

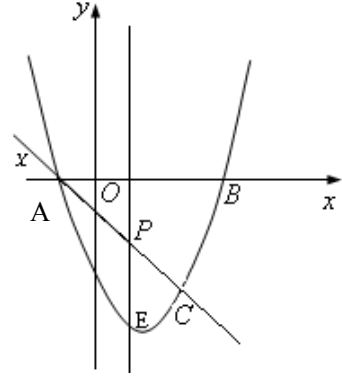
## 二次函数与四边形

### 一. 二次函数与四边形的形状

例. 如图, 抛物线  $y = x^2 - 2x - 3$  与  $x$  轴交 A、B 两点 (A 点在 B

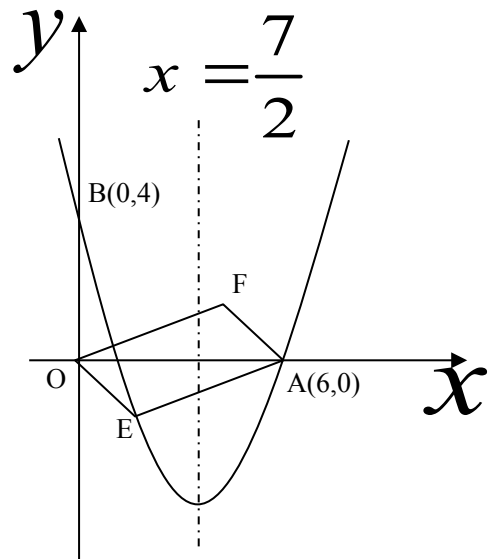
点左侧), 直线  $l$  与抛物线交于 A、C 两点, 其中 C 点的横坐标为 2.

- (1) 求 A、B 两点的坐标及直线 AC 的函数表达式;
- (2) P 是线段 AC 上的一个动点, 过 P 点作  $y$  轴的平行线交抛物线于 E 点, 求线段 PE 长度的最大值;
- (3) 点 G 是抛物线上的动点, 在  $x$  轴上是否存在点 F, 使 A、C、F、G 这样的四个点为顶点的四边形是平行四边形? 如果存在, 求出所有满足条件的 F 点坐标; 如果不存在, 请说明理由.



练习. 如图, 对称轴为直线  $x = \frac{7}{2}$  的抛物线经过点 A (6, 0) 和 B (0, 4).

- (1) 求抛物线解析式及顶点坐标;
- (2) 设点 E ( $x$ ,  $y$ ) 是抛物线上一动点, 且位于第四象限, 四边形 OEAF 是以 OA 为对角线的平行四边形. 求平行四边形 OEAF 的面积  $S$  与  $x$  之间的函数关系式, 并写出自变量  $x$  的取值范围;
  - ① 当平行四边形 OEAF 的面积为 24 时, 请判断平行四边形 OEAF 是否为菱形?
  - ② 是否存在点 E, 使平行四边形 OEAF 为正方形? 若存在, 求出点 E 的坐标; 若不存在, 请说明理由.



## 二. 二次函数与四边形的面积

**例.**如图 10, 已知抛物线  $P: y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$  与  $x$  轴交于  $A$ 、 $B$  两点(点  $A$  在  $x$  轴的正半轴上), 与  $y$  轴交于点  $C$ , 矩形  $DEFG$  的一条边  $DE$  在线段  $AB$  上, 顶点  $F$ 、 $G$  分别在线段  $BC$ 、 $AC$  上, 抛物线  $P$  上部分点的横坐标对应的纵坐标如下:

$x$	...	-3	-2	1	2	...
$y$	...	$-\frac{5}{2}$	-4	$-\frac{5}{2}$	0	...

- (1) 求  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三点的坐标;
- (2) 若点  $D$  的坐标为  $(m, 0)$ , 矩形  $DEFG$  的面积为  $S$ , 求  $S$  与  $m$  的函数关系, 并指出  $m$  的取值范围;
- (3) 当矩形  $DEFG$  的面积  $S$  取最大值时, 连接  $DF$  并延长至点  $M$ , 使  $FM = k \cdot DF$ , 若点  $M$  不在抛物线  $P$  上, 求  $k$  的取值范围.

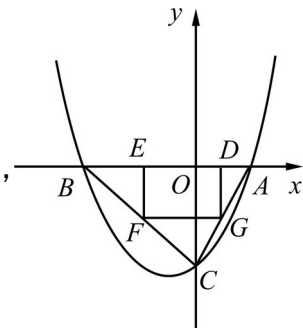
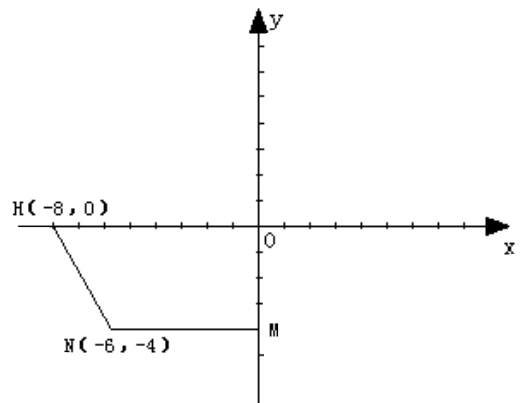


图 10

**练习.**如图, 平面直角坐标系中有一直角梯形  $OMNH$ , 点  $H$  的坐标为  $(-8, 0)$ , 点  $N$  的坐标为  $(-6, -4)$ .

- (1) 画出直角梯形  $OMNH$  绕点  $O$  旋转  $180^\circ$  的图形  $OABC$ , 并写出顶点  $A$ ,  $B$ ,  $C$  的坐标(点  $M$  的对应点为  $A$ , 点  $N$  的对应点为  $B$ , 点  $H$  的对应点为  $C$ );
- (2) 求出过  $A$ ,  $B$ ,  $C$  三点的抛物线的表达式;
- (3) 截取  $CE = OF = AG = m$ , 且  $E$ ,  $F$ ,  $G$  分别在线段  $CO$ ,  $OA$ ,  $AB$  上, 求四边形  $BEFG$  的面积  $S$  与  $m$  之间的函数关系式, 并写出自变量  $m$  的取值范围; 面积  $S$  是否存在最小值? 若存在, 请求出这个最小值; 若不存在, 请说明理由;
- (4) 在 (3) 的情况下, 四边形  $BEFG$  是否存在邻边相等的情况, 若存在, 请直接写出此时  $m$  的值, 并指出相等的邻边; 若不存在, 说明理由.



### 三．二次函数与四边形的动态探究

例、如图 1，在平面直角坐标系中，有一张矩形纸片  $OABC$ ，已知  $O(0, 0)$ ， $A(4, 0)$ ， $C(0, 3)$ ，点  $P$  是  $OA$  边上的动点(与点  $O$ 、 $A$  不重合)．现将  $\triangle PAB$  沿  $PB$  翻折，得到  $\triangle PDB$ ；再在  $OC$  边上选取适当的点  $E$ ，将  $\triangle POE$  沿  $PE$  翻折，得到  $\triangle PFE$ ，并使直线  $PD$ 、 $PF$  重合．

(1) 设  $P(x, 0)$ ， $E(0, y)$ ，求  $y$  关于  $x$  的函数关系式，并求  $y$  的最大值；

(2) 如图 2，若翻折后点  $D$  落在  $BC$  边上，求过点  $P$ 、 $B$ 、 $E$  的抛物线的函数关系式；

(3) 在(2)的情况下，在该抛物线上是否存在点  $Q$ ，使  $\triangle PEQ$  是以  $PE$  为直角边的直角三角形？若不存在，说明理由；若存在，求出点  $Q$  的坐标．

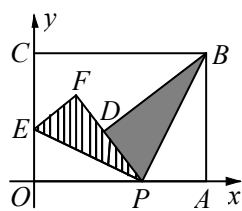


图 1

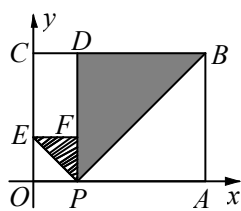


图 2

练习.如图①,正方形 $ABCD$ 的顶点 $A, B$ 的坐标分别为 $(0,10), (8,4)$ , 顶点 $C, D$ 在第一象限. 点 $P$ 从点 $A$ 出发, 沿正方形按逆时针方向匀速运动, 同时, 点 $Q$ 从点 $E(4,0)$ 出发, 沿 $x$ 轴正方向以相同速度运动. 当点 $P$ 到达点 $C$ 时,  $P, Q$ 两点同时停止运动, 设运动的时间为 $t$ 秒.

(1) 求正方形 $ABCD$ 的边长.

(2) 当点 $P$ 在 $AB$ 边上运动时,  $\triangle OPQ$ 的面积 $S$  (平方单位) 与时间 $t$  (秒) 之间的函数图象为抛物线的一部分 (如图②所示), 求 $P, Q$ 两点的运动速度.

(3) 求(2)中面积 $S$  (平方单位) 与时间 $t$  (秒) 的函数关系式及面积 $S$ 取最大值时点 $P$ 的坐标.

(4) 若点 $P, Q$ 保持(2)中的速度不变, 则点 $P$ 沿着 $AB$ 边运动时,  $\angle OPQ$ 的大小随着时间 $t$ 的增大而增大; 沿着 $BC$ 边运动时,  $\angle OPQ$ 的大小随着时间 $t$ 的增大而减小. 当点 $P$ 沿着这两边运动时, 使 $\angle OPQ = 90^\circ$ 的点 $P$ 有\_\_\_个.

(抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的顶点坐标是 $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ ).

