

一元二次方程

【课标要求】

考 点	课标要求	知识与技能目标			
		了 解	理 解	掌 握	灵 活 应 用
一 元 二 次 方 程	了解一元二次方程的定义	√			
	掌握一元二次方程的四种解法，并能灵活运用			√	√
	掌握一元二次方程根的判别式，并能运用它解相应问题		√	√	√
	掌握一元二次方程根与系数的关系，会用它们解决有关问题		√	√	√
	会解一元二次方程应用题			√	

【知识梳理】

1. 灵活运用四种解法解一元二次方程：一元二次方程的一般形式： $a^2x+bx+c=0(a \neq 0)$

四种解法：直接开平方法，配方法，公式法，因式分解法，公式法：

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (b^2 - 4ac \geq 0)$$

注意：掌握一元二次方程求根公式的推导；主要数学方法有：配方法，换元法，“消元”与“降次”。

2. 根的判别式及应用($\Delta = b^2 - 4ac$)：

(1) 判定一元二次方程根的情况。

(2) 确定字母的值或取值范围。

3. 根与系数的关系(韦达定理)的应用：韦达定理：如果一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的两根为 x_1 、 x_2 ，则 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ， $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ 。

(1) 已知一根求另一根及未知系数；

(2) 求与方程的根有关的代数式的值；

(3) 已知两根求作方程；

(4) 已知两数的和与积，求这两个数；

(5) 确定根的符号： (x_1, x_2) 是方程两根。

应用韦达定理时，要确保一元二次方程有根，即一定要判断根的判别式是否非负；求作一元二次方程时，一般把求作方程的二次项系数设为 1，即以 x_1 、 x_2 为根的一元二次方程为 $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$ ；求字母系数的值时，需使二次项系数 $a \neq 0$ ，同时满足 $\Delta \geq 0$ ；求代数式的值，常用整体思想，把所求代数式变形成为含有两根之和 $x_1 + x_2$ ，两根之积 x_1x_2 的代数式的形式，整体代入。

4. 一元二次方程的应用：解应用题的关键是把握题意，找准等量关系，列出方程。最后还要注意求出的未知数的值，是否符合实际

意义。

【能力训练】

一、选择题

1、关于 x 的一元二次方程 $(a-1)x^2 + x + a^2 - 1 = 0$ 的一个根是 0，则 a 的值为 ()

- A、1 B、-1 C、1或-1 D、 $\frac{1}{2}$

2、关于 x 的方程 $x^2 - kx + k - 2 = 0$ 的根的情况是 ()

- A、有两个不相等的实数根 B、有两个相等的实数根
C、无实数根 D、不能确定

3、如果关于 x 的方程 $2x^2 - 7x + m = 0$ 的两个实数根互为倒数，那么 m 的值为 ()

- A、 $\frac{1}{2}$ B、 $-\frac{1}{2}$ C、2 D、-2

4、已知关于 x 的方程 $x^2 - 2x + k = 0$ 有实数根，则 k 的取值范围是 ()

- A、 $k < 1$ B、 $k \leq 1$ C、 $k \leq -1$ D、 $k \geq 1$

5、市政府为了申办 2010 年冬奥会决定改善城市容貌，绿化环境，计划经过两年时间，绿地面积增加 44%，这两年平均绿地面积的增长率是 ()

- A、19% B、20% C、21% D、22%

6、已知一个直角三角形的两条直角边的长恰好是方程 $2x^2 - 8x + 7 = 0$ 的两个根，则这个直角三角形的斜边长是 ()

- A、 $\sqrt{3}$ B、3 C、6 D、9

7、如果 a 是一元二次方程 $x^2 - 3x + m = 0$ 的一个根， $-a$ 是一元二次方程 $x^2 + 3x - m = 0$ 的一个根，那么 a 的值是 ()

A、1 或 2 B、0 或 -3 C、-1 或 -2 D、0 或 3

8、若一元二次方程的两根 x_1 、 x_2 满足下列关系： $x_1 \cdot x_2 + x_1 + x_2 + 2 = 0$ ， $x_1 \cdot x_2 - 2x_1 - 2x_2 + 5 = 0$ ，则这个一元二次方程为 ()

A、 $x^2 + x + 3 = 0$ B、 $x^2 - x - 3 = 0$

C、 $x^2 - x + 3 = 0$ D、 $x^2 + x - 3 = 0$

二、填空题

9、写出一个一元二次方程使它的二次项系数、一次项系数、常数项系数的和为零，该方程可以是_____。

10、写出一个一元二次方程，使它没有实数解，该方程可以是_____。

11、写出一个一元二次方程，使它的两实数根之和为 3，该方程可以是_____。

12、写出一个既能直接开方法解，又能用因式分解法解的一元二次方程是_____。

三、解下列方程

13、 $(x^2 - x)^2 - (x^2 - x) - 2 = 0$;

14、 $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} = 1$

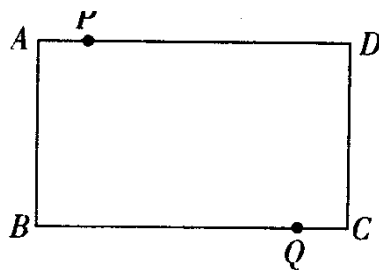
四、解答题

15、制造一种产品，原来每件的成本是 500 元，销售价为 625 元，经市场预测，该产品销售价第一个月将降低 20%，第二个月比第一个月提高 6%，为了使第二个月的销售利润达到原来的水平，该产品的成本价平均每月应降低百分之几？

16、如图所示，四边形 $ABCD$ 是矩形， $AD = 16\text{cm}$ ， $AB = 6\text{cm}$ 。动点 P、Q 分别同时从 A、C 出发，点 P 以 3cm/s 的速度向 D 移动，直到 D 为止，Q 以 2cm/s 的速度向 B 移动。

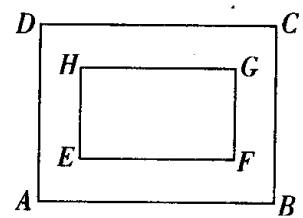
(1) P、Q 两点从出发开始几秒后，四边形 ABQP 的面积是矩形面积的 $\frac{3}{5}$ ？何时四边形 ABQP 的面积最大，最大是多少？

(2) P、Q 从开始出发几秒后， $PQ = 6\sqrt{5}\text{cm}$ ？



17、已知 x_1 、 x_2 是关于 x 的一元二次方程 $4x^2 + 4(m+1)x + m^2 = 0$ 的两个非零实数根，问 x_1 与 x_2 能否同号？若能同号，请求出相应的 m 的值的范围；若不能同号，请说明理由。

18、如图，有矩形地 ABCD 一块，要在中央修建一矩形花圃 EFGH，使其面积为这块地面积的一半，且花圃四周道路的宽相等，今无测量工具，只有无刻度的足够长的绳子一条，如何量出道路的宽？



答案:

1、 B 2、 A 3、 C 4、 B 5、 B 6、 B 7、 D 8、 B 9、 答案不惟一，

$x^2 - 2x + 1 = 0$ 10、答案不惟一， $x^2 - x + 3 = 0$ 11、答案不惟一，

$$x^2 - 3x - 1 = 0$$

12、答案不惟一， $(x-1)^2 - 4 = 0$ 13、 $x_1 = -1$ ， $x_2 = 2$ 14、 $x = -1 \pm \sqrt{3}$

15、设平均每月应降低 x ，则 $625(1-20\%)(1+6\%) - 500(1-x)^2 = 625 - 500$ ，

$$x_1 = 0.1 = 10\% \text{，} x_2 = 1.9 \text{ (不合题意，舍去)}$$

16、(1)3.2秒，当出发 $\frac{16}{3}$ 后，面积最大为 64 平方厘米 (2)0.8 秒

17、当 $m \leq \frac{1}{2}$ 且 $m \neq 0$ 时， x_1 、 x_2 同号，因为 $x_1 \cdot x_2 = \frac{m^2}{4} > 0$ 。故只需保

证 $b^2 - 4ac \geq 0$ ，且 $m \neq 0$ 即可， $b^2 - 4ac = 16(m-1)^2 - 4 \times 4m^2 \geq 0$ ， $m \leq \frac{1}{2}$ 。

18、设道路的宽为 x ， $AB = a$ ， $AD = b$ ，则 $(a-2x)(b-2x) = \frac{1}{2}ab$ ，

$$x = \frac{a+b \pm \sqrt{a^2+b^2}}{4} \text{，由于 } 2x = \frac{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}{2} > \frac{a+b+b}{2} > b \text{ (不合，舍}$$

去)

$$\text{故 } x = \frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}{4} = \frac{AB+AD-BD}{4} \text{。}$$

具体做法是：用绳量出 $AB+AD$ ，再减去 BD 之长，将余下的

$AB+AD-BD$ 对折两次，即得道路的宽 $x = \frac{1}{4}(AB+AD-BD)$ 。