2013级初三数学中考培优试题

一．解答题：

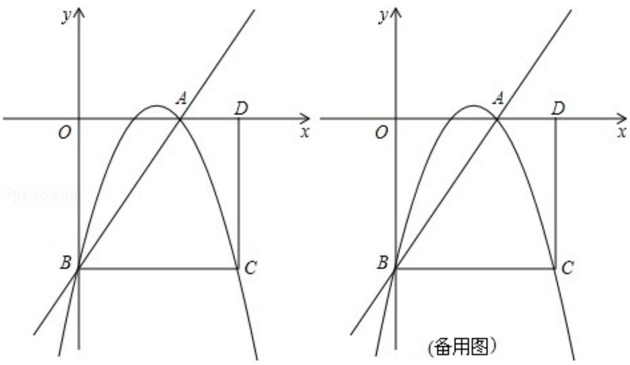
1．如图，矩形OBCD的边OD、OB分别在x轴正半轴和y轴的负半轴上，且OD=10，OB=8，将矩形的边BC绕点B逆时针旋转，使点C恰好与x轴上的点A重合

（1）直接写出点A、B的坐标：A（__________，__________）、 B（__________，__________）；

（2）若抛物线$y=-\frac{1}{3}x^2+bx+c$经过A、B两点，则这条抛物线的解析式是__________；

（3）若点M是直线AB上方抛物线上的一个动点，作MN⊥x轴于点N，问是否存在点M，使△AMN与△ACD相似？若存在，求出点M的横坐标；若不存在，说明理由；

（4）当$\frac{7}{2}\le x\le 7$时，在抛物线上存在点P，使△ABP得面积最大，求△ABP面积的最大值．



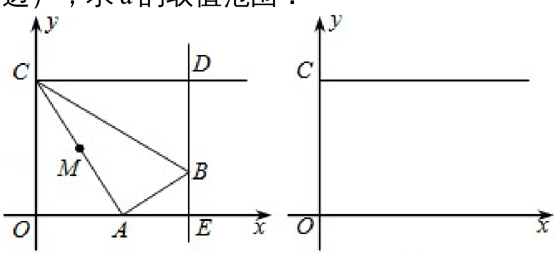
(备用图)

2．如图，在平面直角坐标系中，点C的坐标为（0，4），动点 A以每秒1个单位长的速度，从点O出发沿x轴的正方向运动，M是线段AC的中点．将线段AM以点A为中心，沿顺时针方向旋转90°，得到线段AB．过点B作x轴的垂线，垂足为E，过点C作y轴的垂线，交直线BE于点D．运动时间为t秒．

（1）当点B与点D重合时，求t的值；

（2）设△BCD的面积为S，当t为何值时，$S=\frac{25}{4}$？

（3）连接MB，当MB∥OA时，如果抛物线$y=ax^2-10ax$的顶点在△ABM内部（不包括边），求a的取值范围．



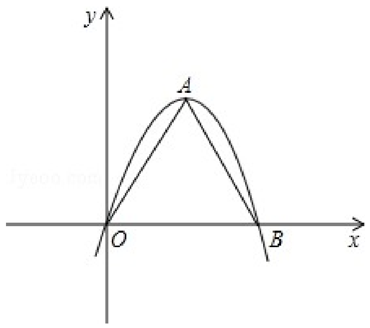
备用图

3．如果一条抛物线 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）与 x 轴有两个交点，那么以该抛物线的顶点和这两个交点为顶点的三角形称为这条抛物线的“抛物线三角形”．

（1）“抛物线三角形”一定是 ________三角形；

（2）若抛物线 $y=-x^2+bx$（$b>0$）的“抛物线三角形”是等腰直角三角形，求 b 的值；

（3）如图，△OAB 是抛物线 $y=-x^2+b'x$（$b'>0$）的“抛物线三角形”，是否存在以原点 O 为对称中心的矩形 ABCD？若存在，求出过 O、C、D 三点的抛物线的表达式；若不存在，说明理由．

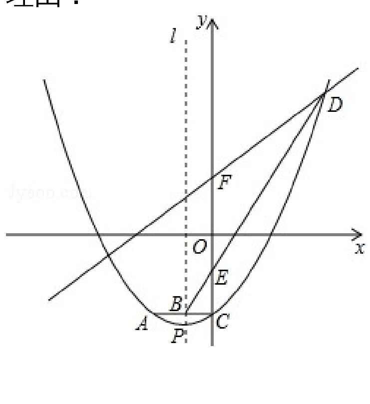


4．如图，抛物线 $y=ax^2+bx-3$ 交 y 轴于点 C，直线 l 为抛物线的对称轴，点 P 在第三象限且为抛物线的顶点．P 到 x 轴的距离为 $\frac{10}{3}$，到 y 轴的距离为 1．点 C 关于直线 l 的对称点为 A，连接 AC 交直线 l 于 B．

（1）求抛物线的表达式；

（2）直线 $y=\frac{3}{4}x+m$ 与抛物线在第一象限内交于点 D，与 y 轴交于点 F，连接 BD 交 y 轴于点 E，且 DE：BE=4：1．求直线 $y=\frac{3}{4}x+m$ 的表达式；

（3）若 N 为平面直角坐标系内的点，在直线 $y=\frac{3}{4}x+m$ 上是否存在点 M，使得以点 O、F、M、N 为顶点的四边形是菱形？若存在，直接写出点 M 的坐标；若不存在，请说明理由．

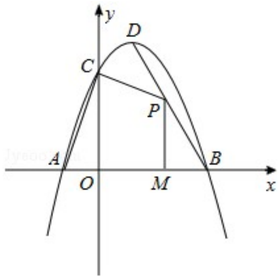


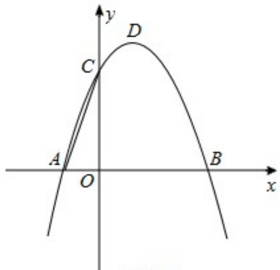
5．如图，抛物线 $y=ax^2+bx+c$（a，b，c 是常数，a≠0）与 x 轴交于 A，B 两点，与 y 轴交于点 C，三个交点的坐标分别为 A（﹣1，0），B（3，0），C（0，3）．

（1）求抛物线的解析式及顶点 D 的坐标；

（2）若 P 为线段 BD 上的一个动点，过点 P 作 PM⊥x 轴于点 M，求四边形 PMAC 面积的最大值和此时 P 点的坐标；

（3）若 P 为抛物线在第一象限上的一个动点，过点 P 作 PQ∥AC 交 x 轴于点 Q．当点 P 的坐标为__________时，四边形 PQAC 是平行四边形；当点 P 的坐标为__________时，四边形 PQAC 是等腰梯形（直接写出结果，不写求解过程）．





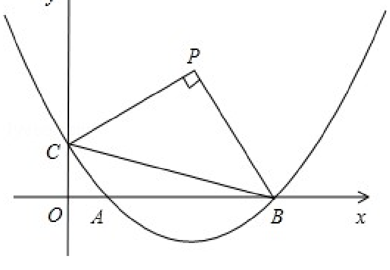
备用图

6．如图，已知抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}(b+1)x+\frac{b}{4}$（b 是实数且 b＞2）与 x 轴的正半轴分别交于点 A、B（点 A 位于点 B 的左侧），与 y 轴的正半轴交于点 C．

（1）点 B 的坐标为__________，点 C 的坐标为__________（用含 b 的代数式表示）；

（2）请你探索在第一象限内是否存在点 P，使得四边形 PCOB 的面积等于 2b，且△PBC 是以点 P 为直角顶点的等腰直角三角形？如果存在，求出点 P 的坐标；如果不存在，请说明理由；

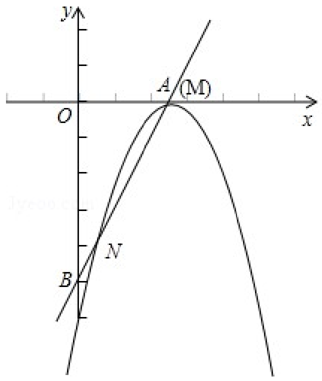
（3）请你进一步探索在第一象限内是否存在点 Q，使得△QCO，△QOA 和△QAB 中的任意两个三角形均相似（全等可作相似的特殊情况）？如果存在，求出点 Q 的坐标；如果不存在，请说明理由．

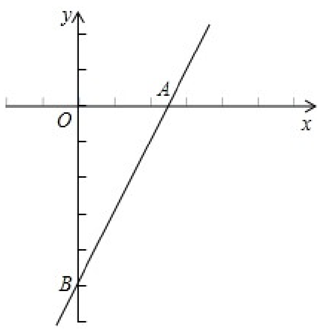


7．已知直线 $y=2x-5$ 与 x 轴和 y 轴分别交于点 A 和点 B，抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 的顶点 M 在直线 AB 上，且抛物线与直线 AB 的另一个交点为 N．

（1）如图，当点 M 与点 A 重合时，求：①抛物线的解析式；②点 N 的坐标和线段 MN 的长；

（2）抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 在直线 AB 上平移，是否存在点 M，使得△OMN 与△AOB 相似？若存在，直接写出点 M 的坐标；若不存在，请说明理由．

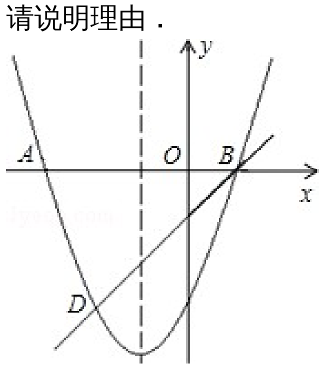




8．如图，二次函数 $y=x^2+bx+c$ 的图象与 x 轴交于 A、B 两点，且 A 点坐标为（－3，0），经过 B 点的直线交抛物线于点 D（－2，－3）．

（1）求抛物线的解析式和直线 BD 解析式；

（2）过 x 轴上点 E（a，0）（ E 点在 B 点的右侧）作直线 EF∥BD，交抛物线于点 F，是否存在实数 a 使四边形 BDFE 是平行四边形？如果存在，求出满足条件的 a；如果不存在，请说明理由．

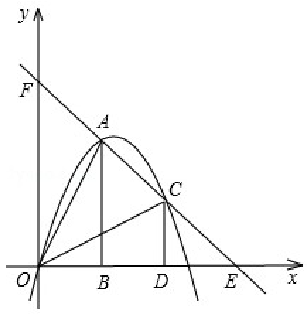


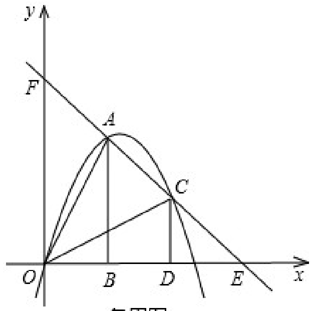
9．如图，把两个全等的Rt△AOB和Rt△COD分别置于平面直角坐标系中，使直角边OB、OD在x轴上．已知点A（1，2），过 A、C两点的直线分别交x轴、y轴于点E、F．抛物线$y=ax^2+bx+c$经过O、A、C三点．

（1）求该抛物线的函数解析式；

（2）点P为线段OC上一个动点，过点P作y轴的平行线交抛物线于点M，交x轴于点N，问是否存在这样的点P，使得四边形ABPM为等腰梯形？若存在，求出此时点P的坐标；若不存在，请说明理由．

（3）若△AOB沿AC方向平移（点A始终在线段AC上，且不与点C重合），△AOB在平移过程中与△COD重叠部分面积记为S．试探究S是否存在最大值？若存在，求出这个最大值；若不存在，请说明理由．





备用图

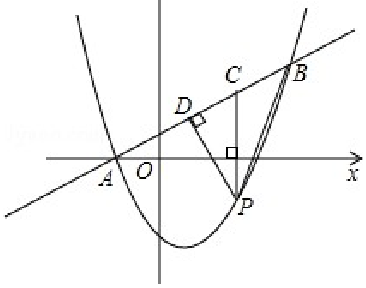
10．如图，在平面直角坐标系中，直线$y=\frac{1}{2}x+1$与抛物线$y=ax^2+bx-3$交于A、B两点，点A在x轴上，点B的纵坐标为3．点P是直线AB下方的抛物线上一动点（不与A、B点重合），过点P作x轴的垂线交直线AB于点C，作PD⊥AB于点D．

（1）求a、b及sin∠ACP的值；

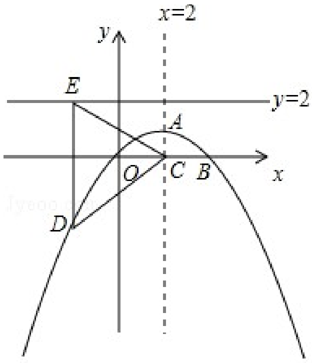
（2）设点P的横坐标为m．

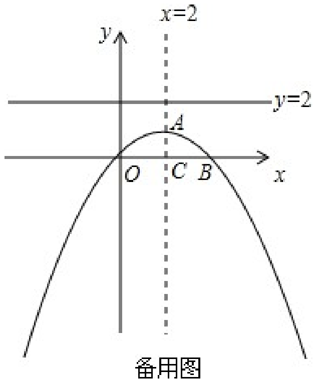
①用含有m的代数式表示线段PD的长，并求出线段PD长的最大值；

②连接PB，线段PC把△PDB分成两个三角形，是否存在适合的m的值，直接写出m的值，使这两个三角形的面积之比为9：10？若存在，直接写出m的值；若不存在，说明理由．



11．如图，抛物线的对称轴是直线 x=2，顶点 A 的纵坐标为 1，点 B（4，0）在此抛物线上．





备用图

（1）求此抛物线的解析式；

（2）若此抛物线对称轴与 x 轴交点为 C，点 D（x，y）为抛物线上一动点，过点 D 作直线 y=2 的垂线，垂足为 E．

① 用含 y 的代数式表示 CD^2，并猜想 CD^2 与 DE^2 之间的数量关系，请给出证明；

② 在此抛物线上是否存在点 D，使∠EDC=120°？如果存在，请直接写出 D 点坐标；如果不存在，请说明理由．

12．如图 1，已知抛物线 $y=ax^2+bx$（$a\neq0$）经过 A（3，0）、 B（4，4）两点．

（1）求抛物线的解析式；

（2）将直线 OB 向下平移 m 个单位长度后，得到的直线与抛物线只有一个公共点 D，求 m 的值及点 D 的坐标；

（3）如图 2，若点 N 在抛物线上，且∠NBO=∠ABO，则在（2）的条件下，求出所有满足△POD∽△NOB 的点 P 坐标（点 P、O、D 分别与点 N、O、B 对应）．

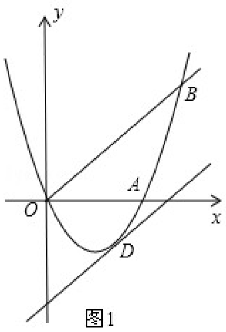


图1

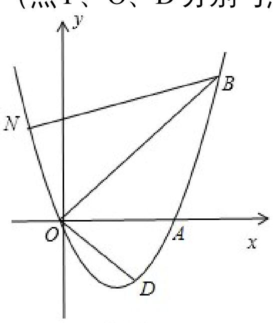


图2

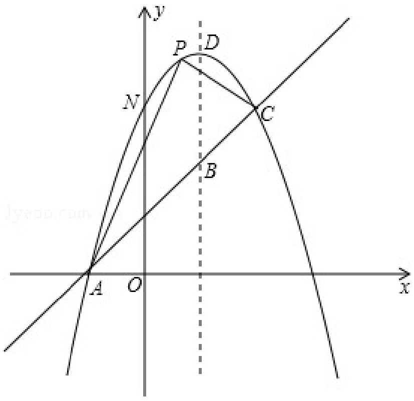
13．如图，已知抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 与一直线相交于 A（﹣1，0），C（2，3）两点，与 y 轴交于点 N．其顶点为 D．

（1）抛物线及直线 AC 的函数关系式；

（2）设点 M（3，m），求使 MN+MD 的值最小时 m 的值；

（3）若抛物线的对称轴与直线 AC 相交于点 B，E 为直线 AC 上的任意一点，过点 E 作 EF∥BD 交抛物线于点 F，以 B，D，E，F 为顶点的四边形能否为平行四边形？若能，求点 E 的坐标；若不能，请说明理由；

（4）若 P 是抛物线上位于直线 AC 上方的一个动点，求△APC 的面积的最大值．

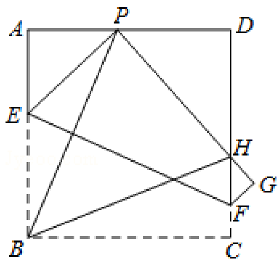


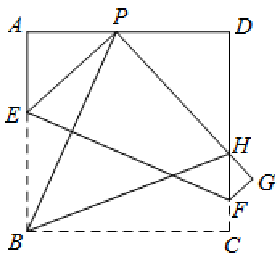
14．如图所示，现有一张边长为 4 的正方形纸片 ABCD，点 P 为正方形 AD 边上的一点（不与点 A、点 D 重合）将正方形纸片折叠，使点 B 落在 P 处，点 C 落在 G 处，PG 交 DC 于 H，折痕为 EF，连接 BP、BH．

（1）求证：∠APB=∠BPH；

（2）当点 P 在边 AD 上移动时，△PDH 的周长是否发生变化？并证明你的结论；

（3）设 AP 为 x，四边形 EFGP 的面积为 S，求出 S 与 x 的函数关系式，试问 S 是否存在最小值？若存在，求出这个最小值；若不存在，请说明理由．





（备用图）

15．阅读下列材料：

我们知道，一次函数 y=kx+b 的图象是一条直线，而 y=kx+b 经过恒等变形可化为直线的另一种表达形式：Ax+Bx+C=0（A、B、C 是常数，且 A、B 不同时为 0）．如图 1，点 P（m，n）到直线 l：Ax+By+C=0 的距离（d）计算公式是：$d=\frac{|A\times m+B\times n+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$．

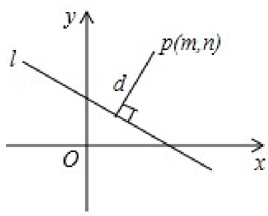


图1

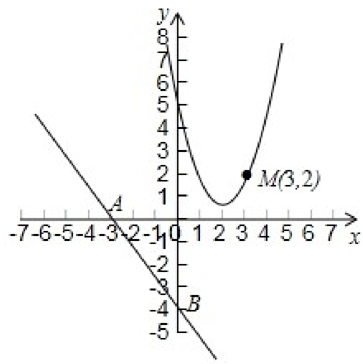


图2

例：求点 P（1，2）到直线 $y=\frac{5}{12}x-\frac{1}{6}$的距离 d 时，先将 $y=\frac{5}{12}x-\frac{1}{6}$化为 5x－12y－2=0，再由上述距离公式求得 $d=\frac{|5\times1+(-12)\times2+(-2)|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}=\frac{21}{13}$．

解答下列问题：

如图 2，已知直线 $y=-\frac{4}{3}x-4$与 x 轴交于点 A，与 y 轴交于点 B，抛物线 $y=x^2-4x+5$ 上的一点 M（3，2）．

（1）求点 M 到直线 AB 的距离．

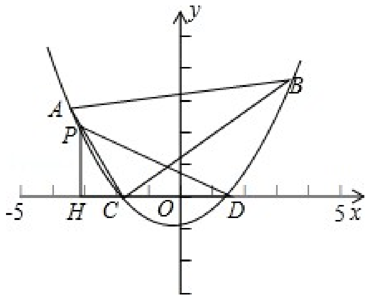
（2）抛物线上是否存在点 P，使得△PAB 的面积最小？若存在，求出点 P 的坐标及△PAB 面积的最小值；若不存在，请说明理由．

16．如图，已知二次函数 $y=\frac{1}{48}(x+2)(ax+b)$ 的图象过点 A（－4，3），B（4，4）．

（1）求二次函数的解析式：

（2）求证：△ACB 是直角三角形；

（3）若点 P 在第二象限，且是抛物线上的一动点，过点 P 作 PH 垂直 x 轴于点 H，是否存在以 P、H、D 为顶点的三角形与△ABC 相似？若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由．



17．如图 1，抛物线 $y=mx^2-11mx+24m$ （$m<0$）与 x 轴交于 B、C 两点（点 B 在点 C 的左侧），抛物线另有一点 A 在第一象限内，且∠BAC=90°．

（1）填空：OB=__________，OC=__________；

（2）连接 OA，将△OAC 沿 x 轴翻折后得△ODC，当四边形 OACD 是菱形时，求此时抛物线的解析式；

（3）如图 2，设垂直于 x 轴的直线 l：x=n 与（2）中所求的抛物线交于点 M，与 CD 交于点 N，若直线 l 沿 x 轴方向左右平移，且交点 M 始终位于抛物线上 A、C 两点之间时，试探究：当 n 为何值时，四边形 AMCN 的面积取得最大值，并求出这个最大值．

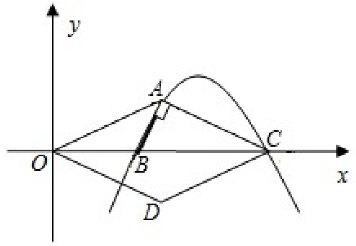


图 1

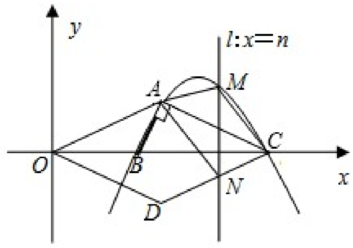


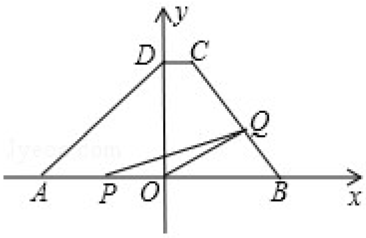
图 2

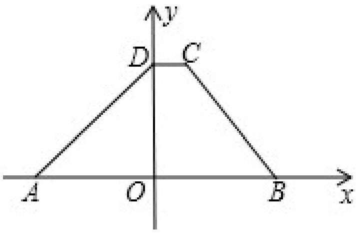
18．如图，在直角坐标系中，梯形 ABCD 的底边 AB 在 x 轴上，底边 CD 的端点 D 在 y 轴上．直线 CB 的表达式为 $y=-\frac{4}{3}x+\frac{16}{3}$，点 A、D 的坐标分别为（﹣4，0），（ 0，4）．动点 P 自 A 点出发，在 AB 上匀速运行．动点 Q 自点 B 出发，在折线 BCD 上匀速运行，速度均为每秒 1 个单位．当其中一个动点到达终点时，它们同时停止运动．设点 P 运动 t（秒）时，△OPQ 的面积为 s（不能构成△OPQ 的动点除外）．

（1）求出点 B、C 的坐标；

（2）求 s 随 t 变化的函数关系式；

（3）当 t 为何值时 s 有最大值？并求出最大值．





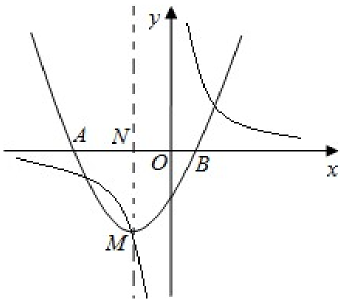
备用图

19．如图，已知二次函数 $y=ax^2+2x+c$（a＞0）图象的顶点 M 在反比例函数 $y=\frac{3}{x}$上，且与 x 轴交于 AB 两点．

（1）若二次函数的对称轴为 $x=-\frac{1}{2}$，试求 a，c 的值；

（2）在（1）的条件下求 AB 的长；

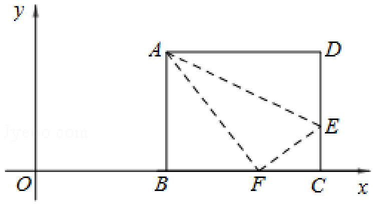
（3）若二次函数的对称轴与 x 轴的交点为 N，当 NO+MN 取最小值时，试求二次函数的解析式．



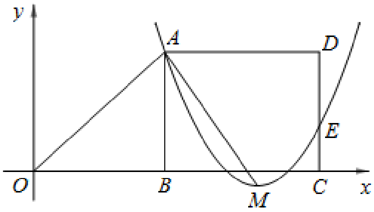
20．如图（1），矩形 ABCD 的一边 BC 在直角坐标系中 x 轴上，折叠边 AD，使点 D 落在 x 轴上点 F 处，折痕为 AE，已知 AB=8，AD=10，并设点 B 坐标为（m，0），其中 m＞0．（1）求点 E、F 的坐标（用含 m 的式子表示）；

（2）连接 OA，若△OAF 是等腰三角形，求 m 的值；

（3）如图（2），设抛物线 $y=a(x-m-6)^2+h$ 经过 A、E 两点，其顶点为 M，连接 AM，若∠OAM=90°，求 a、h、m 的值．



图（1）



图（2）

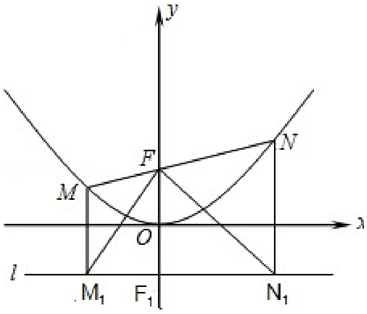
21．如图所示，过点F（0，1）的直线y=kx+b与抛物线$y=\frac{1}{4}x^2$交于M（x_1，y_1）和N（x_2，y_2）两点（其中$x_1<0$，$x_2>0$）．

（1）求b的值．

（2）求$x_1 \cdot x_2$的值．

（3）分别过M，N作直线l：y=－1的垂线，垂足分别是M_1和N_1．判断$\triangle M_1FN_1$的形状，并证明你的结论．

（4）对于过点F的任意直线MN，是否存在一条定直线m=常数，使m与以MN为直径的圆相切？如果有，请求出这条直线m的解析式；如果没有，请说明理由．

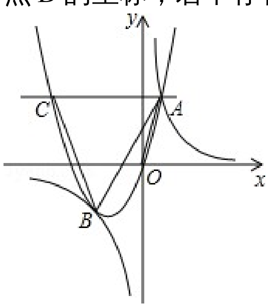


22．如图，抛物线$y=ax^2+bx$（a＞0）与双曲线$y=\frac{k}{x}$相交于点A，B．已知点B的坐标为（－2，－2），点 A在第一象限内，且tan∠AOx=4．过点A作直线AC∥x轴，交抛物线于另一点C．

（1）求双曲线和抛物线的解析式；

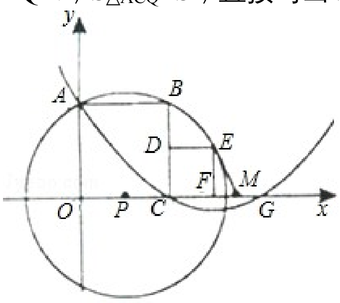
（2）计算△ABC的面积；

（3）在抛物线上是否存在点D，使△ABD的面积等于△ABC的面积？若存在，请你写出点D的坐标；若不存在，请你说明理由．

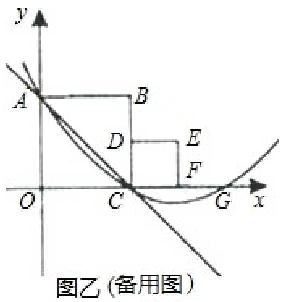


23．如图甲，分别以两个彼此相邻的正方形 OABC 与 CDEF 的边 OC、OA 所在直线为 x 轴、y 轴建立平面直角坐标系（O、C、F 三点在 x 轴正半轴上）．若⊙P 过 A、B、E 三点（圆心在 x 轴上），抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2+bx+c$ 经过 A、C 两点，与 x 轴的另一交点为 G，M 是 FG 的中点，正方形 CDEF 的面积为 1．

（1）求 B 点坐标；（2）求证：ME 是⊙P 的切线；（3）设直线 AC 与抛物线对称轴交于 N，Q 点是此对称轴上不与 N 点重合的一动点，①求△ACQ 周长的最小值；②若 FQ=t，$S_{\triangle ACQ}$=S，直接写出 S 与 t 之间的函数关系式．



图甲



图乙 (备用图)

24．如图，在平面直角坐标系中，直线 $y=\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}$ 与抛物线 $y=-\frac{1}{4}x^2+bx+c$ 交于 A、B 两点，点 A 在 x 轴上，点 B 的横坐标为﹣8．

（1）求该抛物线的解析式；

（2）点 P 是直线 AB 上方的抛物线上一动点（不与点 A、B 重合），过点 P 作 x 轴的垂线，垂足为 C，交直线 AB 于点 D，作 PE⊥AB 于点 E．

① 设△PDE 的周长为 l，点 P 的横坐标为 x，求 l 关于 x 的函数关系式，并求出 l 的最大值；

② 连接 PA，以 PA 为边作图示一侧的正方形 APFG．随着点 P 的运动，正方形的大小、位置也随之改变．当顶点 F 或 G 恰好落在 y 轴上时，直接写出对应的点 P 的坐标．