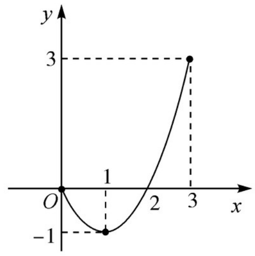
考点跟踪训练14　二次函数及其图象

一、选择题

1．(2011·温州)已知二次函数的图象($0≤x≤3$)如图所示，关于该函数在所给自变量取值范围内，下列说法正确的是(　　)



A．有最小值0，有最大值3

B．有最小值－1，有最大值0

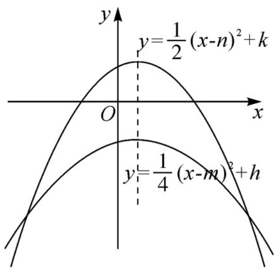
C．有最小值－1，有最大值3

D．有最小值－1，无最大值

答案　C

解析　当$0≤x≤3$时，观察图象，可得图象上最低点(1，－1)，最高点(3,3)，函数有最小值－1，最大值3.

2．(2011·烟台)如图，平面直角坐标系中，两条抛物线有相同的对称轴，则下列关系正确的是(　　)



A．$m=n$，$k>h$

B．$m=n$　，$k<h$

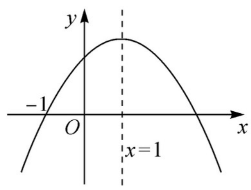
C．$m>n$，$k=h$

D．$m<n$，$k=h$

答案　A

解析　两条抛物线的顶点分别为$(n，k)$，$(m，h)$因为有相同的对称轴，且点$(n，k)$在点$(m，h)$上方，所以$m=n$，$k>h$.

3．(2011·宿迁)已知二次函数$y=ax^2+bx+c(a≠0)$的图象如图，则下列结论中正确的是(　　)



A．$a>0$

B．当$x>1$时，y随x的增大而增大

C．$c<0$

D．3是方程$ax^2+bx+c=0$的一个根

答案　D

解析　抛物线开口向下，$a<0$；对称轴是直线$x=1$，当$x≥1$时，y随x的增大而减小；

抛物线与 y 轴交点 $(0，c)$ 在 x 轴上方，$c>0$；所以 A、B、C 为错误的，设方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根为 x_1，x_2，则 $x_1=-1$，$=1$，$x_2=3$,3 是方程的一个根．

4．(2011·泰安)若二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的 x 与 y 的部分对应值如下表：

x	-7	-6	-5	-4	-3	-2
y	-27	-13	-3	3	5	3

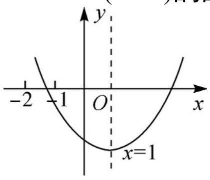
则当 $x=1$ 时，y 的值为

A．5 B．-3 C．-13 D．-27

答案　D

解析　观察上表，当 $x=-4$ 或 -2 时，$y=3$，抛物线的对称轴为直线 $x==-3$.当 $x=1$ 时，$=-3$，可知当 $x=-7$ 或 1 时，$y=-27$.

5．(2010·天津)已知二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图象如图所示，有下列结论：



①$b^2-4ac>0$；

②$abc>0$；

③$8a+c>0$；

④$9a+3b+c<0$.

其中，正确结论的个数是(　　)

A．1 B．2 C．3 D．4

答案　D

解析　由图知：抛物线与 x 轴有两个不同的交点，则△$=b^2-4ac>0$，故①正确．抛物线开口向上，得 $a>0$；又对称轴为直线 $x=-=1$，$b=-2a<0$.抛物线交 y 轴于负半轴，得 $c<0$，所以 $abc>0$，②正确．根据图象，可知当 $x=-2$ 时，$y>0$，即 $4a-2b+c>0$，把 $b=-2a$ 代入，得 $4a-2(-2a)+c=8a+c>0$，故③正确．当 $x=-1$ 时，$y<0$，所以 $x=3$ 时，也有 $y<0$，即 $9a+3b+c<0$，故④正确．

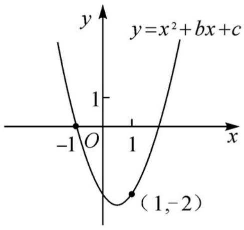
二、填空题

6．(2011·济宁)将二次函数 $y=x^2-4x+5$ 化成 $y=(x-h)^2+k$ 的形式，则 $y=$________.

答案　$y=(x-2)^2+1$

解析　$y=x^2-4x+5=(x^2-4x+4)+1=(x-2)^2+1$.

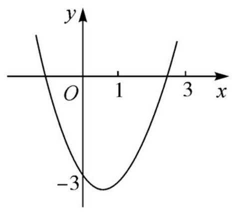
7．(2011·舟山)如图，已知二次函数 $y=x^2+bx+c$ 的图象经过点 $(-1,0)$，$(1，-2)$，当 y 随 x 的增大而增大时，x 的取值范围是______.



答案　$x\geq$

解析　抛物线经过点 $(-1,0)$，$(1，-2)$，得解之，得所以 $y=x^2-x-2$，其对称轴直线 $x=-=$，当 $x\geq$，y 随 x 的增大而增大．

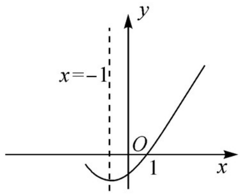
8．(2011·湖州)如图，已知抛物线 $y=x^2+bx+c$ 经过点 $(0，-3)$，请你确定一个 b 的值，使该抛物线与 x 轴的一个交点在 $(1,0)$ 和 $(3,0)$ 之间，你所确定的 b 的值是________．



答案　如－(答案不唯一)

解析　采用特殊值法，如设抛物线与 x 轴的交点坐标为(2,0)，则得 b＝－.

9．(2011·日照)如图是二次函数 $y＝ax^2＋bx＋c(a≠0)$ 的图象的一部分，给出下列命题 ：



①$a＋b＋c＝0$；② $b＞2a$；③ $ax^2＋bx＋c＝0$ 的两根分别为－3 和 1；

④$a－2b＋c＞0$.其中正确的命题是________．(只要求填写正确命题的序号)

答案　①③

解析　抛物线过点(1,0)，则有 $a＋b＋c＝0$；对称轴为直线 $x＝－1$，则＝－1，另一交点为(－3,0)，①③正确；对称轴线 x＝－＝－1，$b＝2a$；又 a>0，c<0，则 $a－2b＋c＝a－4a＋c＝－3a＋c$<0，所以②、④错误．

10．(2011·茂名)给出下列命题：

命题 1：点(1,1)是双曲线 y＝与抛物线 $y＝x^2$ 的一个交点．

命题 2：点(1,2)是双曲线 y＝与抛物线 $y＝2x^2$ 的一个交点．

命题 3：点(1,3)是双曲线 y＝与抛物线 $y＝3x^2$ 的一个交点．

……

请你观察上面的命题，猜想出命题 n(n 是正整数)：______________________________.

答案　点(1，n)是双曲线 y＝与抛物线 $y＝nx^2$ 的一个交点

解析　解方程组得所以点(1，n)是双曲线 y＝与抛物线 $y＝nx^2$ 的一个交点．

三、解答题

11．(2011·东莞)已知抛物线 $y＝x^2＋x＋c$ 与 x 轴没有交点．

(1)求 c 的取值范围；

(2)试确定直线 $y＝cx＋1$ 经过的象限，并说明理由．

解　(1)∵抛物线与 x 轴没有交点，

则方程 $x^2＋x＋c＝0$ 中，△＜0，即 $1－2c＜0$，

解得 c＞.

(2)∵c＞>0，

∴直线 $y＝cx＋1$ 随 x 的增大而增大．

∵$b＝1$，

∴直线 $y＝cx＋1$ 经过第一、二、三象限．

12．(2011·南京)已知函数 $y＝mx^2－6x＋1$(m 是常数)．

(1)求证：不论 m 为何值，该函数的图象都经过 y 轴上的一个定点；

(2)若该函数的图象与 x 轴只有一个交点，求 m 的值．

解　(1)当 $x＝0$ 时，$y＝1$.

所以不论 m 为何值，函数 $y＝mx^2－6x＋1$ 的图象经过 y 轴上的一个定点(0,1)．

(2)① 当 $m＝0$ 时，函数 $y＝－6x＋1$ 的图象与 x 轴只有一个交点；

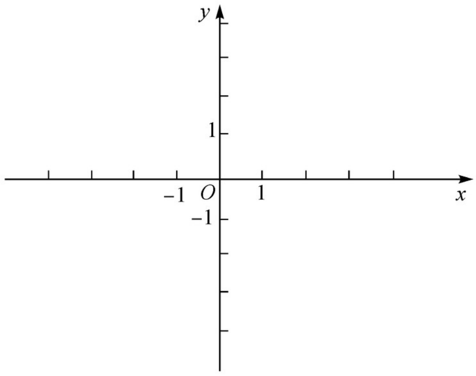
② 当 $m≠0$ 时，若函数 $y＝mx^2－6x＋1$ 的图象与 x 轴只有一个交点，则方程 $mx^2－6x＋1＝0$ 有两个相等的实数根，所以 $b^2－4ac＝(－6)^2－4m＝0$，$m＝9$.

综上，若函数 $y＝mx^2－6x＋1$ 的图象与 x 轴只有一个交点，则 m 的值为 0 或 9.

13．(2011·江津)已知双曲线 y＝与抛物线 $y＝ax^2＋bx＋c$ 交于 $A(2,3)$、$B(m,2)$、$c(－3，n)$三点．

(1)求双曲线与抛物线的解析式；

(2)在平面直角坐标系中描出点A、点B、点C，并求出△ABC的面积．



解　(1)把点$A(2,3)$代入$y=$得：$k=6$.

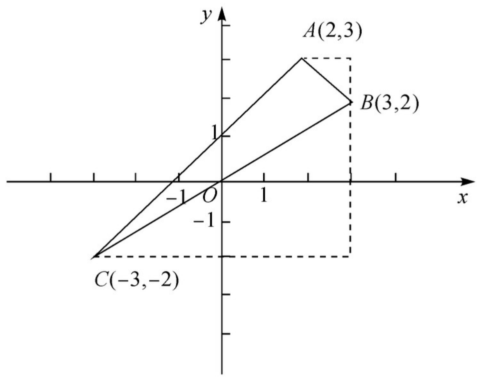
∴反比例函数的解析式为：$y=$.

把点$B(m,2)$、$C(-3，n)$分别代入$y=$得： $m=3，n=-2$.

把$A(2,3)$、$B(3,2)$、$C(-3，-2)$分别代入$y=ax^2+bx+c$得：　解之得

∴抛物线的解析式为：$y=-x^2+x+3$.

(2)描点画图(如图)：



$S_{\triangle ABC}=(1+6)\times5-\times1\times1-\times6\times4=--12=5$.

14．(2011·黄冈)我市某镇的一种特产由于运输原因，长期只能在当地销售．当地政府对该特产的销售投资收益为：每投入x万元，可获得利润$P=-{}^2+41$(万元)．当地政府拟在“十二·五”规划中加快开发该特产的销售，其规划方案为：在规划前后对该项目每年最多可投入100万元的销售投资，在实施规划5年的前两年中，每年都从100万元中拨出50万元用于修建一条公路，两年修成，通车前该特产只能在当地销售；公路通车后的3年中，该特产既在本地销售，也在外地销售．在外地销售的投资收益为：每投入x万元，可获利润$Q=-{}^2++160$(万元)．

(1)若不进行开发，求5年所获利润的最大值是多少？

(2)若按规划实施，求5年所获利润(扣除修路后)的最大值是多少？

(3)根据(1)、(2)，该方案是否具有实施价值？

解　(1)当$x=60$时，P最大值为41，故五年获利最大值是$41\times5=205$(万元)．

(2)前两年：$0\leq x\leq50$，此时因为P随x增大而增大，所以$x=50$时，P最大值为40万元，所以这两年获利最大为$40\times2=80$(万元)．

后三年：设每年获利为y，当地投资额为x，则外地投资额为$100-x$，所以$y=P+Q$

$=+=-x^2+60x+165=-{}^2+1065$，表明$x=30$时，$y$最大值为1065，那么三年获利最大为$1065\times3=3495$(万元)，

故五年获利最大值为$80+3495-50\times2=3475$(万元)．

因此(3)有极大的实施价值．

15．(2011·杭州)设函数$y=kx^2+(2k+1)x+1$ (k为实数)．

(1)写出其中的两个特殊函数，使它们的图象不全是抛物线，并在同一直角坐标系中，用描点法画出这两个特殊函数的图象；

(2)根据所画图象，猜想出：对任意实数 k，函数的图象都具有的特征，并给予证明；

(3)对任意负实数 k，当 $x<m$ 时，y 随着 x 的增大而增大，试求出 m 的一个值．

解　(1)当 $k=1$ 时，$y=x^2+3x+1$；当 $k=0$ 时，$y=x+1$，图略．

(2) 对任意实数 k，函数的图象都经过点$(-2，-1)$和点$(0,1)$．

证明：把 $x=-2$ 代入函数 $y=kx^2+(2k+1)x+1$，得 $y=-1$，即函数 $y=kx^2+(2k+1)x+1$ 的图象经过点$(-2，-1)$；把 $x=0$ 代入函数 $y=kx^2+(2k+1)x+1$，得 $y=1$，即函数 $y=kx^2+(2k+1)x+1$ 的图象经过点$(0,1)$．

(3) 当 k 为任意负实数，该函数的图象总是开口向下的抛物线，其对称轴为 $x=--=-1-$，当负数 k 所取的值非常小时，正数－靠近 0，所以 $x=-1-$靠近 -1，所以只要 m 的值不大于 -1 即可．