考点跟踪训练45　方程型综合问题

一、选择题

1．已知有10包相同数量的饼干，若将其中1包饼干平分给23名学生，最少剩3片．若将此10包饼干平分给23名学生，则最少剩多少片？(　　)

A. 0　B. 3　C. 7　D．10

答案　C

解析　设这包饼干有 y 片，则 $y>23x+3$(x 是大于0的整数)，而 $10y=230x+30$，因而 $=10x+\ =10x+1+$ ，考虑余数，故最少剩7片．

2．一元二次方程 $x^2+x+2=0$ 的根的情况是(　　)

A．有两个不相等的正根　B．有两个不相等的负根

C．没有实数根　　D．有两个相等的实数根

答案　C

解析　由 $x^2+x+2=0$，得 $x^2+x+\ =-$ ，所以 $^2=-$ ，方程没有实数根．

3．(2010·攀枝花)下列关于 x 的一元二次方程中，有两个不相等的实数根的方程是(　　)

A．$x^2+1=0$　　B．$9x^2-6x+1=0$

C．$x^2-x+2=0$　　D．$x^2-2x-1=0$

答案　D

解析　$x^2-2x-1=0$，$x^2-2x+1=2$，$(x-1)^2=2$，$x_1=1+$ ，$x_2=1-$.

4．(2010·莆田)在某次聚会上，每两人都握了一次手，所有人共握手10次，设有 x 人参加这次聚会，则列出方程正确的是(　　)

A．$x(x-1)=10$　　B. $=10$

C．$x(x+1)=10$　　D. $=10$

答案　B

解析　设有 x 人参加聚会，则每个人需握手 $(x-1)$ 次，所以 $=10$.

5．设 a、b 是方程 $x^2+x-2009=0$ 的两个实数根，则 a^2+2a+b 的值为(　　)

A．2006　B．2007　C．2008　D．2009

答案　C

解析　根据题意，有 $a^2+a-2009=0$，$a^2+a=2009$；又 $a+b=-1$，所以 $a^2+2a+b=2008$.

二、填空题

6．一家商店将某件商品按成本价提高50%后，标价为450元，又以8折出售，则售出这件商品可获利润______元．

答案　60

解析　$450\times0.8-450\div(1+50\%)=360-300=60$.

7．(2009·牡丹江)五一期间，百货大楼推出全场打八折的优惠活动，持贵宾卡可在八折基础上继续打折，小明妈妈持贵宾卡买了标价为10000元的商品，共节省2800元，则用贵宾卡又享受了________折优惠．

答案　九

解析　设贵宾卡又享受 x 折优惠，则有 $10000\times0.8\times\ =10000-2800$，$800x=7200$，$x=9$.

8．(2011·铜仁)当 k________时，关于 x 的一元二次方程 $x^2+6kx+3k^3+6=0$ 有两个相等的实数根．

答案　±1

解析　当 $(6k)^2-4\times1\times(3k^2+6)=0$ 时，方程有两个相等的实数根，解这个方程，得 $k=\pm1$.

9．(2011·苏州)已知 a、b 是一元二次方程 $x^2-2x-1=0$ 的两个实数根，则代数式 $+ab$ 的值等于________．

答案　-1

解析　由根与系数的关系得 $a+b=2$，$ab=-1$，所以 $(a-b)(a+b-2)+ab=(a-b)\times0+(-1)=-1$.

10．(2009·江苏)某县2008年农民人均年收入为7800元，计划到2010年，农民人均年收入达到9100元．设人均年收入的平均增长率为 x，则可列方程__________．

答案　$7800(1+x)^2=9100$

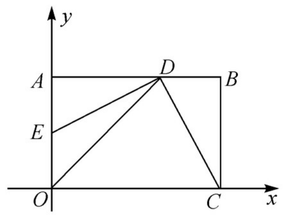
三、解答题

11．已知：如图，在平面直角坐标系 xOy 中，矩形 $OABC$ 的边 OA 在 y 轴的正半轴上，OC 在 x 轴的正半轴上，$OA=2$，$OC=3$.过原点 O 作∠AOC 的平分线交 AB 于点 D，连接 DC，过点 D 作 $DE\perp DC$，交 OA 于点 E.

(1)求过点 E、D、C 的抛物线的解析式；

(2)将∠EDC 绕点 D 按顺时针方向旋转后，角的一边与 y 轴的正半轴交于点 F，另一边与线段 OC 交于点 G.如果 DF 与(1)中的抛物线交于另一点 M，点 M 的横坐标为，那么 $EF=2GO$ 是否成立？若成立，请给予证明；若不成立，请说明理由；

(3)对于(2)中的点 G，在位于第一象限内的该抛物线上是否存在点 Q，使得直线 GQ 与 AB 的交点 P 与点 C、G 构成的△PCG 是等腰三角形？若存在，请求出点 Q 的坐标；若不存在，请说明理由．



解　(1)由已知，得 $C(3,0)$，$D(2,2)$，

∵$\angle ADE=90°-\angle CDB=\angle BCD$，

又$\angle AOD=\angle COD=\angle ADO$，

∴$AD=AO=BC=2$.

又$\angle DAE=\angle B=90°$，

∴$\triangle ADE\cong\triangle BCD$，

∴$AE=BD=1$，∴$OE=1$，

∴$E(0,1)$．

设过点 E、D、C 的抛物线的解析式为

$y=ax^2+bx+c(a\neq0)$．

将点 E 的坐标代入，得 $c=1$.

将 $c=1$ 和点 D、C 的坐标分别代入，

得解得

故抛物线的解析式为 $y=-x^2+x+1$.

(2)$EF=2GO$ 成立，证明如下：

∵点 M 在该抛物线上，且它的横坐标为，

∴点 M 的纵坐标为.

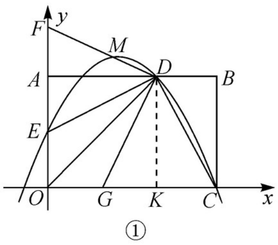
设 DM 的解析式为 $y=kx+b_1(k\neq0)$，将点 D、M 的坐标分别代入，

得解得

∴DM 的解析式为 $y=-x+3$.

∴$F(0,3)$，$EF=2$.

如图①，过点 D 作 $DK\perp OC$ 于点 K，则 $DA=DK$.



①

∵$\angle ADK=\angle FDG=90°$，∴$\angle FDA=\angle GDK$.

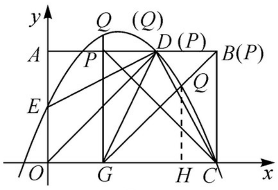
又∵$\angle FAD=\angle GKD=90°$，∴$\triangle DAF\cong\triangle DKG$.

∴$KG=AF=1$.∴$GO=1$.∴$EF=2GO$.

(3)∵点 P 在 AB 上，$G(1,0)$，$C(3,0)$，设 $P(t,2)$．

∴$PG^2=(t-1)^2+2^2$，$PC^2=(3-t)^2+2^2$，$GC=2$.

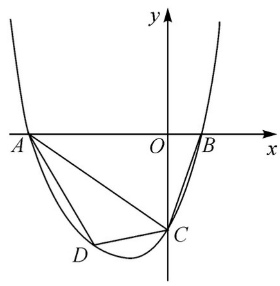
① 若 $PG=PC$，则$(t-1)^2+2^2=(3-t)^2+2^2$，
解得 $t=2$.
∴$P(2,2)$，此时点 Q 与点 P 重合，∴$Q(2,2)$．
② 若 $PG=GC$，则$(t-1)^2+2^2=2^2$，解得 $t=1$，
∴$P(1,2)$，此时 $GP\perp x$ 轴．GP 与该抛物线在第一象限内的交点 Q 的横坐标为 1，
∴点 Q 的纵坐标为.∴Q.
③ 若 $PC=GC$，则$(3-t)^2+2^2=2^2$，
解得 $t=3$，
∴$P(3,2)$，此时 $PC=GC=2$，△PCG 是等腰直角三角形．
如图②，过点 Q 作 $QH\perp x$ 轴于点 H，则 $QH=GH$，设 $QH=h$，
∴$Q(h+1，h)$．

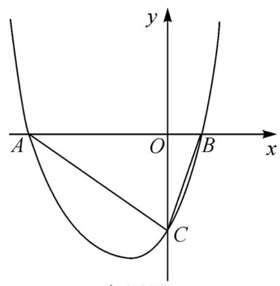


②

∴$-(h+1)^2+(h+1)+1=h$.
解得 $h_1=$ ，$h_2=-2$(舍去)．∴Q.
综上所述，存在三个满足条件的点 Q，即 $Q_1(2,2)$或 Q_2 或 Q_3.

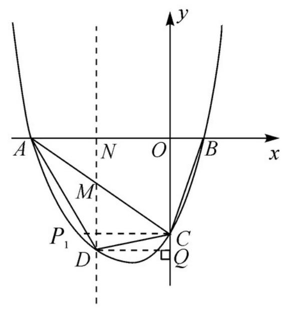
12．已知，如图抛物线 $y=ax^2+3ax+c(a>0)$与 y 轴交于 C 点，与 x 轴交于 A、B 两点，A 点在 B 点左侧．点 B 的坐标为$(1,0)$，$OC=3OB$.
(1)求抛物线的解析式；
(2)若点 D 是线段 AC 下方抛物线上的动点，求四边形 $ABCD$ 的面积的最大值；
(3)若点 E 在 x 轴上，点 P 在抛物线上，是否存在以 A、C、E、P 为顶点且以 AC 为一边的平行四边形？若存在，求点 P 的坐标；若不存在，请说明理由．





备用图

解　(1)∵对称轴 $x=-=-$，
又∵$OC=3OB=3$，$a>0$，∴$C(0，-3)$．
把 $B(1,0)$、$C(0，-3)$代入 $y=ax^2+3ax+c$ 得
　解得 $a=$ ，$c=-3$.
∴$y=x^2+x-3$
(2)过点 D 作 $DM\parallel y$ 轴分别交线段 AC 和 x 轴于点 M、N.
∴$S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACD}=+\cdot DM\cdot(AN+ON)=+2DM$.
∵$A(-4,0)$，$C(0，-3)$，
设直线 AC 的解析式为 $y=kx+b$，
代入求得：$y=-x-3$，
令 D，M，
则 $DM=-x-3-$
$=-(x+2)^2+3$.
当 $x=-2$ 时，DM 有最大值 3，此时四边形 $ABCD$ 面积有最大值.
(3)如图①所示，讨论：①过点 C 作 $CP_1\parallel x$ 轴交抛物线于点 P_1，过点 P_1 作 $P_1E_1\parallel AC$ 交 x 轴于点 E_1，此时四边形 ACP_1E_1 为平行四边形，



①

∵$C(0，-3)$，令 $x^2+x-3=-3$ 得

$x_1=0$，$x_2=-3$，

∴$CP_1=3$.∴$P_1(-3，-3)$．

② 如图②，平移直线 AC 交 x 轴于点 E，交 x 轴上方的抛物线于点 P，当 $AC=PE$ 时，四边形 $ACEP$ 为平行四边形，

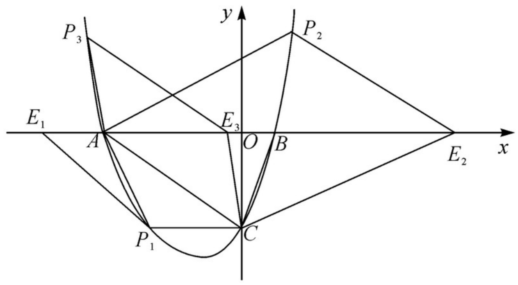
∵$C(0，-3)$，

∴可令 $P(x,3)$，由 $x^2+x-3=3$ 得：

$x^2+3x-8=0$，

解得 $x_1=$或 $x_2=$ ，

此时存在点 P_2 和 P_3.



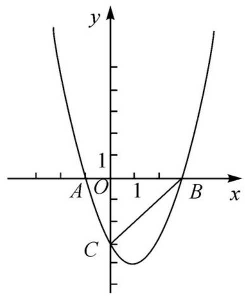
综上所述，存在 3 个点符合题意，坐标分别是 $P_1(-3，-3)$，P_2，P_3.

13．(2011·北京)在平面直角坐标系 xOy 中，二次函数 $y=mx^2+(m-3)x-3(m>0)$的图象与 x 轴交于 A、B 两点(点 A 在点 B 的左侧)，与 y 轴交于点 C.

(1)求点 A 的坐标；

(2)当$\angle ABC=45°$时，求 m 的值；

(3)已知一次函数 $y=kx+b$，点 $P(n,0)$是 x 轴上的一个动点，在(2)的条件下，过点 P 垂直于 x 轴的直线交这个一次函数的图象于点 M，交二次函数的图象于 N.若只有当 $-2<n<2$ 时，点 M 位于点 N 的上方，求这个一次函数的解析式．



解　(1)∵ 点 A、B 是二次函数 $y=mx^2+(m-3)x-3\ (m>0)$的图象与 x 轴的交点，

∴ 令 $y=0$，即 $mx^2+(m-3)x-3=0$，解得 $x_1=-1, x_2=$.又∵ 点 A 在点 B 左侧且 $m>0$，

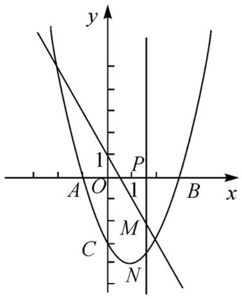
∴ 点 A 的坐标为$(-1,0)$．

(2)由(1)可知点 B 的坐标为(，0)．

∵ 二次函数的图象与 y 轴交于点 C，

∴点 C 的坐标为(0，－3)．

∵$\angle ABC=45°$，∴．$=3$，∴$m=1$.



(3)由(2)得，二次函数解析式为 $y=x^2-2x-3$.依题意并结合图象可知，一次函数的图象与二次函数的图象交点的横坐标分别为－2 和 2，由此可得交点坐标为(－2,5)和(2，－3)．

将交点坐标分别代入一次函数解析式 $y=kx+b$ 中，

得解得

∴一次函数的解析式为 $y=-2x+1$.