

## 2015 中考数学真题分类汇编：03 整式与因式分解

### 一. 选择题 (共 10 小题)

- (2015•连云港) 下列运算正确的是 ( )  
A.  $2a+3b=5ab$  B.  $5a-2a=3a$  C.  $a^2 \cdot a^3=a^6$  D.  $(a+b)^2=a^2+b^2$
- (2015•营口) 下列计算正确的是 ( )  
A.  $|-2|=-2$  B.  $a^2 \cdot a^3=a^6$  C.  $(-3)^{-2}=\frac{1}{9}$  D.  $\sqrt{12}=3\sqrt{2}$
- (2015•宿迁) 计算  $(-a^3)^2$  的结果是 ( )  
A.  $-a^5$  B.  $a^5$  C.  $-a^6$  D.  $a^6$
- (2015•潍坊) 下列运算正确的是 ( )  
A.  $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{5}$  B.  $3x^2y-x^2y=3$   
C.  $\frac{a^2+b^2}{a+b}=a+b$  D.  $(a^2b)^3=a^6b^3$
- (2015•潜江) 计算  $(-2a^2b)^3$  的结果是 ( )  
A.  $-6a^6b^3$  B.  $-8a^6b^3$  C.  $8a^6b^3$  D.  $-8a^5b^3$
- (2015•北海) 下列运算正确的是 ( )  
A.  $3a+4b=12a$  B.  $(ab^3)^2=ab^6$   
C.  $(5a^2-ab)-(4a^2+2ab)=a^2-3ab$  D.  $x^{12} \div x^6=x^2$
- (2015•湘潭) 下列计算正确的是 ( )  
A.  $\sqrt{5}-\sqrt{2}=\sqrt{3}$  B.  $3^{-1}=-3$  C.  $(a^4)^2=a^8$  D.  $a^6 \div a^2=a^3$
- (2015•河北) 下列运算正确的是 ( )  
A.  $(\frac{1}{2})^{-1}=-\frac{1}{2}$  B.  $6 \times 10^7=6000000$   
C.  $(2a)^2=2a^2$  D.  $a^3 \cdot a^2=a^5$
- (2015•重庆) 计算  $(a^2b)^3$  的结果是 ( )  
A.  $a^6b^3$  B.  $a^2b^3$  C.  $a^5b^3$  D.  $a^6b$
- (2015•昆明) 下列运算正确的是 ( )  
A.  $\sqrt{(-3)^2}=-3$  B.  $a^2 \cdot a^4=a^6$  C.  $(2a^2)^3=2a^6$  D.  $(a+2)^2=a^2+4$

### 二. 填空题 (共 10 小题)

- (2015•安顺) 计算： $(-3)^{2013} \cdot (-\frac{1}{3})^{2011} =$ \_\_\_\_\_.
- (2015•大庆) 若  $a^{2n}=5$ ,  $b^{2n}=16$ , 则  $(ab)^n =$ \_\_\_\_\_.
- (2015•铜仁市) 请看杨辉三角 (1), 并观察下列等式 (2):

		1		1		
		1	2	1		
	1	3	3	1		
1	4	6	4	1		
.....						

(1)

$$\begin{aligned} (a+b)^1 &= a+b \\ (a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 \\ (a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\ (a+b)^4 &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \end{aligned}$$

(2)

根据前面各式的规律, 则  $(a+b)^6 =$ \_\_\_\_\_.

14. (2015•珠海) 填空： $x^2+10x+\underline{\hspace{2cm}}=(x+\underline{\hspace{2cm}})^2$ .
15. (2015•孝感) 分解因式： $(a-b)^2-4b^2=\underline{\hspace{2cm}}$ .
16. (2015•东营) 分解因式： $4+12(x-y)+9(x-y)^2=\underline{\hspace{2cm}}$ .
17. (2015•内江) 已知实数  $a, b$  满足： $a^2+1=\frac{1}{a}, b^2+1=\frac{1}{b}$ , 则  $2015^{|a-b|}=\underline{\hspace{2cm}}$ .
18. (2014•潍坊) 计算： $8^{2014} \times (-0.125)^{2015}=\underline{\hspace{2cm}}$ .
19. (2014•达州) 已知实数  $a, b$  满足  $a+b=5, ab=3$ , 则  $a-b=\underline{\hspace{2cm}}$ .
20. (2014•日照) 已知  $a > b$ , 如果  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{3}{2}, ab=2$ , 那么  $a-b$  的值为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

### 三. 解答题 (共 6 小题)

21. (2015•内江) (1) 填空：

$$(a-b)(a+b) = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(2) 猜想：

$$(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\dots+ab^{n-2}+b^{n-1}) = \underline{\hspace{2cm}} \text{ (其中 } n \text{ 为正整数, 且 } n \geq 2 \text{)}.$$

(3) 利用 (2) 猜想的结论计算：

$$2^9 - 2^8 + 2^7 - \dots + 2^3 - 2^2 + 2.$$

22. (2015•重庆) 如果把一个自然数各数位上的数字从最高位到个位依次排出一串数字, 与从个位到最高位依次排出一串数字完全相同, 那么我们把这样的自然数叫做“和谐数”. 例如: 自然数 64746 从最高位到个位排出一串数字是 6, 4, 7, 4, 6, 从个位到最高位排出一串数字也是: 6, 4, 7, 4, 6, 所以 64746 是“和谐数”. 再如: 33, 181, 212, 4664,  $\dots$ , 都是“和谐数”.

(1) 请你直接写出 3 个四位“和谐数”, 猜想任意一个四位数“和谐数”能否被 11 整除, 并说明理由;

(2) 已知一个能被 11 整除的三位“和谐数”, 设个位上的数字为  $x$  ( $1 \leq x \leq 4, x$  为自然数), 十位上的数字为  $y$ , 求  $y$  与  $x$  的函数关系式.

23. (2014•宜昌) 化简:  $(a+b)(a-b)+2b^2$ .

24. (2014•杭州) 设  $y=kx$ , 是否存在实数  $k$ , 使得代数式  $(x^2-y^2)(4x^2-y^2)+3x^2(4x^2-y^2)$  能化简为  $x^4$ ? 若能, 请求出所有满足条件的  $k$  的值; 若不能, 请说明理由.

25. (2013•张家界) 阅读材料: 求  $1+2+2^2+2^3+2^4+\dots+2^{2013}$  的值.

解: 设  $S=1+2+2^2+2^3+2^4+\dots+2^{2012}+2^{2013}$ , 将等式两边同时乘以 2 得:

$$2S=2+2^2+2^3+2^4+2^5+\dots+2^{2013}+2^{2014}$$

$$\text{将下式减去上式得 } 2S - S = 2^{2014} - 1$$

$$\text{即 } S = 2^{2014} - 1$$

$$\text{即 } 1+2+2^2+2^3+2^4+\dots+2^{2013} = 2^{2014} - 1$$

请你仿照此法计算:

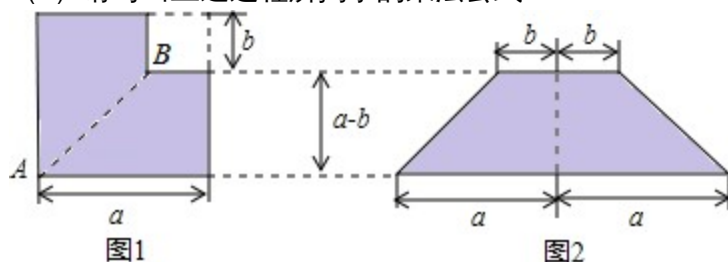
$$(1) 1+2+2^2+2^3+2^4+\dots+2^{10}$$

$$(2) 1+3+3^2+3^3+3^4+\dots+3^n \text{ (其中 } n \text{ 为正整数)}.$$

26. (2013•义乌市) 如图 1 所示, 从边长为  $a$  的正方形纸片中减去一个边长为  $b$  的小正方形, 再沿着线段  $AB$  剪开, 把剪成的两张纸拼成如图 2 的等腰梯形,

(1) 设图 1 中阴影部分面积为  $S_1$ ，图 2 中阴影部分面积为  $S_2$ ，请直接用含  $a$ 、 $b$  的代数式表示  $S_1$  和  $S_2$ ；

(2) 请写出上述过程所揭示的乘法公式。



## 2015 中考数学真题分类汇编：03 整式与因式分解

参考答案与试题解析

### 一．选择题（共 10 小题）

1. (2015•连云港) 下列运算正确的是 ( )

A.  $2a+3b=5ab$  B.  $5a-2a=3a$  C.  $a^2 \cdot a^3=a^6$  D.  $(a+b)^2=a^2+b^2$

考点：同底数幂的乘法；合并同类项；完全平方公式。

分析：根据同类项、同底数幂的乘法和完全平方公式计算即可。

解答：解：A、 $2a$  与  $3b$  不能合并，错误；

B、 $5a-2a=3a$ ，正确；

C、 $a^2 \cdot a^3=a^5$ ，错误；

D、 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ ，错误；

故选 B。

点评：此题考查同类项、同底数幂的乘法和完全平方公式，关键是根据法则进行计算。

2. (2015•营口) 下列计算正确的是 ( )

A.  $|-2|=-2$  B.  $a^2 \cdot a^3=a^6$  C.  $(-3)^{-2}=\frac{1}{9}$  D.  $\sqrt{12}=3\sqrt{2}$

考点：同底数幂的乘法；绝对值；算术平方根；负整数指数幂。

分析：分别根据绝对值的性质、同底数幂的乘法法则、负整数指数幂的运算法则及数的开方法则对各选项进行逐一计算即可。

解答：解：A、原式  $=2 \neq -2$ ，故本选项错误；

B、原式  $=a^5 \neq a^6$ ，故本选项错误；

C、原式  $=\frac{1}{9}$ ，故本选项正确；

D、原式  $=2\sqrt{3} \neq 3\sqrt{2}$ ，故本选项错误。

故选 C。

点评：本题考查的是同底数幂的乘法，熟知绝对值的性质、同底数幂的乘法法则、负整数指数幂的运算法则及数的开方法则是解答此题的关键。

3. (2015•宿迁) 计算  $(-a^3)^2$  的结果是 ( )

A.  $-a^5$  B.  $a^5$  C.  $-a^6$  D.  $a^6$

考点：幂的乘方与积的乘方。

分析：根据幂的乘方计算即可。

解答：解： $(-a^3)^2=a^6$ ，

故选D

点评： 此题考查幂的乘方问题，关键是根据法则进行计算．

4. (2015•潍坊) 下列运算正确的是 ( )

A.  $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{5}$  B.  $3x^2y - x^2y=3$

C.  $\frac{a^2+b^2}{a+b}=a+b$  D.  $(a^2b)^3=a^6b^3$

考点： 幂的乘方与积的乘方；合并同类项；约分；二次根式的加减法．

分析： A：根据二次根式的加减法的运算方法判断即可．

B：根据合并同类项的方法判断即可．

C：根据约分的方法判断即可．

D：根据积的乘方的运算方法判断即可．

解答： 解： $\because \sqrt{2}+\sqrt{3}\neq\sqrt{5}$ ，

$\therefore$ 选项A不正确；

$\because 3x^2y - x^2y=2x^2y$ ，

$\therefore$ 选项B不正确；

$\because \frac{a^2+b^2}{a+b}\neq\frac{(a+b)^2}{a+b}=a+b$ ，

$\therefore$ 选项C不正确；

$\because (a^2b)^3=a^6b^3$ ，

$\therefore$ 选项D正确．

故选：D．

点评： (1) 此题主要考查了幂的乘方和积的乘方，要熟练掌握，解答此题的关键是要明确：①  $(a^m)^n=a^{mn}$  ( $m, n$  是正整数)；②  $(ab)^n=a^n b^n$  ( $n$  是正整数)．

(2) 此题还考查了二次根式的加减法，要熟练掌握，解答此题的关键是要明确二次根式的加减法的步骤：①如果有括号，根据去括号法则去掉括号．②把不是最简二次根式的二次根式进行化简．③合并被开方数相同的二次根式．

(3) 此题还考查了合并同类项，以及约分的方法的应用，要熟练掌握．

5. (2015•潜江) 计算  $(-2a^2b)^3$  的结果是 ( )

A.  $-6a^6b^3$  B.  $-8a^6b^3$  C.  $8a^6b^3$  D.  $-8a^5b^3$

考点： 幂的乘方与积的乘方．

分析： 根据幂的乘方和积的乘方的运算法则求解．

解答： 解： $(-2a^2b)^3=-8a^6b^3$ ．

故选B．

点评： 本题考查了幂的乘方和积的乘方，解答本题的关键是掌握幂的乘方和积的乘方的运算法则．

6. (2015•北海) 下列运算正确的是 ( )

A.  $3a+4b=12a$  B.  $(ab^3)^2=ab^6$

C.  $(5a^2 - ab) - (4a^2 + 2ab) = a^2 - 3ab$  D.  $x^{12} \div x^6 = x^2$

考点： 幂的乘方与积的乘方；合并同类项；去括号与添括号；同底数幂的除法．

分析： 根据同底数幂的除法的性质，整式的加减，积的乘方的性质，合并同类项的法则，对各选项分析判断后利用排除法求解．

解答： 解：A、 $3a$  与  $4b$  不是同类项，不能合并，故错误；

B、 $(ab^3)^2=a^2b^6$ ，故错误；

C、正确；

D、 $x^{12} \div x^6 = x^6$ ，故错误；

故选：C．

点评： 本题考查了合并同类项，同底数幂的除法，幂的乘方，积的乘方，理清指数的变化是解题的关键．

7. (2015•湘潭) 下列计算正确的是 ( )

A.  $\sqrt{5} - \sqrt{2} = \sqrt{3}$  B.  $3^{-1} = -3$  C.  $(a^4)^2 = a^8$  D.  $a^6 \div a^2 = a^3$

考点： 幂的乘方与积的乘方；同底数幂的除法；负整数指数幂；二次根式的加减法．

分析： A．不是同类二次根式，不能合并；B．依据负整数指数幂的运算法则计算即可；C．依据幂的乘方法则计算即可；D．依据同底数幂的除法法则计算即可．

解答： 解：A．不是同类二次根式，不能合并，故A错误；

B.  $3^{-1} = \frac{1}{3}$ ，故B错误；

C.  $(a^4)^2 = a^{4 \times 2} = a^8$ ，故C正确；

D.  $a^6 \div a^2 = a^{6-2} = a^4$ ，故D错误．

故选：C．

点评： 本题主要考查的是数与式的运算，掌握同类二次根式的定义、负整数指数幂、积的乘方、幂的乘方的运算法则是解题的关键．

8. (2015•河北) 下列运算正确的是 ( )

A.  $(\frac{1}{2})^{-1} = -\frac{1}{2}$  B.  $6 \times 10^7 = 6000000$

C.  $(2a)^2 = 2a^2$  D.  $a^3 \cdot a^2 = a^5$

考点： 幂的乘方与积的乘方；科学记数法—原数；同底数幂的乘法；负整数指数幂．

分析： A：根据负整数指数幂的运算方法判断即可．

B：科学记数法  $a \times 10^n$  表示的数“还原”成通常表示的数，就是把a的小数点向右移动n位所得到的数，据此判断即可．

C：根据积的乘方的运算方法判断即可．

D：根据同底数幂的乘法法则判断即可．

解答： 解： $\because (\frac{1}{2})^{-1} = 2$ ，

$\therefore$ 选项A不正确；

$\because 6 \times 10^7 = 60000000$ ，

$\therefore$ 选项B不正确；

$\because (2a)^2 = 4a^2$ ，

$\therefore$ 选项C不正确；

$\because a^3 \cdot a^2 = a^5$ ，

$\therefore$ 选项D正确．

故选：D．

点评： (1) 此题主要考查了幂的乘方和积的乘方，要熟练掌握，解答此题的关键是要明确：①  $(a^m)^n = a^{mn}$  (m, n 是正整数)；②  $(ab)^n = a^n b^n$  (n 是正整数)．

(2) 此题还考查了负整数指数幂的运算，要熟练掌握，解答此题的关键是要明确：

①  $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$  ( $a \neq 0$ ,  $p$  为正整数)；② 计算负整数指数幂时，一定要根据负整数指数幂的意义计算；③ 当底数是分数时，只要把分子、分母颠倒，负指数就可变为正指数。

(3) 此题还考查了同底数幂的乘法法则：同底数幂相乘，底数不变，指数相加，要熟练掌握，解答此题的关键是要明确：① 底数必须相同；② 按照运算性质，只有相乘时才是底数不变，指数相加。

(4) 此题还考查了科学计数法—原数，要熟练掌握，解答此题的关键是要明确：科学记数法  $a \times 10^n$  表示的数“还原”成通常表示的数，就是把  $a$  的小数点向右移动  $n$  位所得到的数。若科学记数法表示较小的数  $a \times 10^{-n}$ ，还原为原来的数，需要把  $a$  的小数点向左移动  $n$  位得到原数。

9. (2015•重庆) 计算  $(a^2b)^3$  的结果是 ( )

A.  $a^6b^3$  B.  $a^2b^3$  C.  $a^5b^3$  D.  $a^6b$

考点： 幂的乘方与积的乘方。

分析： 根据幂的乘方和积的乘方的运算方法：①  $(a^m)^n = a^{mn}$  ( $m, n$  是正整数)；②  $(ab)^n = a^n b^n$  ( $n$  是正整数)；求出  $(a^2b)^3$  的结果是多少即可。

解答： 解：  $(a^2b)^3$

$$= (a^2)^3 \cdot b^3$$

$$= a^6 b^3$$

即计算  $(a^2b)^3$  的结果是  $a^6b^3$ 。

故选：A。

点评： 此题主要考查了幂的乘方和积的乘方，要熟练掌握，解答此题的关键是要明确：①  $(a^m)^n = a^{mn}$  ( $m, n$  是正整数)；②  $(ab)^n = a^n b^n$  ( $n$  是正整数)。

10. (2015•昆明) 下列运算正确的是 ( )

A.  $\sqrt{(-3)^2} = -3$  B.  $a^2 \cdot a^4 = a^6$  C.  $(2a^2)^3 = 2a^6$  D.  $(a+2)^2 = a^2 + 4$

考点： 幂的乘方与积的乘方；算术平方根；同底数幂的乘法；完全平方公式。

分析： 根据同底数幂的乘法的性质，积的乘方的性质，二次根式的性质，完全平方公式，对各选项分析判断后利用排除法求解。

解答： 解：A、 $\sqrt{(-3)^2} = 3$ ，故错误；

B、正确；

C、 $(2a^2)^3 = 8a^6$ ，故正确；

D、 $(a+2)^2 = a^2 + 4a + 4$ ，故错误；

故选：B。

点评： 本题考查了同底数幂的乘法，幂的乘方，积的乘方，理清指数的变化是解题的关键。

## 二．填空题 (共 10 小题)

11. (2015•安顺) 计算： $(-3)^{2013} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{2011} = \underline{9}$ 。

考点： 幂的乘方与积的乘方；同底数幂的乘法。

分析： 根据同底数幂的乘法，可得  $(-3)^{2011} \cdot (-3)^2$ ，再根据积的乘方，可得计算结果。



故答案是：25；5．

点评： 本题考查了完全平方公式，两数的平方和，再加上或减去它们积的2倍，就构成了一个完全平方式．要求熟悉完全平方公式，并利用其特点解题．

15．（2015•孝感）分解因式： $(a-b)^2-4b^2=$  $(a+b)(a-3b)$ ．

考点： 因式分解-运用公式法．

分析： 直接利用平方差公式分解因式得出即可．

解答： 解： $(a-b)^2-4b^2$   
 $= (a-b+2b)(a-b-2b)$   
 $= (a+b)(a-3b)$ ．

故答案为： $(a+b)(a-3b)$ ．

点评： 此题主要考查了公式法分解因式，熟练应用平方差公式是解题关键．

16．（2015•东营）分解因式： $4+12(x-y)+9(x-y)^2=$  $(3x-3y+2)^2$ ．

考点： 因式分解-运用公式法．

专题： 计算题．

分析： 原式利用完全平方公式分解即可．

解答： 解：原式= $[2+3(x-y)]^2=(3x-3y+2)^2$ ．

故答案为： $(3x-3y+2)^2$

点评： 此题考查了因式分解-运用公式法，熟练掌握完全平方公式是解本题的关键．

17．（2015•内江）已知实数a，b满足： $a^2+1=\frac{1}{a}$ ， $b^2+1=\frac{1}{b}$ ，则 $2015^{|a-b|}=$ 1．

考点： 因式分解的应用；零指数幂．

分析： 由于 $a^2+1=\frac{1}{a}$ ， $b^2+1=\frac{1}{b}$ ，两式相减可得 $a^2-b^2=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$ ，则有 $(a+b)(a-b)=$

$\frac{b-a}{ab}$ ，分解因式可得 $a=b$ ，依此可得 $2015^{|a-b|}=2015^0$ ，再根据零指数幂的计算法则计

算即可求解．

解答： 解： $\because a^2+1=\frac{1}{a}$ ， $b^2+1=\frac{1}{b}$ ，

两式相减可得 $a^2-b^2=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$ ，

$(a+b)(a-b)=\frac{b-a}{ab}$ ，

$[ab(a+b)+1](a-b)=0$ ，

$\therefore a-b=0$ ，即 $a=b$ ，

$\therefore 2015^{|a-b|}=2015^0=1$ ．

故答案为：1．

点评： 考查了因式分解的应用，零指数幂，本题关键是得到 $a=b$ ．

18．（2014•潍坊）计算： $8^{2014}\times(-0.125)^{2015}=$ -0.125．

考点： 幂的乘方与积的乘方；同底数幂的乘法．

专题： 计算题．

分析： 根据同底数幂的乘法，可化成指数相同的幂的乘法，根据积的乘方，可得答案．

解答： 解：原式= $8^{2014}\times(-0.125)^{2014}\times(-0.125)$   
 $=(-8\times 0.125)^{2014}\times(-0.125)$

= - 0.125 ,

故答案为：- 0.125 .

点评： 本题考查了积的乘方，先化成指数相同的幂的乘法，再进行积的乘方运算 .

19 . (2014•达州) 已知实数 a、b 满足  $a+b=5$  ,  $ab=3$  , 则  $a-b=$   $\pm\sqrt{13}$  .

考点： 完全平方公式 .

专题： 计算题 .

分析： 将  $a+b=5$  两边平方，利用完全平方公式展开，把  $ab$  的值代入求出  $a^2+b^2$  的值，再利用完全平方公式即可求出  $a-b$  的值 .

解答： 解：将  $a+b=5$  两边平方得：  $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=25$  ,

将  $ab=3$  代入得：  $a^2+b^2=19$  ,

$\therefore (a-b)^2=a^2+b^2-2ab=19-6=13$  ,

则  $a-b=\pm\sqrt{13}$  .

故答案为：  $\pm\sqrt{13}$

点评： 此题考查了完全平方公式，熟练掌握公式是解本题的关键 .

20 . (2014•日照) 已知  $a>b$  , 如果  $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{3}{2}$  ,  $ab=2$  , 那么  $a-b$  的值为 1 .

考点： 完全平方公式；分式的加减法 .

专题： 计算题 .

分析： 已知等式左边通分并利用同分母分式的加法法则计算，将  $ab$  的值代入求出  $a+b$  的值，再利用完全平方公式即可求出  $a-b$  的值 .

解答： 解：  $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}=\frac{3}{2}$  ,

将  $ab=2$  代入

得：  $a+b=3$  ,

$\therefore (a-b)^2=(a+b)^2-4ab=9-8=1$  ,

$\because a>b$  ,

$\therefore a-b>0$  ,

则  $a-b=1$  .

故答案为：1

点评： 此题考查了完全平方公式，以及分式的加减法，熟练掌握公式及法则是解本题的关键 .

### 三 . 解答题 (共 6 小题)

21 . (2015•内江) (1) 填空：

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2 ;$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3 ;$$

$$(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3) = a^4 - b^4 .$$

(2) 猜想：

$$(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\dots+ab^{n-2}+b^{n-1}) = a^n - b^n \quad (\text{其中 } n \text{ 为正整数, 且 } n \geq 2) .$$

(3) 利用 (2) 猜想的结论计算：

$$2^9 - 2^8 + 2^7 - \dots + 2^3 - 2^2 + 2 .$$

考点： 平方差公式 .

专题： 规律型 .

分析： (1) 根据平方差公式与多项式乘以多项式的运算法则运算即可；

(2) 根据 (1) 的规律可得结果；

(3) 原式变形后，利用 (2) 得出的规律计算即可得到结果 .

解答：解：(1)  $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ ；

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3=a^3-b^3$ ；

$(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)=a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3-a^3b-a^2b^2-ab^3-b^4=a^4-b^4$ ；

故答案为： $a^2-b^2$ ， $a^3-b^3$ ， $a^4-b^4$ ；

(2) 由 (1) 的规律可得：

原式= $a^n-b^n$ ，

故答案为： $a^n-b^n$ ；

(3)  $2^9-2^8+2^7-\dots+2^3-2^2+2=(2-1)(2^8+2^6+2^4+2^2+2)=342$  .

点评：此题考查了多项式乘以多项式，弄清题中的规律是解本题的关键 .

22. (2015•重庆) 如果把一个自然数各数位上的数字从最高位到个位依次排出一串数字，与从个位到最高位依次排出一串数字完全相同，那么我们把这样的自然数叫做“和谐数”. 例如：自然数 64746 从最高位到个位排出一串数字是 6, 4, 7, 4, 6，从个位到最高位排出一串数字也是：6, 4, 7, 4, 6，所以 64746 是“和谐数”. 再如：33, 181, 212, 4664, …，都是“和谐数” .

(1) 请你直接写出 3 个四位“和谐数”，猜想任意一个四位数“和谐数”能否被 11 整除，并说明理由；

(2) 已知一个能被 11 整除的三位“和谐数”，设个位上的数字为  $x$  ( $1 \leq x \leq 4$ ,  $x$  为自然数)，十位上的数字为  $y$ ，求  $y$  与  $x$  的函数关系式 .

考点：因式分解的应用；规律型：数字的变化类；函数关系式 .

专题：新定义 .

分析：(1) 根据“和谐数”写出四个四位数的“和谐数”；设任意四位数“和谐数”形式为： $abba$  ( $a$ 、 $b$  为自然数)，则这个四位数为  $a \times 10^3 + b \times 10^2 + b \times 10 + a = 1001a + 110b$ ，利用整数的整除得到  $\frac{1001a+110b}{11} = 91a+10b$ ，由此可判断任意四位数“和谐数”都可以被 11 整除；

(2) 设能被 11 整除的三位“和谐数”为： $xyx$ ，则这个三位数为  $x \times 10^2 + y \times 10 + x = 101x + 10y$ ，由于  $\frac{101x+10y}{11} = 9x+y+\frac{2x-y}{11}$ ，根据整数的整除性得到  $2x-y=0$ ，于是可得  $y$  与  $x$  的关系式 .

解答：解：(1) 四位“和谐数”：1221, 1331, 1111, 6666；

任意一个四位“和谐数”都能被 11 整除，理由如下：

设任意四位数“和谐数”形式为： $abba$  ( $a$ 、 $b$  为自然数)，则

$a \times 10^3 + b \times 10^2 + b \times 10 + a = 1001a + 110b$ ，

$\therefore \frac{1001a+110b}{11} = 91a+10b$

$\therefore$  四位数“和谐数” $abba$  能被 11 整除；

$\therefore$  任意四位数“和谐数”都可以被 11 整除

(2) 设能被 11 整除的三位“和谐数”为： $xyx$ ，则  $x \times 10^2 + y \times 10 + x = 101x + 10y$ ，

$\frac{101x+10y}{11} = 9x+y+\frac{2x-y}{11}$ ，

$\because 1 \leq x \leq 4$ ， $101x+10y$  能被 11 整除，

$\therefore 2x-y=0$ ，

$\therefore y=2x$  ( $1 \leq x \leq 4$ ) .

点评： 本题考查了因式分解的应用：利用因式分解解决求值问题；利用因式分解解决证明问题；利用因式分解简化计算问题．灵活利用整数的整除性．

23．（2014•宜昌）化简： $(a+b)(a-b)+2b^2$ ．

考点： 平方差公式；合并同类项．

专题： 计算题．

分析： 先根据平方差公式算乘法，再合并同类项即可．

解答： 解：原式= $a^2 - b^2 + 2b^2$   
 $= a^2 + b^2$ ．

点评： 本题考查了平方差公式和整式的混合运算的应用，主要考查学生的化简能力．

24．（2014•杭州）设 $y=kx$ ，是否存在实数 $k$ ，使得代数式 $(x^2 - y^2)(4x^2 - y^2) + 3x^2(4x^2 - y^2)$ 能化简为 $x^4$ ？若能，请求出所有满足条件的 $k$ 的值；若不能，请说明理由．

考点： 因式分解的应用．

专题： 计算题；因式分解．

分析： 先利用因式分解得到原式= $(4x^2 - y^2)(x^2 - y^2 + 3x^2) = (4x^2 - y^2)^2$ ，再把当 $y=kx$ 代入得到原式= $(4x^2 - k^2x^2)^2 = (4 - k^2)x^4$ ，所以当 $4 - k^2 = 1$ 满足条件，然后解关于 $k$ 的方程即可．

解答： 解：能；

$$\begin{aligned} & (x^2 - y^2)(4x^2 - y^2) + 3x^2(4x^2 - y^2) \\ &= (4x^2 - y^2)(x^2 - y^2 + 3x^2) \\ &= (4x^2 - y^2)^2, \end{aligned}$$

当 $y=kx$ ，原式= $(4x^2 - k^2x^2)^2 = (4 - k^2)^2x^4$ ，

令 $(4 - k^2)^2 = 1$ ，解得 $k = \pm\sqrt{3}$ 或 $\pm\sqrt{5}$ ，

即当 $k = \pm\sqrt{3}$ 或 $\pm\sqrt{5}$ 时，原代数式可化简为 $x^4$ ．

点评： 本题考查了因式分解的运用：利用因式分解解决求值问题；利用因式分解解决证明问题；利用因式分解简化计算问题．

25．（2013•张家界）阅读材料：求 $1+2+2^2+2^3+2^4+\dots+2^{2013}$ 的值．

解：设 $S=1+2+2^2+2^3+2^4+\dots+2^{2012}+2^{2013}$ ，将等式两边同时乘以2得：

$$2S=2+2^2+2^3+2^4+2^5+\dots+2^{2013}+2^{2014}$$

将下式减去上式得 $2S - S = 2^{2014} - 1$

$$\text{即 } S = 2^{2014} - 1$$

$$\text{即 } 1+2+2^2+2^3+2^4+\dots+2^{2013} = 2^{2014} - 1$$

请你仿照此法计算：

$$(1) 1+2+2^2+2^3+2^4+\dots+2^{10}$$

$$(2) 1+3+3^2+3^3+3^4+\dots+3^n \text{ (其中 } n \text{ 为正整数)} .$$

考点： 同底数幂的乘法．

专题： 计算题．

分析： (1) 设 $S=1+2+2^2+2^3+2^4+\dots+2^{10}$ ，两边乘以2后得到关系式，与已知等式相减，变形即可求出所求式子的值；

(2) 同理即可得到所求式子的值．

解答： 解：(1) 设 $S=1+2+2^2+2^3+2^4+\dots+2^{10}$ ，

将等式两边同时乘以2得： $2S=2+2^2+2^3+2^4+\dots+2^{10}+2^{11}$ ，

将下式减去上式得： $2S - S = 2^{11} - 1$ ，即 $S = 2^{11} - 1$ ，

则 $1+2+2^2+2^3+2^4+\dots+2^{10} = 2^{11} - 1$ ；

(2) 设  $S=1+3+3^2+3^3+3^4+\dots+3^n$  ①，  
 两边同时乘以 3 得： $3S=3+3^2+3^3+3^4+\dots+3^n+3^{n+1}$  ②，  
 ② - ① 得： $3S - S = 3^{n+1} - 1$ ，即  $S = \frac{1}{2} (3^{n+1} - 1)$ ，

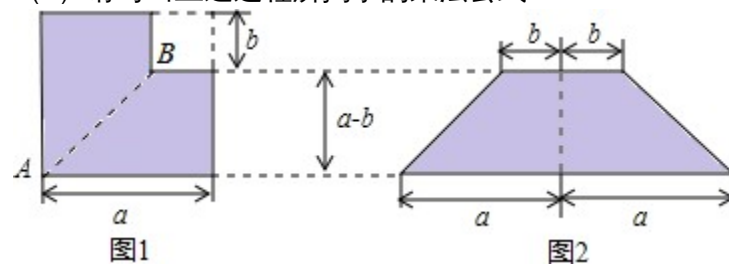
则  $1+3+3^2+3^3+3^4+\dots+3^n = \frac{1}{2} (3^{n+1} - 1)$ 。

点评：此题考查了同底数幂的乘法，弄清题中的技巧是解本题的关键。

26. (2013•义乌市) 如图 1 所示，从边长为  $a$  的正方形纸片中减去一个边长为  $b$  的小正方形，再沿着线段  $AB$  剪开，把剪成的两张纸拼成如图 2 的等腰梯形，

(1) 设图 1 中阴影部分面积为  $S_1$ ，图 2 中阴影部分面积为  $S_2$ ，请直接用含  $a$ 、 $b$  的代数式表示  $S_1$  和  $S_2$ ；

(2) 请写出上述过程所揭示的乘法公式。



考点：平方差公式的几何背景。

分析：(1) 先用大正方形的面积减去小正方形的面积，即可求出  $S_1$ ，再根据梯形的面积公式即可求出  $S_2$ 。

(2) 根据 (1) 得出的值，直接可写出乘法公式  $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ 。

解答：解：(1)  $\because$  大正方形的边长为  $a$ ，小正方形的边长为  $b$ ，  
 $\therefore S_1 = a^2 - b^2$ ，

$$S_2 = \frac{1}{2} (2a+2b)(a-b) = (a+b)(a-b)；$$

(2) 根据题意得：

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2；$$

点评：此题考查了平方差公式的几何背景，根据正方形的面积公式和梯形的面积公式得出它们之间的关系是解题的关键，是一道基础题。