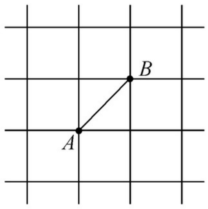
考点跟踪训练40　探索型问题

一、选择题

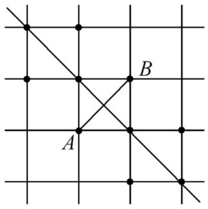
1．(2010·株洲)如图所示的正方形网络中，网格线的交点称为格点，已知A、B是两格点，如果C也是图中的格点，且使得$\triangle ABC$为等腰三角形，则点C的个数是(　　)



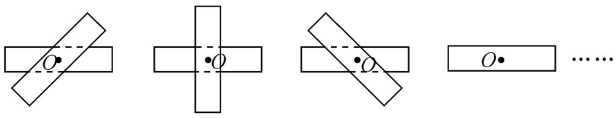
A．6 B．7 C．8 D．9

答案　C

解析　如图，可知符合题意的点C有8个．



2．(2010·重庆)有两个完全重合的矩形，将其中一个始终保持不动，另一个矩形绕其对称中心O按逆时针方向进行旋转，每次均旋转45°，第1次旋转后得到图①，第2次旋转后得到图②，……，则第10次旋转后得到的图形与图①～④中相同的是(　　)



图①　图②　图③　图④

A．图① B．图② C．图③ D．图④

答案　B

解析　本题考查分析想象能力．由题意可知，$45°\times 8=360°$，当转动的矩形绕中心旋转8次后回到原位置，据此可得第10次旋转后的图形与图②相同．

3.若正比例函数的图象经过点$(-1,2)$，则这个图象必经过点(　　)

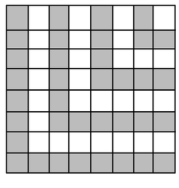
A．(1,2) B．(－1，－2)

C．(2，－1) D．(1，－2)

答案　D

解析　设$y=kx$的图象过点$(-1,2)$，则$2=-k$，$k=-2$，$y=-2x$，又当$x=1$时，$y=-2\times 1=-2$，选D.

4．如图，房间地面的图案是用大小相同的黑、白正方形镶嵌而成．图中，第1个黑色L形由3个正方形组成，第2个黑色L形由7个正方形组成，…，那么第6个黑色L形的正方形个数是(　　)



A．22　B．23　C．24　D．25

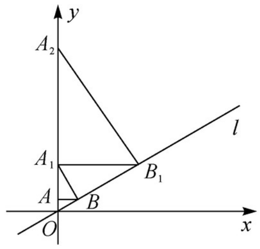
答案　B

解析　黑色L形与组成的正方形的个数如下表所示.

1	2	3	4	……	n
3	7	11	15	……	$4n-1$

当 $n=6$ 时，$4n-1=4×6-1=23$.故选 B.

5．(2011·潜江)如图，已知直线 l：$y=x$，过点 $A(0,1)$作 y 轴的垂线交直线 l 于点 B，过点 B 作直线 l 的垂线交 y 轴于点 A_1；过点 A_1 作 y 轴的垂线交直线 l 于点 B_1，过点 B_1 作直线 l 的垂线交 y 轴于点 A_2；…；按此作法继续下去，则点 A_4 的坐标为(　　)



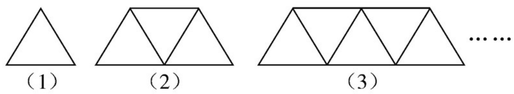
A．(0,64) B．(0,128) C．(0,256) D．(0,512)

答案　C

解析　易求 $A(0,1)$，$A_1(0,4)$，$A_2(0,16)$……，而 $2^1=1,2^2=4,2^4=16$……，所以 $2^8=256$，点 A_4 的坐标为(0,256)．

二、填空题

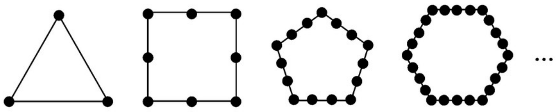
6．(2010·鄂尔多斯)如图，用小棒摆出下面的图形，图形(1)需要 3 根小棒，图形(2)需要 7 根小棒，……，照这样的规律继续摆下去，第 n 个图形需要__________根小棒(用含 n 的代数式表示)．



答案　$4n-1$

解析　图形(1)有小棒 $3=4×1-1$；图形(2)有小棒 $7=4×2-1$；图形(3)有小棒 $11=4×3-1$；……；图形(n)有小棒 $4×n-1$，即 $4n-1$.

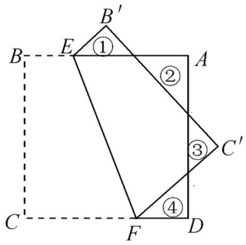
7．(2011·肇庆)如图所示，把同样大小的黑色棋子摆放在正多边形的边上，按照这样的规律摆下去，则第 n(n 是大于 0 的整数)个图形需要黑色棋子的个数是__________.



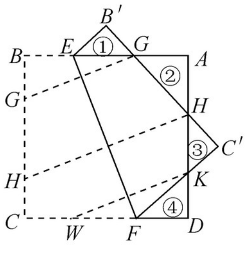
答案　$n(n+2)$

解析　第 1 个图形需黑色棋子 $2×3-3$ 个，第 2 个图形需黑色棋子 $3×4-4$ 个，……，则第 n 个图形需黑色棋子个数是 $(n+1)(n+2)-(n+2)=n^2+2n=n(n+2)$．

8．(2010·宿迁)如图，正方形纸片 $ABCD$ 的边长为 8，将其沿 EF 折叠，则图中①②③④四个三角形的周长之和为________．



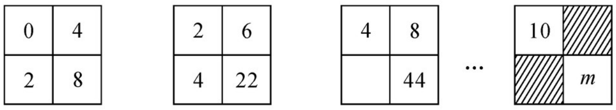
答案　32



解析　如图，设 $C'B'$ 与 AB 交点为 G'，与 AD 交点为 H'，FC' 与 AD 交点为 W'，则这三个点关于折痕 EF 对称的点分别为 G、H、W，由翻折的性质“对应边相等”，得 $BE=EB'$，$BG=B'G'$，$GH=G'H'$，$HC=H'C'$，$CW=C'W'$，$FW=FW'$.

∴①、②、③、④四个三角形的周长之和等于正方形的周长 $=4\times 8=32$.

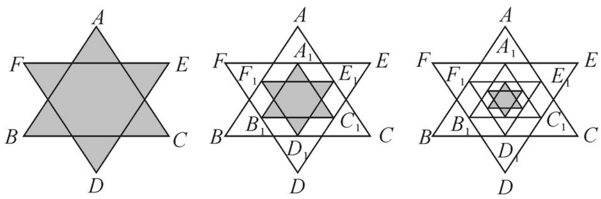
9．(2011·菏泽)填在下面各正方形中的四个数之间都有相同的规律，根据这种规律，m 的值是______．



答案　158

解析　根据左上角 0、2、4、6、8、10 可知最后一个正方形是第 6 个正方形，阴影部分应该是 12、14，所以 $m=12\times 14-10=158$.

10．(2011·东莞)如图(1)，将一个正六边形各边延长，构成一个正六角星形 $AFBDCE$，它的面积为 1，取△ABC 和△DEF 各边中点，连接成正六角星形 $A_1F_1B_1D_1C_1E_1$，如图(2)中阴影部分；取△$A_1B_1C_1$ 和△$D_1E_1F_1$ 各边中点，连接成正六角星形 $A_2F_2B_2D_2C_2E_2$，如图(3) 中阴影部分；如此下去，则正六角星形 $A_nF_nB_nD_nC_nE_n$ 的面积为_______．



（1）　（2）　（3）

答案

解析　正六角星形 $AFBDCE$ 与正六角形 $A_1F_1B_1D_1C_1E_1$ 相似，且相似比为 2，所以正六角星形 $A_1F_1B_1D_1C_1E_1$ 的面积是 $1\times{}^2=$，依此类推，正六角星形 $A_2F_2B_2D_2C_2E_2$ 的面积是 $\times{}^2=$，……，所以正六角星形 $A_nF_nB_nD_nE_n$ 的面积是.

三、解答题

11．(2011·成都)设 $S_1=1++$，$S_2=1++$，$S_3=1++$，…，$S_n=1++$.设 $S=++\cdots+$，求 S 的值 (用含 n 的代数式表示，其中 n 为正整数)．

解　$S_n=1++=1+{}^2+2\times=1+{}^2+2\times$

$={}^2$.

$\therefore S=+++\cdots+=n\times 1+$

$=n+=n+==$.

12．(2011·鸡西)在正方形 $ABCD$ 的边 AB 上任取一点 E，作 $EF\perp AB$ 交 BD 于点 F，取 FD 的中点 G，连接 EG、CG，如图 1，易证 $EG=CG$ 且 $EG\perp CG$.

(1)将△BEF 绕点 B 逆时针旋转 90°，如图 2，则线段 EG 和 CG 有怎样的数量关系和位置关系？请直接写出你的猜想；

(2)将△BEF 绕点 B 逆时针旋转 180°，如图 3，则线段 EG 和 CG 又有怎样的数量关系和位置关系？请写出你的猜想，并加以证明．

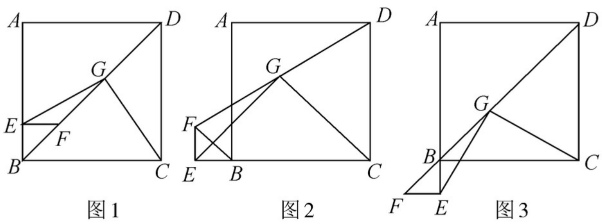
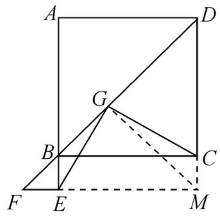


图1　图2　图3

解　(1)$EG=CG$，$EG\perp CG$.



(2)$EG=CG$，$EG\perp CG$.

证明：如图，延长FE交DC延长线于M，连接MG.

$\because\angle AEM=90°$，$\angle EBC=90°$，$\angle BCM=90°$，

$\therefore$四边形$BEMC$是矩形．

$\therefore BE=CM$，$\angle EMC=90°$.

又$\because BE=EF$，

$\therefore EF=CM$.

$\because\angle EMC=90°$，$FG=DG$，

$\therefore MG=FD=FG$.

$\because BC=EM$ ，$BC=CD$，

$\therefore EM=CD$.

又$\because EF=CM$，

$\therefore FM=DM$.

$\therefore\angle F=45°$.

又$\because FG=DG$，

$\therefore\angle CMG=\angle EMC=45°$.

$\therefore\angle F=\angle GMC$.

$\therefore\triangle GFE\cong\triangle GMC$.

$\therefore EG=CG$ ，$\angle FGE=\angle MGC$.

$\because\angle FMC=90°$，$MF=MD$，$FG=DG$，

$\therefore MG\perp FD$，

$\therefore\angle FGE+\angle EGM=90°$，

$\therefore\angle MGC+\angle EGM=90°$，

即$\angle EGC=90°$.

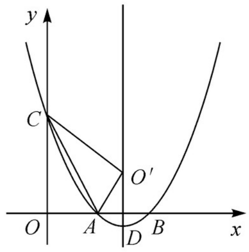
$\therefore EG\perp CG$.

13．(2011·苏州)已知二次函数$y=a(x^2-6x+8)(a>0)$的图象与x轴分别交于点A、B，与y轴交于点C.点D是抛物线的顶点．

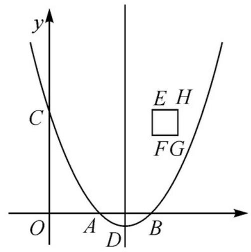
(1)如图①，连接AC，将$\triangle OAC$沿直线AC翻折，若点O的对应点O'恰好落在该抛物线的对称轴上，求实数a的值；

(2)如图②，在正方形$EFGH$中，点E、F的坐标分别是(4,4)、(4,3)，边HG位于边EF的右侧．小林同学经过探索后发现一个正确的命题：“若点P是边EH或边HG上的任意一点，则四条线段PA、PB、PC、PD不能与任何一个平行四边形的四条边对应相等(即这四条线段不能构成平行四边形)．”若点P是边EF或边FG上的任意一点，刚才的结论是否也成立？请你积极探索，并写出探索过程；

(3)如图②，当点P在抛物线对称轴上时，设点P的纵坐标t是大于3的常数，试问：是否存在一个正数a，使得四条线段PA、PB、PC、PD与一个平行四边形的四条边对应相等(即这四条线段能构成平行四边形)？请说明理由．

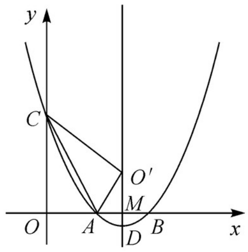


图①



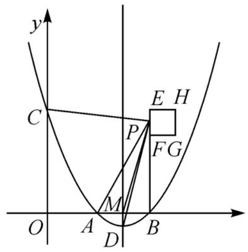
图②

解　(1)令 $y=0$，由 $a(x^2-6x+8)=0$ 解得 $x_1=2$，$x_2=4$；
令 $x=0$，解得 $y=8a$.
∴点 A、B、C 的坐标分别是(2,0)、(4,0)、$(0,8a)$，
∴$OA=2$，
该抛物线对称轴为直线 $x=3$.
如图③，设抛物线对称轴与 x 轴的交点为 M，则 $AM=1$.



图③

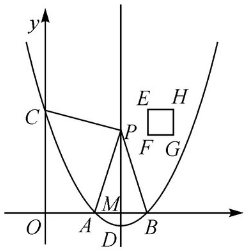
由题意得 $O'A=OA=2$，
∴$O'A=2AM$，∴$\angle O'AM=60°$.
∴$\angle OAC=\angle O'AC=60°$.
∴$OC=\cdot AO=2$ ，即 $8a=2$ ，∴$a=$.
(2)若点 P 是边 EF 或边 FG 上的任意一点，结果同样成立．
(i)如图④，设 P 是边 EF 上的任意一点(不与点 E 重合)，连接 PM.



图④

∵点 $E(4,4)$、$F(4,3)$与点 $B(4,0)$在一直线上，点 C 在 y 轴上，
∴$PB<4$，$PC\geq4$，∴$PC>PB$.
又∵$PD>PM>PB$，$PA>PM>PB$，
∴$PB\neq PA$，$PB\neq PC$，$PB\neq PD$，
∴此时线段 PA、PB、PC、PD 不可能构成平行四边形．
(ii)设 P 是边 FG 上的任意一点(不与点 G 重合)，
∵点 F 的坐标是(4,3)，∴点 G 的坐标是(5,3)．
∴$FB=3$，$GB=$ ，∴$3\leq PB<$.
∵$PC\geq4$，∴$PC>PB$.
又∵$PD>PM>PB$，$PA>PM>PB$，
∴$PB\neq PA$，$PB\neq PC$，$PB\neq PD$，
∴此时线段 PA、PB、PC、PD 不可能构成平行四边形．
(3)存在一个正数 a，使得四条线段 PA、PB、PC、PD 与一个平行四边形的四条边对应相等(即这四条线段能够成平行四边形)．

如图⑤，∵点 A、B 是抛物线与 x 轴的交点，点 P 在抛物线对称轴上，



图⑤

∴$PA=PB$.

∴当 $PC=PD$ 时，线段 PA、PB、PC、PD 能构成平行四边形．

∵点 C 的坐标是$(0,8a)$，点 D 的坐标是$(3，-a)$，点 P 的坐标是$(3，t)$，

∴$PC^2=3^2+(t-8a)^2$，$PD^2=(t+a)^2$，

由 $PC=PD$ 得 $PC^2=PD^2$，∴$3^2+(t-8a)^2=(t+a)^2$，

整理得 $7a^2-2ta+1=0$，∴$\triangle=4t^2-28$.

∵t 是大于 3 的常数，∴$\triangle=4t^2-28>0$，

∴方程 $7a^2-2ta+1=0$ 有两个不相等的实数根 $a==$ ，

显然，$a=>0$，满足题意．

∴当 t 是一个大于 3 的常数时，存在一个正数 $a=$ ，使得线段 PA、PB、PC、PD 能构成平行四边形．