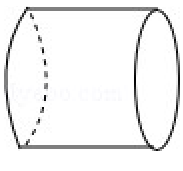
故选B．

点评： 本题考查的是反比例函数图象上点的坐标特点，熟知反比例函数中k=xy的特点是解答此题的关键．

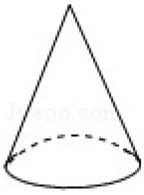
5．（3分）（2014年湖南株洲）下列几何体中，有一个几何体的主视图与俯视图的形状不一样，这个几何体是（　　）



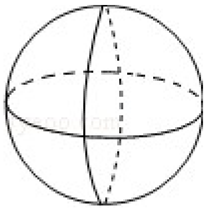
A．正方体



B．圆柱



C．



圆锥 D．

球

考点： 简单几何体的三视图．

分析： 根据从正面看得到的图形是主视图，从上面看得到的图形是俯视图，可得答案．

解答： 解：A、主视图、俯视图都是正方形，故 A 不符合题意；

B、主视图、俯视图都是矩形，故 B 不符合题意；

C、主视图是三角形、俯视图是圆形，故 C 符合题意；

D、主视图、俯视图都是圆，故 D 不符合题意；

故选：C．

点评： 本题考查了简单组合体的三视图，从正面看得到的图形是主视图，从上面看得到的图形是俯视图．

6．（3 分）（2014 年湖南株洲）一元一次不等式组$\begin{cases}2x+1>0\\x-5\leqslant 0\end{cases}$的解集中，整数解的个数是（　　）

A． 4　B． 5　C． 6　D． 7

考点： 一元一次不等式组的整数解．

分析： 先求出不等式的解集，再求出不等式组的解集，找出不等式组的整数解即可．

解答： 解：∵解不等式 $2x+1>0$ 得：$x>-\frac{1}{2}$，

解不等式 $x-5\le 0$ 得：$x\le 5$，

∴不等式组的解集是 $-\frac{1}{2}<x\le 5$，

整数解为 0，1，2，3，4，5，共 6 个，

故选 C．

点评： 本题考查了解一元一次不等式，解一元一次不等式组的应用，解此题的关键是求出不等式组的解集．

7．（3 分）（2014 年湖南株洲）已知四边形 ABCD 是平行四边形，再从① AB=BC，② ∠ABC=90°，③ AC=BD，④ AC⊥BD 四个条件中，选两个作为补充条件后，使得四边形 ABCD 是正方形，现有下列四种选法，其中错误的是（　　）

A． 选①②　B．选②③　C．选①③　D． 选②④

考点： 正方形的判定；平行四边形的性质．

分析： 要判定是正方形，则需能判定它既是菱形又是矩形．

解答： 解：A、由①得有一组邻边相等的平行四边形是菱形，由②得有一个角是直角的平行四边形是矩形，所以平行四边形 ABCD 是正方形，正确，故本选项不符合题意；
B、由②得有一个角是直角的平行四边形是矩形，由③得对角线相等的平行四边形是矩形，所以不能得出平行四边形 ABCD 是正方形，错误，故本选项符合题意；
C、由①得有一组邻边相等的平行四边形是菱形，由③得对角线相等的平行四边形是矩形，所以平行四边形 ABCD 是正方形，正确，故本选项不符合题意；
D、由②得有一个角是直角的平行四边形是矩形，由④得对角线互相垂直的平行四边形是菱形，所以平行四边形 ABCD 是正方形，正确，故本选项不符合题意．
故选 B．
点评： 本题考查了正方形的判定方法：
① 先判定四边形是矩形，再判定这个矩形有一组邻边相等；
② 先判定四边形是菱形，再判定这个矩形有一个角为直角．
③ 还可以先判定四边形是平行四边形，再用 1 或 2 进行判定．

8．（3 分）（2014 年湖南株洲）在平面直角坐标系中，孔明做走棋的游戏，其走法是：棋子从原点出发，第 1 步向右走 1 个单位，第 2 步向右走 2 个单位，第 3 步向上走 1 个单位，第 4 步向右走 1 个单位…依此类推，第 n 步的走法是：当 n 能被 3 整除时，则向上走 1 个单位；当 n 被 3 除，余数为 1 时，则向右走 1 个单位；当 n 被 3 除，余数为 2 时，则向右走 2 个单位，当走完第 100 步时，棋子所处位置的坐标是（　　）

A．（66，34）　B．（67，33）　C．（100，33）　D．（99，34）

考点： 坐标确定位置；规律型：点的坐标．
分析： 根据走法，每 3 步为一个循环组依次循环，且一个循环组内向右 3 个单位，向上 1 个单位，用 100 除以 3，然后根据商和余数的情况确定出所处位置的横坐标与纵坐标即可．
解答： 解：由题意得，每 3 步为一个循环组依次循环，且一个循环组内向右 3 个单位，向上 1 个单位，
∵100÷3=33 余 1，
∴走完第 100 步，为第 34 个循环组的第 1 步，
所处位置的横坐标为 33×3+1=100，
纵坐标为 33×1=33，
∴棋子所处位置的坐标是（100，33）．
故选 C．
点评： 本题考查了坐标确定位置，点的坐标的规律变化，读懂题目信息并理解每 3 步为一个循环组依次循环是解题的关键．

二、填空题（共 8 小题，每小题 3 分，满分 24 分）

9．（3 分）（2014 年湖南株洲）计算：$2m^2\cdot m^8=$__$2m^{10}$__．

考点： 单项式乘单项式．
分析： 先求出结果的系数，再根据同底数幂的乘法进行计算即可．
解答： 解：$2m^2\cdot m^8=2m^{10}$，
故答案为：$2m^{10}$．

点评：　本题考查了单项式乘以单项式，同底数幂的乘法的应用，主要考查学生的计算能力．

10．（3分）（2014年湖南株洲）据教育部统计，参加2014年全国高等学校招生考试的考生约为9390000人，用科学记数法表示9390000是 9.39×10^6 ．

考点：　科学记数法—表示较大的数．

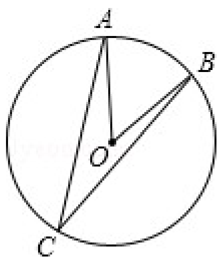
分析：　科学记数法的表示形式为 $a\times10^n$ 的形式，其中 $1\le|a|<10$，n为整数．确定n的值时，要看把原数变成a时，小数点移动了多少位，n的绝对值与小数点移动的位数相同．当原数绝对值>1时，n是正数；当原数的绝对值<1时，n是负数．

解答：　解：将9390000用科学记数法表示为：9.39×10^6．

故答案为：9.39×10^6．

点评：　此题考查科学记数法的表示方法．科学记数法的表示形式为 $a\times10^n$ 的形式，其中 $1\le|a|<10$，n为整数，表示时关键要正确确定a的值以及n的值．

11．（3分）（2014年湖南株洲）如图，点A、B、C都在圆O上，如果∠AOB+∠ACB=84°，那么∠ACB的大小是 28° ．



考点：　圆周角定理．

分析：　根据圆周角定理即可推出∠AOB=2∠ACB，再代入∠AOB+∠ACB=84°通过计算即可得出结果．

解答：　解：∵∠AOB=2∠ACB，∠AOB+∠ACB=84°

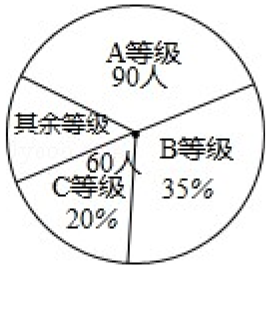
∴3∠ACB=84°

∴∠ACB=28°．

故答案为：28°．

点评：　此题主要考查圆周角定理，关键在于找出两个角之间的关系，利用代换的方法结论．

12．（3分）（2014年湖南株洲）某校根据去年初三学生参加中考的数学成绩的等级，绘制成如图的扇形统计图，则图中表示A等级的扇形的圆心角的大小为 108° ．



考点： 扇形统计图．
分析： 根据C等级的人数与所占的百分比计算出参加中考的人数，再求出A等级所占的百分比，然后乘以360°计算即可得解．
解答： 解：参加中考的人数为：60÷20%=300人，

A等级所占的百分比为：$\frac{90}{300}$×100%=30%，

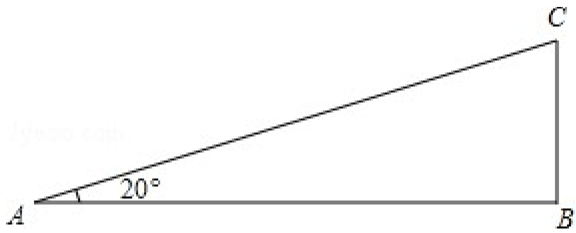
所以，表示A等级的扇形的圆心角的大小为360°×30%=108°．
故答案为：108°．
点评： 本题考查扇形统计图及相关计算．在扇形统计图中，每部分占总部分的百分比等于该部分所对应的扇形圆心角的度数与360°的比．

13．（3分）（2014年湖南株洲）孔明同学在距某电视塔塔底水平距离500米处，看塔顶的仰角为20°（不考虑身高因素），则此塔高约为 182 米（结果保留整数，参考数据：sin20°≈0.3420，sin70°≈0.9397，tan20°≈0.3640，tan70°≈2.7475）．

考点： 解直角三角形的应用-仰角俯角问题．
分析： 作出图形，可得AB=500米，∠A=20°，在Rt△ABC中，利用三角函数即可求得BC的长度．
解答： 解：在Rt△ABC中，
AB=500米，∠BAC=20°，

∵$\frac{BC}{AB}$=tan20°，

∴BC=ACtan20°=500×0.3640=182（米）．
故答案为：182．



点评： 本题考查了解直角三角形的应用，关键是根据仰角构造直角三角形，利用三角函数求解．

14．（3分）（2014年湖南株洲）分解因式：$x^2+3x(x-3)-9$= $(x-3)(4x+3)$ ．

考点： 因式分解-十字相乘法等．
分析： 首先将首尾两项分解因式，进而提取公因式合并同类项得出即可．
解答： 解：$x^2+3x(x-3)-9$
$=x^2-9+3x(x-3)$
$=(x-3)(x+3)+3x(x-3)$
$=(x-3)(x+3+3x)$
$=(x-3)(4x+3)$．
故答案为：$(x-3)(4x+3)$．

点评： 此题主要考查了分组分解法分解因式，正确分组得出是解题关键．

15．（3分）（2014年湖南株洲）直线$y=k_1x+b_1$（$k_1>0$）与$y=k_2x+b_2$（$k_2<0$）相交于点（﹣2，0），且两直线与 y轴围城的三角形面积为4，那么b_1-b_2等于__4__．

考点： 两条直线相交或平行问题．

分析： 根据解析式求得与坐标轴的交点，从而求得三角形的边长，然后依据三角形的面积公式即可求得．

解答： 解：如图，直线$y=k_1x+b_1$（$k_1>0$）与y轴交于B点，则$OB=b_1$，直线$y=k_2x+b_2$（$k_2<0$）与y轴交于C，则$OC=-b_2$，

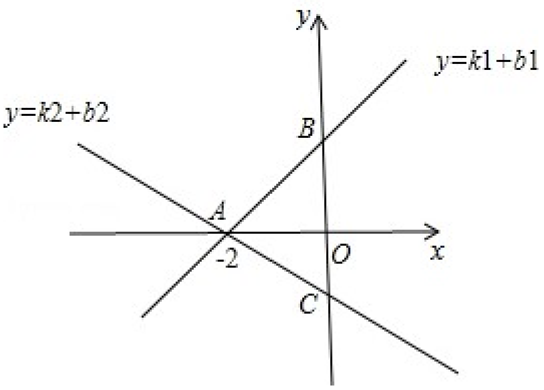
∵△ABC的面积为4，

$\therefore \frac{1}{2}OA\bullet OB+\frac{1}{2}OA\bullet OC=4$，

$\therefore \frac{1}{2}\times 2\bullet b_1+\frac{1}{2}\times 2\bullet (-b_2)=4$，

解得：$b_1-b_2=4$．

故答案为4．



点评： 本题考查了一次函数与坐标轴的交点以及数形结合思想的应用．解决此类问题关键是仔细观察图形，注意几个关键点（交点、原点等），做到数形结合．

16．（3分）（2014年湖南株洲）如果函数$y=(a-1)x^2+3x+\frac{a+5}{a-1}$的图象经过平面直角坐标系的四个象限，那么a的取值范围是__$a<-5$__．

考点： 抛物线与x轴的交点．

分析： 函数图象经过四个象限，需满足3个条件：

（I）函数是二次函数；

（II）二次函数与x轴有两个交点；

（III）二次函数与y轴的正半轴相交．

解答： 解：函数图象经过四个象限，需满足3个条件：

（I）函数是二次函数．因此$a-1\neq 0$，即$a\neq 1$①

（II）二次函数与x轴有两个交点．因此△=9﹣4（a﹣1）$\frac{a+5}{a-1}$=﹣4a﹣11＞0，解得a＜﹣$\frac{11}{4}$②

（III）二次函数与y轴的正半轴相交．因此$\frac{a+5}{a-1}$＞0，解得a＞1或a＜﹣5③

综合①②③式，可得：a＜﹣5．

故答案为：a＜﹣5．

点评：　本题考查二次函数的图象与性质、二次函数与x轴的交点、二次函数与y轴交点等知识点，解题关键是确定"函数图象经过四个象限"所满足的条件．

三、解答题（共8小题，满分52分）

17．（4分）（2014年湖南株洲）计算：$\sqrt{16}$+（π﹣3）^{0}﹣tan45°．

考点：　实数的运算；零指数幂；特殊角的三角函数值．

专题：　计算题．

分析：　原式第一项利用平方根定义化简，第二项利用零指数幂法则计算，最后一项利用特殊角的三角函数值计算即可得到结果．

解答：　解：原式=4+1﹣1=4．

点评：　此题考查了实数的运算，熟练掌握运算法则是解本题的关键．

18．（4分）（2014年湖南株洲）先化简，再求值：$\frac{4}{x-1}$•$\frac{x^{2}-1}{2}$﹣3（x﹣1），其中x=2．

考点：　分式的化简求值．

专题：　计算题．

分析：　原式第一项约分，去括号合并得到最简结果，将x的值代入计算即可求出值．

解答：　解：原式=$\frac{4}{x-1}$•$\frac{(x+1)(x-1)}{2}$﹣3x+3

=2x+2﹣3x+3

=5﹣x，

当x=2时，原式=5﹣2=3．

点评：　此题考查了分式的化简求值，熟练掌握运算法则是解本题的关键．

19．（6分）（2014年湖南株洲）我市通过网络投票选出了一批"最有孝心的美少年"．根据各县市区的入选结果制作出如下统计表，后来发现，统计表中前三行的所有数据都是正确的，后三行中有一个数据是错误的．请回答下列问题：

（1）统计表中a=<u>　0.1　</u>，b=<u>　6　</u>；

（2）统计表后三行中哪一个数据是错误的？该数据的正确值是多少？

（3）株洲市决定从来自炎陵县的4位"最有孝心的美少年"中，任选两位作为市级形象代言人．A、B是炎陵县"最有孝心的美少年"中的两位，问A、B同时入选的概率是多少？

区域　　　　频数　　　频率

炎陵县	4	a
茶陵县	5	0.125
攸县	b	0.15
醴陵市	8	0.2
株洲县	5	0.125
株洲市城区	12	0.25

考点： 频数（率）分布表；列表法与树状图法．

分析： （1）由茶陵县频数为5，频率为0.125，求出数据总数，再用4除以数据总数求出a的值，用数据总数乘0.15得到b的值；

（2）根据各组频数之和等于数据总数可知各组频数正确，根据频率=频数÷数据总数可知株洲市城区对应频率错误，进而求出正确值；

（3）设来自炎陵县的4位"最有孝心的美少年"为A、B、C、D，根据题意列出表格，然后由表格求得所有等可能的结果与A、B同时入选的情况，再利用概率公式即可求得答案．

解答： 解：（1）∵茶陵县频数为5，频率为0.125，

∴数据总数为5÷0.125=40，

∴a=4÷40=0.1，b=40×0.15=6．

故答案为0.1，6；

（2）∵4+5+6+8+5+12=40，

∴各组频数正确，

∵12÷40=0.3≠0.25，

∴株洲市城区对应频率0.25这个数据是错误的，该数据的正确值是0.3；

（3）设来自炎陵县的4位"最有孝心的美少年"为A、B、C、D，列表如下：

	A	B	C	D
A		BA	CA	DA
B	AB		CB	DB
C	AC	BC		DC
D	AD	BD	CD	

∵共有12种等可能的结果，A、B同时入选的有2种情况，

∴A、B同时入选的概率是：$\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$．

点评： 本题考查读频数（率）分布表的能力和列表法与树状图法．同时考查了概率公式．用到的知识点：频率=频数÷总数，各组频数之和等于数据总数，概率=所求情况数与总情况数之比．

20．（6分）（2014年湖南株洲）家住山脚下的孔明同学想从家出发登山游玩，据以往的经验，他获得如下信息：

（1）他下山时的速度比上山时的速度每小时快1千米；

（2）他上山2小时到达的位置，离山顶还有1千米；

（3）抄近路下山，下山路程比上山路程近2千米；

（4）下山用1个小时；

根据上面信息，他作出如下计划：
（1）在山顶游览1个小时；
（2）中午12：00回到家吃中餐．
若依据以上信息和计划登山游玩，请问：孔明同学应该在什么时间从家出发？

考点： 一元一次方程的应用．
分析： 由（1）得 $v_{下}=（v_{上}+1）$千米/小时．
由（2）得 $S=2v_{上}+1$
由（3）、（4）得 $2v_{上}+1=v_{下}+2$．
根据S=vt求得计划上、下山的时间，然后可以得到共需的时间为：上、下上时间+山顶游览时间．
解答： 解：设上山的速度为v，下山的速度为（v+1），则
2v+1=v+1+2，
解得v=2．
即上山速度是2千米/小时．
则下山的速度是3千米/小时，山高为5千米．
则计划上山的时间为：5÷2=2.5（小时），
计划下山的时间为：1小时，
则共用时间为：2.5+1+1=4.5（小时），
所以出发时间为：12：00﹣4小时30分钟=7：30．
答：孔明同学应该在7点30分从家出发．
点评： 本题考查了应用题．该题的信息量很大，是不常见的应用题．需要进行相关的信息整理，只有理清了它们的关系，才能正确解题．

21．（6分）（2014年湖南株洲）已知关于x的一元二次方程（a+c）x^2+2bx+（a﹣c）=0，其中a、b、c分别为△ABC三边的长．
（1）如果x=﹣1是方程的根，试判断△ABC的形状，并说明理由；
（2）如果方程有两个相等的实数根，试判断△ABC的形状，并说明理由；
（3）如果△ABC是等边三角形，试求这个一元二次方程的根．

考点： 一元二次方程的应用．
分析： （1）直接将x=﹣1代入得出关于a，b的等式，进而得出a=b，即可判断△ABC的形状；
（2）利用根的判别式进而得出关于a，b，c的等式，进而判断△ABC的形状；
（3）利用△ABC是等边三角形，则a=b=c，进而代入方程求出即可．
解答： 解：（1）△ABC是等腰三角形；
理由：∵x=﹣1是方程的根，
∴（a+c）×（﹣1）^{2}﹣2b+（a﹣c）=0，
∴a+c﹣2b+a﹣c=0，
∴a﹣b=0，
∴a=b，
∴△ABC是等腰三角形；

（2）∵方程有两个相等的实数根，

∴（2b）^{2}－4（a+c）（a－c）=0，

∴$4b^2-4a^2+4c^2=0$，

∴$a^2=b^2+c^2$，

∴△ABC 是直角三角形；

（3）当△ABC 是等边三角形，∴（a+c）x^2+2bx+（a－c）=0，可整理为：

$2ax^2+2ax=0$，

∴$x^2+x=0$，

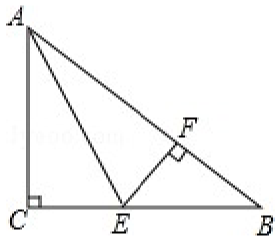
解得：$x_1=0$，$x_2=-1$．

点评：　此题主要考查了一元二次方程的应用以及根的判别式和勾股定理逆定理等知识，正确由已知获取等量关系是解题关键．

22．（8分）（2014年湖南株洲）如图，在Rt△ABC中，∠C=90°，∠A 的平分线交 BC 于点 E，EF⊥AB 于点 F，点 F 恰好是 AB 的一个三等分点（AF＞BF）．

（1）求证：△ACE≌△AFE；

（2）求 tan∠CAE 的值．



考点：　全等三角形的判定与性质；角平分线的性质；勾股定理；锐角三角函数的定义．

分析：　（1）根据角的平分线的性质可求得 CE=EF，然后根据直角三角形的判定定理求得三角形全等．

（2）由△ACE≌△AFE，得出 AC=AF，CE=EF，设 BF=m，则 AC=2m，AF=2m，AB=3m，根据勾股定理可求得，tan∠B=$\frac{AC}{BC}=\frac{2}{\sqrt{5}}$，CE=EF=$\frac{2m}{\sqrt{5}}$，在 RT△ACE 中，tan∠CAE=$\frac{CE}{AC}=\frac{\frac{2m}{\sqrt{5}}}{2m}=\frac{\sqrt{5}}{5}$；

解答：　（1）证明：∵AE 是∠BAC 的平分线，EC⊥AC，EF⊥AF，

∴CE=EF，

在 Rt△ACE 与 Rt△AFE 中，

$\begin{cases}CE=EF\\AE=AE\end{cases}$，

∴Rt△ACE≌Rt△AFE（HL）；

（2）解：由（1）可知△ACE≌△AFE，

∴AC=AF，CE=EF，

设 BF=m，则 AC=2m，AF=2m，AB=3m，

∴BC=$\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{9m^2-4m^2}=\sqrt{5}$m，

∴在 RT△ABC 中，tan∠B=$\frac{AC}{BC}$=$\frac{2m}{\sqrt{5}\pi}$=$\frac{2}{\sqrt{5}}$，

在 RT△EFB 中，EF=BF•tan∠B=$\frac{2m}{\sqrt{5}}$，

∴CE=EF=$\frac{2\pi}{\sqrt{5}}$，

在 RT△ACE 中，tan∠CAE=$\frac{CE}{AC}$=$\frac{\frac{2m}{\sqrt{5}}}{2m}$=$\frac{\sqrt{5}}{5}$；

∴tan∠CAE=$\frac{\sqrt{5}}{5}$．

点评：　本题考查了直角三角形的判定、性质和利用三角函数解直角三角形，根据已知条件表示出线段的值是解本题的关键．

23．（8分）（2014年湖南株洲）如图，PQ为圆O的直径，点B在线段PQ的延长线上，OQ=QB=1，动点A在圆O的上半圆运动（含P、Q两点），以线段AB为边向上作等边三角形ABC．

（1）当线段AB所在的直线与圆O相切时，求△ABC的面积（图1）；

（2）设∠AOB=α，当线段AB、与圆O只有一个公共点（即A点）时，求α的范围（图2，直接写出答案）；

（3）当线段AB与圆O有两个公共点A、M时，如果AO⊥PM于点N，求CM的长度（图3）．

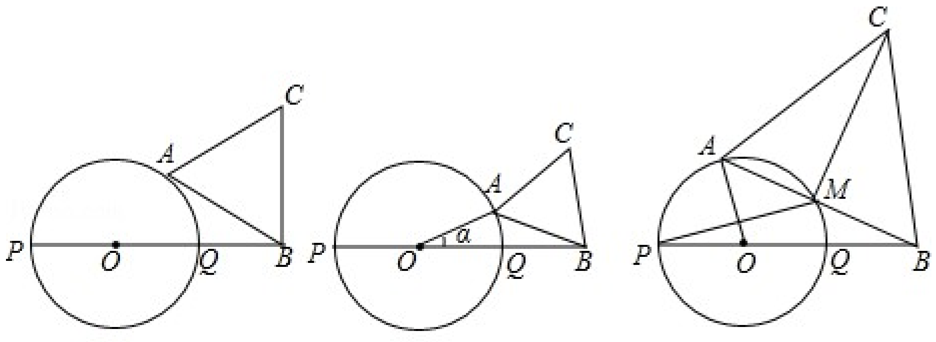


图1　　图2　　图3

考点：　圆的综合题；等边三角形的性质；勾股定理；切线的性质；相似三角形的判定与性质；特殊角的三角函数值．

专题：　综合题；动点型．

分析：　（1）连接OA，如下图1，根据条件可求出AB，然后AC的高BH，求出BH就可以求出△ABC的面积．

（2）如下图2，首先考虑临界位置：当点A与点Q重合时，线段AB与圆O只有一个公共点，此时α=0°；当线段AB所在的直线与圆O相切时，线段AB与圆O只有一个公共点，此时α=60°．从而定出α的范围．

（3）设AO与PM的交点为D，连接MQ，如下图3，易证AO∥MQ，从而得到△PDO∽△PMQ，△BMQ∽△BAO，又PO=OQ=BQ，从而可以求出MQ、OD，进而求出PD、DM、AM、CM的值．

解答： 解：（1）连接 OA，过点 B 作 BH⊥AC，垂足为 H，如图 1 所示．
∵AB 与⊙O 相切于点 A，
∴OA⊥AB．
∴∠OAB=90°．
∵OQ=QB=1，
∴OA=1．
∴$AB=\sqrt{OB^2-OA^2}$
$=\sqrt{2^2-1^2}$
$=\sqrt{3}$．
∵△ABC 是等边三角形，
∴$AC=AB=\sqrt{3}$，∠CAB=60°．
∵$\sin\angle HAB=\frac{HB}{AB}$，
∴HB=AB•sin∠HAB
$=\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$
$=\frac{3}{2}$．
∴$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BH$
$=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\frac{3}{2}$
$=\frac{3\sqrt{3}}{4}$．
∴△ABC 的面积为$\frac{3\sqrt{3}}{4}$．

（2）①当点 A 与点 Q 重合时，
线段 AB 与圆 O 只有一个公共点，此时 α=0°；
② 当线段 A_1B 所在的直线与圆 O 相切时，如图 2 所示，
线段 A_1B 与圆 O 只有一个公共点，
此时 $OA_1\perp BA_1$，$OA_1=1$，OB=2，
∴$\cos\angle A_1OB=\frac{A_1O}{OB}=\frac{1}{2}$．
∴$\angle A_1OB=60°$．
∴当线段 AB 与圆 O 只有一个公共点（即 A 点）时，
α 的范围为：0°≤α≤60°．

（3）连接 MQ，如图 3 所示．
∵PQ 是⊙O 的直径，
∴∠PMQ=90°．
∵OA⊥PM，

$\therefore \angle PDO=90°$．

$\therefore \angle PDO=\angle PMQ$．

$\therefore \triangle PDO \backsim \triangle PMQ$．

$\therefore \frac{PD}{PM}=\frac{DO}{MQ}=\frac{PO}{PQ}$

$\because PO=OQ=\frac{1}{2}PQ$．

$\therefore PD=\frac{1}{2}PM$，$OD=\frac{1}{2}MQ$．

同理：$MQ=\frac{1}{2}AO$，$BM=\frac{1}{2}AB$．

$\because AO=1$，

$\therefore MQ=\frac{1}{2}$．

$\therefore OD=\frac{1}{4}$．

$\because \angle PDO=90°$，$PO=1$，$OD=\frac{1}{4}$，

$\therefore PD=\frac{\sqrt{15}}{4}$．

$\therefore PM=\frac{\sqrt{15}}{2}$．

$\therefore DM=\frac{\sqrt{15}}{4}$．

$\because \angle ADM=90°$，$AD=A0-OD=\frac{3}{4}$，

$\therefore AM=\sqrt{AD^2+DM^2}$

$=\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2}$

$=\frac{\sqrt{6}}{2}$．

$\because \triangle ABC$是等边三角形，

$\therefore AC=AB=BC$，$\angle CAB=60°$．

$\because BM=\frac{1}{2}AB$，

$\therefore AM=BM$．

$\therefore CM\perp AB$．

$\because AM=\frac{\sqrt{6}}{2}$，

$\therefore BM=\frac{\sqrt{6}}{2}$，$AB=\sqrt{6}$．

$\therefore AC=\sqrt{6}$．

$\therefore CM=\sqrt{AC^2-AM^2}$

$=\sqrt{(\sqrt{6})^2-(\frac{\sqrt{6}}{2})^2}$

$=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

$\therefore$CM 的长度为$\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

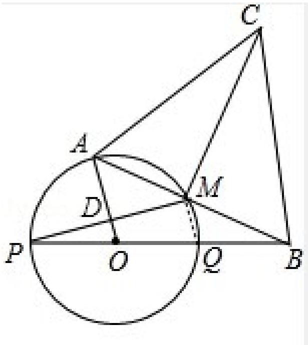


图3

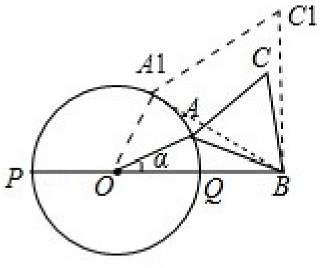


图2

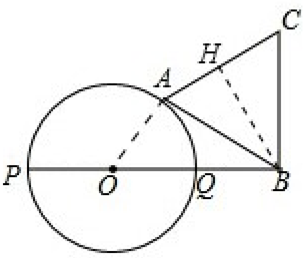


图1

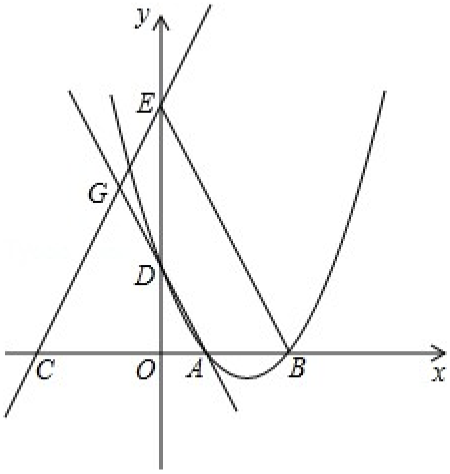
点评： 本题考查了等边三角形的性质、相似三角形的性质与判定、直线与圆相切、勾股定理、特殊三角函数值等知识，考查了用临界值法求角的取值范围，综合性较强．

24．（10 分）（2014 年湖南株洲）已知抛物线 $y=x^2-(k+2)x+\frac{5k+2}{4}$和直线 $y=(k+1)x+(k+1)^2$．

（1）求证：无论 k 取何实数值，抛物线总与 x 轴有两个不同的交点；

（2）抛物线于 x 轴交于点 A、B，直线与 x 轴交于点 C，设 A、B、C 三点的横坐标分别是 x_1、x_2、x_3，求 $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$ 的最大值；

（3）如果抛物线与 x 轴的交点 A、B 在原点的右边，直线与 x 轴的交点 C 在原点的左边，又抛物线、直线分别交 y 轴于点 D、E，直线 AD 交直线 CE 于点 G（如图），且 CA•GE=CG•AB，求抛物线的解析式．



考点： 二次函数综合题．

分析： （1）由判别式△=（k+2）^{2}－4×1×$\frac{5k+2}{4}$=k^2－k+2=（k－$\frac{1}{2}$）^{2}+$\frac{7}{4}$＞0，即可证得无论 k 取何实数值，抛物线总与 x 轴有两个不同的交点；

（2）由抛物线于 x 轴交于点 A、B，直线与 x 轴交于点 C，设 A、B、C 三点的横坐标分别是 x_1、x_2、x_3，可得 x_1•x_2=$\frac{5k+2}{4}$，x_3=－（k+1），继而可求得答案；

（3）由 CA•GE=CG•AB，易得△CAG∽△CBE，继而可证得△OAD∽△OBE，则可得 $\frac{OA}{OB}$=$\frac{OD}{OE}$，又由抛物线与 x 轴的交点 A、B 在原点的右边，直线与 x 轴的交点 C 在原点的左边，又抛物线、直线分别交 y 轴于点 D、E，可得 OA•OB=$\frac{5k+2}{4}$，OD=$\frac{5k+2}{4}$，OE=（k+1）^{2}，继而求得点 B 的坐标为（0，k+1），代入解析式即可求得答案．

解答： （1）证明：∵△=（k+2）^{2}－4×1×$\frac{5k+2}{4}$=k^2－k+2=（k－$\frac{1}{2}$）^{2}+$\frac{7}{4}$，

∵（k－$\frac{1}{2}$）^{2}≥0，

∴△＞0，

∴无论 k 取何实数值，抛物线总与 x 轴有两个不同的交点；

（2）解：∵抛物线于 x 轴交于点 A、B，直线与 x 轴交于点 C，设 A、B、C 三点的横坐标分别是 x_1、x_2、x_3，

∴x_1•x_2=$\frac{5k+2}{4}$，

令 0=（k+1）x+（k+1）^{2}，

解得：x=－（k+1），

即 x_3=－（k+1），

$\therefore x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -(k+1) \cdot \frac{5k+2}{4} = -\frac{5}{4}(k+\frac{7}{10})^2 + \frac{9}{80}$,

$\therefore x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$的最大值为：$\frac{9}{80}$；

（3）解：$\because CA \cdot GE = CG \cdot AB$，

$\therefore \frac{CA}{CB} = \frac{CG}{CE}$，

$\because \angle ACG = \angle BCE$，

$\therefore \triangle CAG \backsim \triangle CBE$，

$\therefore \angle CAG = \angle CBE$，

$\because \angle AOD = \angle BOE$，

$\therefore \triangle OAD \backsim \triangle OBE$，

$\therefore \frac{OA}{OB} = \frac{OD}{OE}$，

$\because$抛物线与x轴的交点A、B在原点的右边，直线与x轴的交点C在原点的左边，又抛物线、直线分别交y轴于点D、E，

$\therefore OA \cdot OB = \frac{5k+2}{4}$，$OD = \frac{5k+2}{4}$，$OE = (k+1)^2$，

$\therefore OA \cdot OB = OD$，

$\therefore \frac{OA}{OB} = \frac{OA \cdot OB}{OE}$，

$\therefore OB^2 = OE$，

$\therefore OB = k+1$，

$\therefore$点B（k+1，0），

将点B代入抛物线$y = x^2 - (k+2)x + \frac{5k+2}{4}$得：$(k+1)^2 - (k+2)(k+1) - \frac{5k+2}{4} = 0$，

解得：k=2，

$\therefore$抛物线的解析式为：$y = x^2 - 4x + 3$．

点评：　此题属于二次函数的综合题，综合性很强，难度较大，主要考查了一次函数与二次函数的性质、待定系数法求函数的解析式以及相似三角形的判定与性质．注意掌握数形结合思想与方程思想的应用．